

# Научная работа

На тему:

## РЕШЕНИЕ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КООРДИНАТ

Куижев Евгений Олегович и Донских Валерий Валерьевич  
МБОУ «Средняя образовательная школа №16 имени героя  
России гвардии майора Сергея Геннадьевича Таранца», 11  
класс

Научный руководитель: Куижева Людмила Евгеньевна,  
учитель математики, МБОУ «СОШ №16»

# Практика.

1. нахождение угла между скрещивающимися прямыми (задача взята из ЕГЭ по математике 2012 года, вторая волна ( июль ))

На ребре  $CC_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $CE : EC_1 = 1 : 2$ .

Найдите угол между прямыми  $BE$  и  $AC_1$

[2] Введем систему координат с началом в точке  $B(0;0;0)$ .

Примем стороны куба за одну единицу. По стороне  $BB_1$  пустим ось  $OZ$ , по стороне  $BA$  ось  $OY$  и по стороне  $BC$  ось  $OX$ .

Координаты точек:

$B(0;0;0)$  – начало координат

$E(1;0;\frac{1}{3})$  т.к.  $CE : EC_1 = 1 : 2$

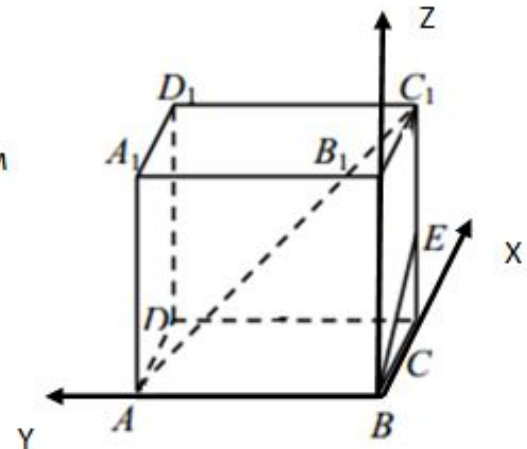
$A(0;1;0)$

$C_1(1;0;1)$

$\vec{BA}(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$ ,  $\vec{BA}(0;1;0)$ ,  $\vec{EB}(1;0;\frac{1}{3})$ ,  $\vec{AC_1}(1;-1;1)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad |\vec{BE}| = \frac{\sqrt{10}}{3}, \quad |\vec{AC_1}| = \sqrt{3}$$

$$\cos \phi = \frac{(1+0+\frac{1}{3}) \cdot 3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{3}} = \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot \sqrt{30}} = \frac{4}{\sqrt{30}} = \frac{2 \cdot \sqrt{30}}{15} \quad \text{Ответ: } \frac{2 \cdot \sqrt{30}}{15}$$



$$\cos \phi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



## Практика.

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $AB = 2$ ,  $AD = AA_1 = 1$ .

Найдите угол между прямой  $AB_1$  и плоскостью  $ABC_1$ .

Нахождение угла между прямой и плоскостью (задача взята из ЕГЭ по математике 2012 года, досрочный ЕГЭ (Апрель))

Введем систему координат с началом в т. А, ось X по AB,

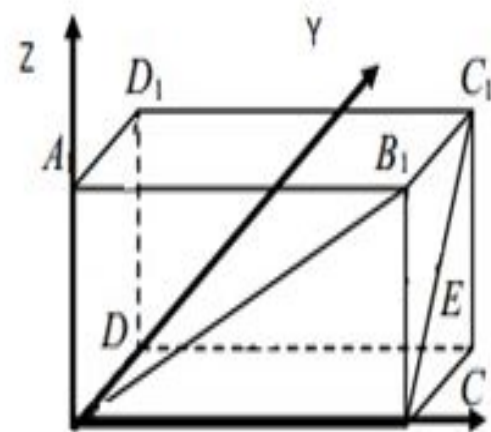
ось Y по AD, ось Z по  $AA_1$ ,  $A(0;0;0)$ ,  $B_1(2;0;1)$ ,

$B(2;0;0)$ ,  $C_1(2;1;1)$ ,  $\overline{AB_1}(2;0;1)$ ,  $|\overline{AB_1}| = \sqrt{5}$ ,

