§7. Криволинейный интеграл первого рода

1^0. Определение криволинейного интеграла первого рода. Пусть на плоскости R^2, где определена прямоугольная система координат Oxy, задана спрямляемая кривая $AB = L$, не имеющая точек самопересечения и участков самоналегания. Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ a \le t \le b, \qquad (1)$$

и пусть на кривой AB определена непрерывная функция $f(x, y)$.

Разобьем отрезок $a \le t \le b$ на n частей точками $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$. В силу задания (1), кривая AB будет разбита на n частей точками $M_k\left(x_k; y_k\right), k = \overline{0,n}$ (рис. 1), где $x_k = \varphi\left(t_k\right)$, $y_k = \psi\left(t_k\right)$. На каждой дуге $M_{k-1}M_k$ выберем произвольную точку N_k и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(N_k\right)\Delta l_k \ , \qquad (2)$$

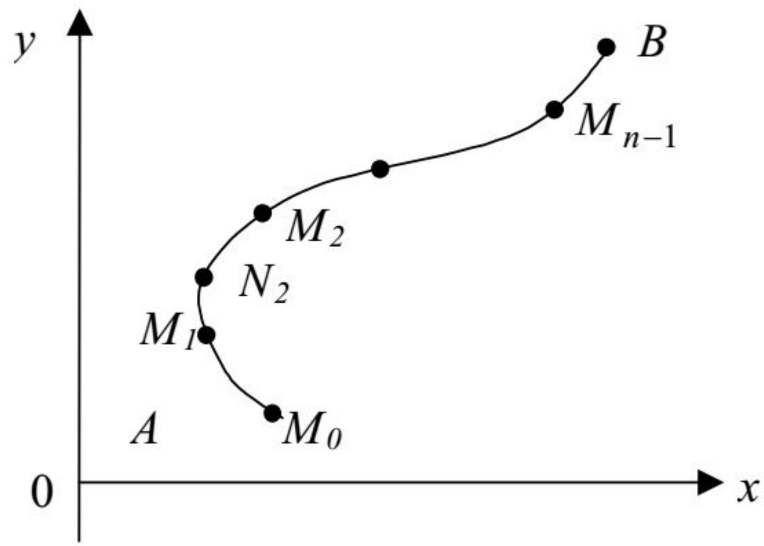

Рис. 1

где через Δl_k обозначена длина дуги $M_{k-1}M_k$. Если предел интегральной суммы (2) при стремлении к нулю $\Delta l(n) = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta l_k$ существует и не зависит от способа разбиения отрезка $a \le t \le b$ на части, то этот предел называется *криволинейным интегралом первого рода от функции* $f\left(x, y\right)$ *по кривой* AB и обозначается

$$\lim_{\Delta l(n)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(N_k\right)\Delta l_k = \int\limits_{AB} f\left(N\right)dl = \int\limits_{L} f\left(x,y\right)dl\,. \qquad (3)$$

Предел в (3) вычисляется именно при $\Delta l(n)\to 0$, а не при $n\to\infty$. При $n\to\infty$ количество точек на кривой можно увеличить так, что $\Delta l(n)$ к нулю стремиться не будет. Уменьшение же $\Delta l(n)$ приведет к увеличению числа n.

Для пространственной кривой AB криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_{AB} f\left(x,y,z\right)dl$ вводится аналогично.

2^0. Свойства криволинейного интеграла первого рода. Формулируя свойства криволинейного интеграла первого рода, считаем, что входящие в формулы интегралы существуют.

1) Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла, то есть

$$\int\limits_{L} Cf\left(x,y\right)dl = C\int\limits_{L} f\left(x,y\right)dl\,, \text{ где } C=\text{const}\,.$$

2) Криволинейный интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от слагаемых, то есть

$$\int_L \left(f_1(x,y)+f_2(x,y)\right)dl=\int_L f_1(x,y)\,dl+\int_L f_2(x,y)\,dl .$$

3) Если кривая L разбита на конечное число частей L_k, то криволинейный интеграл по кривой L равен сумме интегралов по частям L_k:

$$\int_L f(x,y)\,dl=\int_{L_1} f(x,y)\,dl+\int_{L_2} f(x,y)\,dl+\ldots+\int_{L_k} f(x,y)\,dl .$$

4) Если существует криволинейный интеграл по кривой от некоторой функции, то существует и криволинейный интеграл по этой кривой от модуля данной функции, причем модуль интеграла от функции не превосходит интеграла от модуля данной функции:

$$\left|\int_L f(x,y)\,dl\right|\le\int_L \left|f(x,y)\right|dl .$$

5) Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования.

