

§7. Криволинейный интеграл первого рода

1⁰. Определение криволинейного интеграла первого рода.

Пусть на плоскости R^2 , где определена прямоугольная система координат Oxy , задана спрямляемая кривая $AB = L$, не имеющая точек самопересечения и участков самоналегания. Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), a \leq t \leq b, \quad (1)$$

и пусть на кривой AB определена непрерывная функция $f(x, y)$.

Разобьем отрезок $a \leq t \leq b$ на n частей точками $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. В силу задания (1), кривая AB будет разбита на n частей точками $M_k(x_k; y_k), k = \overline{0, n}$ (рис. 1), где $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$. На каждой дуге $M_{k-1}M_k$ выберем произвольную точку N_k и составим сумму

$$\sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta l_k, \quad (2)$$

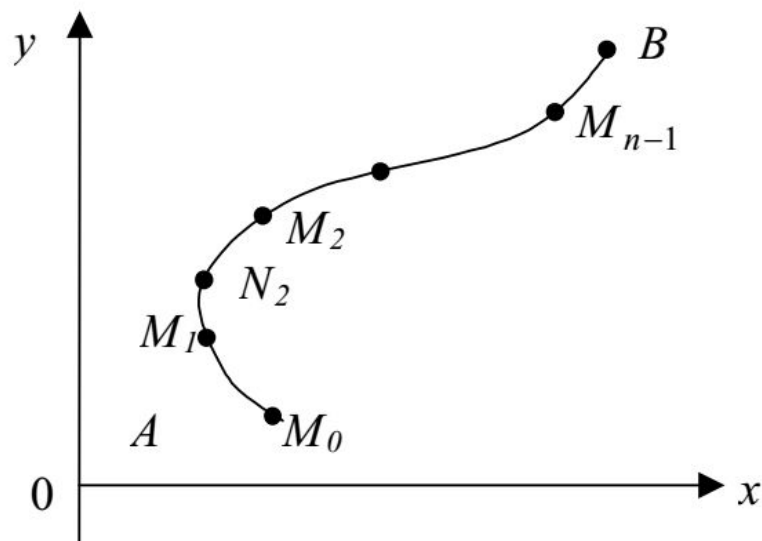


Рис. 1

где через Δl_k обозначена длина дуги $\overline{M_{k-1}M_k}$. Если предел интегральной суммы (2) при стремлении к нулю $\Delta l(n) = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta l_k$ существует и не зависит от способа разбиения отрезка $a \leq t \leq b$ на части, то этот предел называется *криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x, y)$ по кривой AB* и обозначается

$$\lim_{\Delta l(n) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta l_k = \int_{AB} f(N) dl = \int_L f(x, y) dl. \quad (3)$$

Предел в (3) вычисляется именно при $\Delta l(n) \rightarrow 0$, а не при $n \rightarrow \infty$. При $n \rightarrow \infty$ количество точек на кривой можно увеличить так, что $\Delta l(n)$ к нулю стремиться не будет. Уменьшение же $\Delta l(n)$ приведет к увеличению числа n .

Для пространственной кривой AB криволинейный интеграл первого рода $\int_{AB} f(x, y, z) dl$ вводится аналогично.

2^o. Свойства криволинейного интеграла первого рода.
 Формулируя свойства криволинейного интеграла первого рода, считаем, что входящие в формулы интегралы существуют.

1) Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла, то есть

$$\int_L Cf(x, y) dl = C \int_L f(x, y) dl, \text{ где } C = \text{const}.$$

2) Криволинейный интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от слагаемых, то есть

$$\int_L (f_1(x, y) + f_2(x, y)) dl = \int_L f_1(x, y) dl + \int_L f_2(x, y) dl .$$

3) Если кривая L разбита на конечное число частей L_k , то криволинейный интеграл по кривой L равен сумме интегралов по частям L_k :

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{L_1} f(x, y) dl + \int_{L_2} f(x, y) dl + \dots + \int_{L_k} f(x, y) dl .$$

4) Если существует криволинейный интеграл по кривой от некоторой функции, то существует и криволинейный интеграл по этой кривой от модуля данной функции, причем модуль интеграла от функции не превосходит интеграла от модуля данной функции:

$$\left| \int_L f(x, y) dl \right| \leq \int_L |f(x, y)| dl .$$

5) Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования.

Свойства 1) – 5) доказываются на основании определения криволинейного интеграла первого рода.

Упражнение 1. Доказать свойства криволинейного интеграла первого рода.

3⁰. Вычисление криволинейного интеграла первого рода. Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями (1), где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывны и имеют непрерывные производные $\varphi'(t), \psi'(t)$, не обращающиеся в нуль одновременно, а $f(x, y)$ – функция, непрерывная на всей этой кривой. При этих условиях справедлива формула

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \quad (4)$$

Отметим, что определенный интеграл, стоящий в правой части равенства (4), существует, так как подынтегральная функция непрерывна на $[a; b]$.

Докажем равенство (4). Для этого рассмотрим интеграл, стоящий в левой части (4). Кривую AB можно задать параметрически с помощью формул $x = x(l)$, $y = y(l)$, $0 \leq l \leq K$, где l – длина дуги от точки A до текущей точки кривой AB , K – длина всей кривой AB . Тогда функция $f(x, y)$ становится сложной функцией параметра l .

Обозначим через $l_k^*, l_k^* \in [l_{k-1}; l_k]$, значение параметра l , соответствующее точке N_k , $N_k \in [M_{k-1}; M_k]$, и представим сумму (2) в виде

$$\sum_{k=1}^n f(x(l_k^*), y(l_k^*)) \Delta l_k, \quad (5)$$

где $\Delta l_k = l_k - l_{k-1}$. Сумма (5) является интегральной суммой для определенного интеграла от функции $f(x(l), y(l))$ на отрезке $[0; K]$, поэтому получаем равенство

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_0^K f(x(l), y(l)) dl . \quad (6)$$

Если кривая AB задается формулами (1), то для произвольной точки M , лежащей на кривой AB , длину l дуги \overline{AM} можно рассматривать как функцию параметра t . Тогда, осуществляя в правой части (6) замену переменной l на переменную t , с учетом формулы $dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$ для дифференциала дуги, получаем равенство (4).

Если гладкая кривая AB задана уравнением $y = \varphi(x)$, $c \leq x \leq d$, то формула (4) принимает вид

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_c^d f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx . \quad (7)$$

Для криволинейного интеграла первого рода, взятого по пространственной кривой AB , определяемой уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $a \leq t \leq b$, справедлива формула

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (x + y) dl$, где

L – четверть окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Решение. Окружность определяется параметрическими уравнениями $x = R \cos t$, $y = R \sin t$. Так как кривая L расположена в первом квадранте, то $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. По формуле (4) получаем

$$\int_L (x + y) dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R \cos t + R \sin t) \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt =$$

$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \sin t) dt = 2R^2. \quad \square$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где L – отрезок, соединяющий начало координат и точку (4; 3).

Решение. Отрезок L определяется соотношениями $y = \frac{3}{4}x$, $0 \leq x \leq 4$. Тогда $y' = \frac{3}{4}$. Подставляя полученные выражения в формулу (7), получаем

$$\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl = \int_0^4 \sqrt{x^2 + \frac{9}{16}x^2} \sqrt{1 + \frac{9}{16}} dx = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \int_0^4 x dx = \frac{25}{2}. \quad \square$$