**Уравнение плоскости**, проходящей через три различные точки:

$M_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ ,  $M_3(x_3; y_3; z_3)$ , которые не лежат на одной

прямой, можно составить по формуле:



$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Составим уравнение плоскости  $ABC_1$ :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0x - 2y + 2z = 0, \vec{n}(0; -2; 2), |\vec{n}| = 2\sqrt{2}$$

синус угла  $\beta$  между прямой, направляющий вектор которой имеет

координаты  $\vec{m}(a_1; b_1; c_1)$  ( $\overline{AB_1}(2; 0; 1)$ ) и плоскостью, заданной

уравнением  $ax + by + cz + d = 0$  ( $0x - 2y + 2z = 0$ ) вычисляется по формуле:

$$\sin \beta = \cos \gamma = \left| \frac{a_1 a + b_1 b + c_1 c}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|,$$

$$\sin \Phi = \frac{0+0+2}{\sqrt{5} * 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{10}}{10}$

Приложение 2

### 3. Угол между плоскостями.

Угол между плоскостями равен углу между прямыми, содержащими нормали к этим плоскостям, то есть нам надо найти 2 нормальных вектора и посчитать их по формуле:

$$\cos \beta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Практика.

Нахождение угла между двумя плоскостями (задача взята из ЕГЭ по математике 2012 года, основная волна (июнь - Восток));

В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 5. На ребре  $AA_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $AE : EA_1 = 3 : 2$ . Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $BED_1$ .

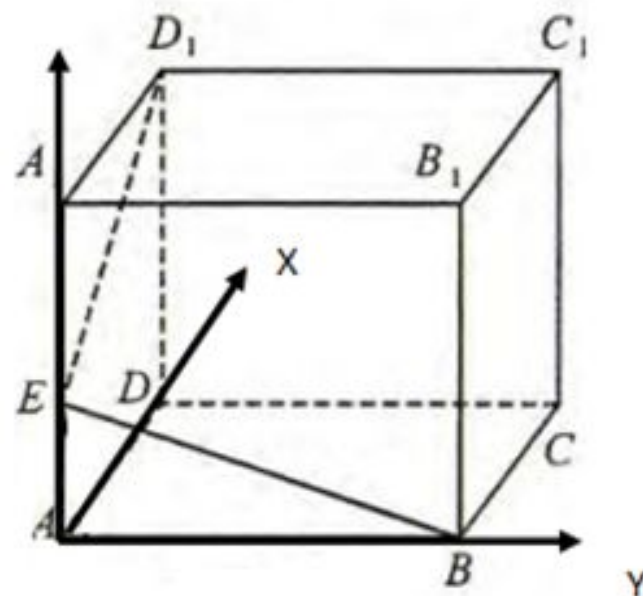
Введём систему координат:

$A(0;0;0) B(2;0;0) C(2;2;0)$  - координаты точек плоскости  $ABC$

$B(2;0;0) E(0;0;3) D_1(2;0;5)$  - координаты точек плоскости  $BED_1$

**Уравнение плоскости**, проходящей через три различные

точки  $M_0(x_0; y_0; z_0), M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2)$ , которые не лежат на одной прямой, можно составить по



матричной формуле:  $\longrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0 \\ z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Составим уравнение плоскости ABC:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Из него мы получим уравнение плоскости ABC

$$0X - 0Y - 4Z = 0$$

Коэффициенты (0;0;-4) и есть координаты нормального вектора:

$$\vec{n} (0;0;-4), |\vec{n}|=4$$

Составим уравнение плоскости  $EBD_1$ :

$$\begin{vmatrix} x & y & z - 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (z-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4X + 6Y - 4Z + 12 = 0$$

$$\vec{n}_2 (4;6;-4), |\vec{n}_2| = \sqrt{68}$$

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Находим угол по формуле:  $\longrightarrow$

$$\cos \varphi = \frac{16}{\sqrt{16 \cdot 68}} = \frac{4}{\sqrt{68}} = \frac{2\sqrt{17}}{17}$$