Свойства 1) − 5) доказываются на основании определения криволинейного интеграла первого рода.

Упражнение 1. Доказать свойства криволинейного интеграла первого рода.

3^0. Вычисление криволинейного интеграла первого рода. Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями (1), где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывны и имеют непрерывные производные $\varphi'(t), \psi'(t)$, не обращающиеся в нуль одновременно, а $f(x, y)$ – функция, непрерывная на всей этой кривой. При этих условиях справедлива формула

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt. \qquad (4)$$

Отметим, что определенный интеграл, стоящий в правой части равенства (4), существует, так как подынтегральная функция непрерывна на $[a;b]$.

Докажем равенство (4). Для этого рассмотрим интеграл, стоящий в левой части (4). Кривую AB можно задать параметрически с помощью формул $x = x(l), y = y(l), 0 \le l \le K$, где l − длина дуги от точки A до текущей точки кривой AB, K − длина всей кривой AB. Тогда функция $f(x, y)$ становится сложной функцией параметра l.

Обозначим через $l_k^*, l_k^* \in [l_{k-1}; l_k]$, значение параметра l, соответствующее точке $N_k, N_k \in [M_{k-1}; M_k]$, и представим сумму (2) в виде

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(x(l_k^*), y(l_k^*)\right) \Delta l_k , \tag{5}$$

где $\Delta l_k = l_k - l_{k-1}$. Сумма (5) является интегральной суммой для определенного интеграла от функции $f\left(x(l), y(l)\right)$ на отрезке $[0; K]$, поэтому получаем равенство

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{0}^{K} f\big(x(l),y(l)\big)dl \ . \tag{6}$$

Если кривая AB задается формулами (1), то для произвольной точки M, лежащей на кривой AB, длину l дуги $\overset{\frown}{AM}$ можно рассматривать как функцию параметра t. Тогда, осуществляя в правой части (6) замену переменной l на переменную t, с учетом формулы $dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$ для дифференциала дуги, получаем равенство (4).

Если гладкая кривая AB задана уравнением $y = \varphi\left(x\right), c \le x \le d$, то формула (4) принимает вид

$$\int\limits_{AB} f\left(x,y\right)dl = \int\limits_{c}^{d} f\Big(x,\varphi\left(x\right)\Big)\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx \ . \tag{7}$$

Для криволинейного интеграла первого рода, взятого по пространственной кривой AB, определяемой уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, $a \le t \le b$, справедлива формула

$$\int\limits_{AB} f\left(x,y,z\right)dl = \int\limits_{a}^{b} f\left(\varphi\left(t\right),\psi\left(t\right),\chi(t)\right)\sqrt{\left(\varphi'\left(t\right)\right)^2+\left(\psi'\left(t\right)\right)^2+\left(\chi'\left(t\right)\right)^2}\,dt$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L}\left(x+y\right)dl$, где L – четверть окружности $x^2+y^2=R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Решение. Окружность определяется параметрическими уравнениями $x=R\cos t$, $y=R\sin t$. Так как кривая L расположена в первом квадранте, то $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$. По формуле (4) получаем

$$\int_L (x+y)\,dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R\cos t + R\sin t)\sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \sin t)\,dt = 2R^2. \ \square$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L – отрезок, соединяющий начало координат и точку (4; 3).

Решение. Отрезок L определяется соотношениями $y = \frac{3}{4}x$, $0 \le x \le 4$. Тогда $y' = \frac{3}{4}$. Подставляя полученные выражения в формулу (7), получаем

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl = \int_0^4 \sqrt{x^2 + \frac{9}{16}x^2}\sqrt{1+\frac{9}{16}}\,dx = \frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}\int_0^4 x\,dx = \frac{25}{2}. \ \square$$