**Ответ:**  $\frac{2\sqrt{17}}{17}$

## 4. Расстояние от точки до плоскости

Основная формула[7]  $\longrightarrow$   $d = \frac{|A * x_1 + B * y_1 + C * z_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Необходимо найти:

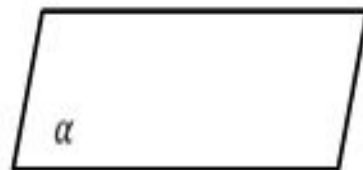
$A(x_1; y_1; z_1)$



1. Координаты точки  $A(x_1; y_1; z_1)$ . 2. Уравнение плоскости

$Ax + By + Cz + D = 0$ . 3. Подставить в формулу и решить

Практика:



Задача (2013 года, основная волна, резервный день)

Радиус основания конуса равен 8, а его высота равна 15. плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 14. найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения?

**Решение:**

Зная формулу: [4]

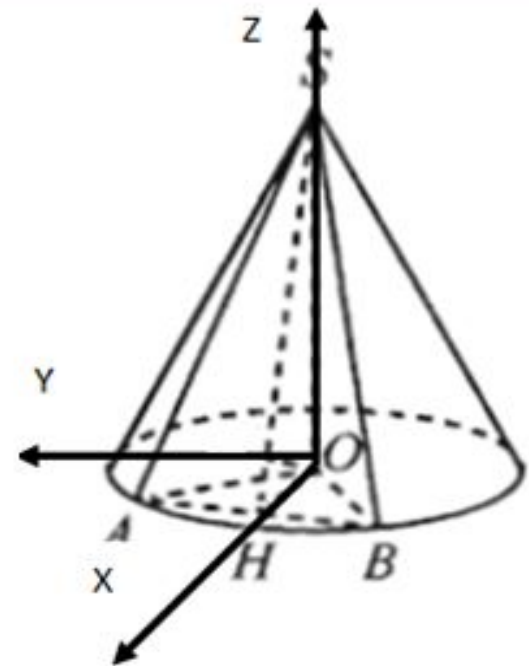
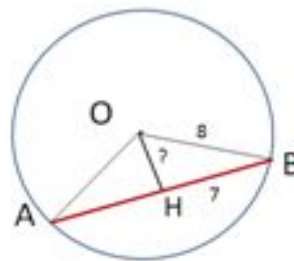
$$d = \frac{|A * x_1 + B * y_1 + C * z_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- 1) Введем систему координат с началом в точке  $O$ , по стороне  $OH$  пустим ось  $X$ , по стороне  $OS$  пустим ось  $Z$ , перпендикулярно  $OH$  пустим ось  $Y$ .

- 2) Найдем координаты необходимых точек:

$$O (0; 0; 0)$$

$$A (\sqrt{15}; 0; 0) S (0; 0; 15) H (\sqrt{15}; 7; 0)$$



координаты точек плоскости  $ASH$

- 3) Найдем уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - \sqrt{15} & y & z \\ -\sqrt{15} & 0 & 15 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = (x - \sqrt{15}) * \begin{vmatrix} 0 & 15 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} - y * \begin{vmatrix} \sqrt{15} & 15 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + z * \begin{vmatrix} \sqrt{15} & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -105x - 0y - 7\sqrt{15}z + 105\sqrt{15} = 0, \quad \vec{n} (-105; 0; -7\sqrt{15})$$

Подставим в формулу

нахождения

расстояния:

$$d = \frac{0+0+0+105\sqrt{15}}{\sqrt{105*105+0+49*15}} = \frac{105\sqrt{15}}{28\sqrt{15}} = \frac{15}{4}$$

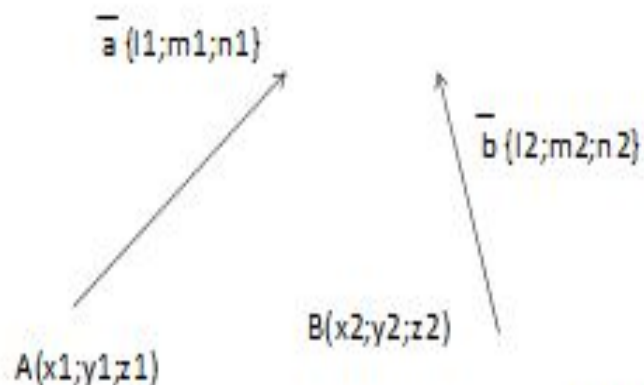
Ответ:  $\frac{15}{4}$

Приложение 4



## 5. Расстояние между двумя прямыми

Основная формула[7]



$$d = \frac{\text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}$$

Необходимо найти:

1. Координаты точки В и А.
2. Координаты вектора а и б.
3. Подставить в формулу



## Практика:

В правильной четырехугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABCD$  все ребра равны 1, точка  $M$  делит сторону  $AB$  пополам, а точка  $K$  принадлежит стороне  $BC$  и делит её на сторону в отношении 2:1 от вершины  $B$ . Найти расстояние между прямыми  $MK$  и  $SD$ .

Решение:

Зная формулу [7]

$$d = \frac{\text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}$$

1) введем систему координат с началом в точке  $B$ :

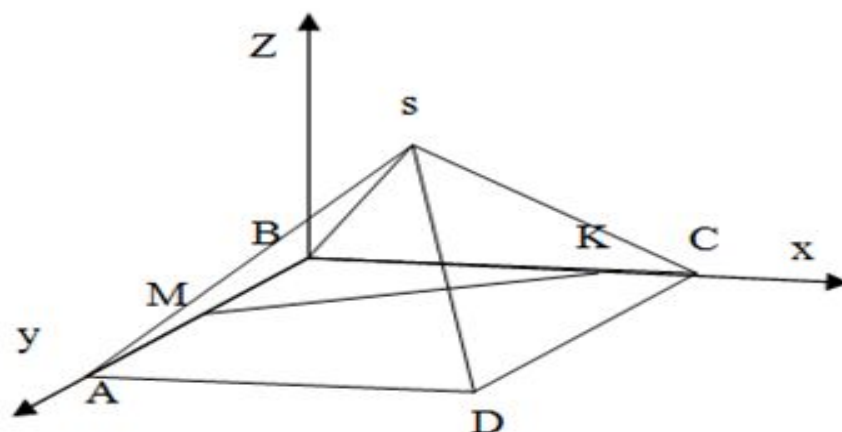
$$M (0; 0.5; 0), \quad K \left(\frac{2}{3}; 0; 0\right)$$

$$D (1; 1; 0), \quad S \left(0.5; 0.5; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

3) Подставляем в формулу нахождения расстояния:

$$\text{mod} \begin{vmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ \frac{2}{3} & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}$$

$$\sqrt{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0.5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}^2} = \frac{5\sqrt{22}}{33}$$



2) найдем координаты векторов  $MK$  и  $SD$

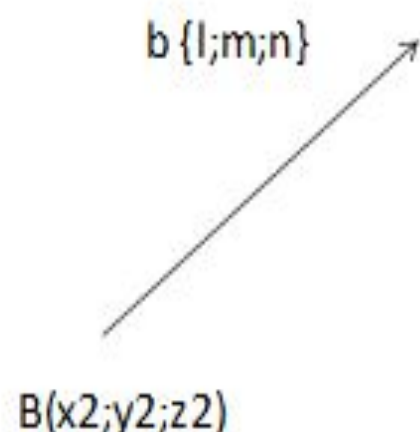
$$\text{Вектор } MK \left\{ \frac{2}{3}; -0.5; 0 \right\}$$

$$\text{Вектор } SD \left\{ 0.5; 0.5; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

Ответ:  $\frac{5\sqrt{22}}{33}$

## 6. Расстояние от точки до прямой

Основная формула:



$$d = \frac{\sqrt{\left| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ l & m \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m & n \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ l & n \end{matrix} \right|^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$A(x_1; y_1; z_1)$  ●

Необходимо найти:

1. Координаты точки  $A(x_1; y_1; z_1)$
2. Координаты вектора  $b \{l; m; n\}$
3. Координаты точки  $B$  (начальная точка вектора  $b$ )  $(x_2; y_2; z_2)$

## Практика.

в правильной шестиугольной призме со стороной основания 4 и боковым ребром 1. Найти расстояние от точки В до прямой F1E1

Основная формула

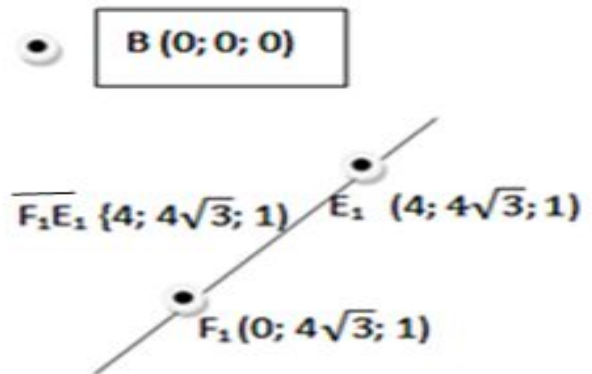
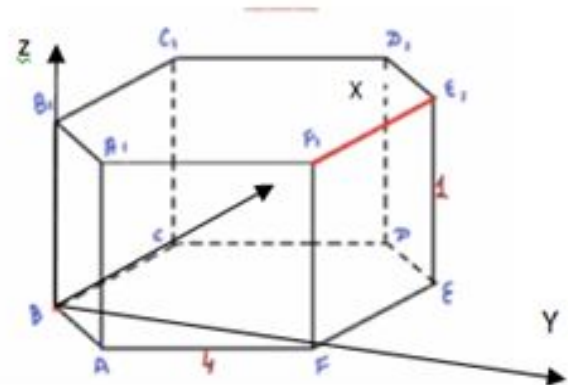
$$d = \frac{\sqrt{\left| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ l & m \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m & n \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ l & n \end{matrix} \right|^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Решение:

- 1) введем систему координат в пространстве с началом в точке В.
- 2) найдем координаты точек В; F1; E1  
В (0; 0; 0), F1 (0; 4√3; 1), E1 (4; 4√3; 1)
- 3) Найдем координаты вектора F1E1  
 $\overline{F_1E_1} \{4; 0; 0\}$
- 4) Подставляем в формулу нахождения расстояния

$$d = \frac{\sqrt{\left| \begin{matrix} 0 & 4\sqrt{3} \\ 4 & 0 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} 4\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{matrix} \right|^2}}{4} = \frac{\sqrt{784}}{4} = 7$$

Ответ: 7



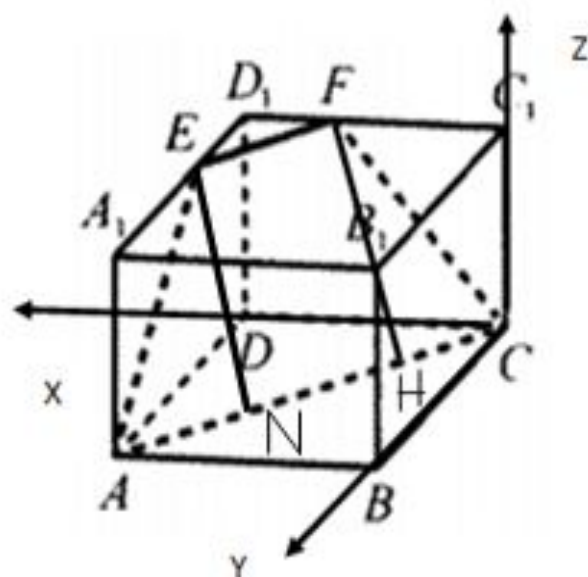
## 7. Площадь сечения.

К сожалению, не все задачи можно решить на площадь сечения и объемов, но все же некоторые можно.

### Основная волна (Июнь-Сибирь 2013 год)

В правильной четырехугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона основания равна 6, а боковое ребро  $AA_1 = 1$ . Точка  $F$  принадлежит ребру  $C_1 D_1$  и делит его в отношении 2:1, считая от вершины  $C_1$ . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки  $A, C$  и  $F$ .

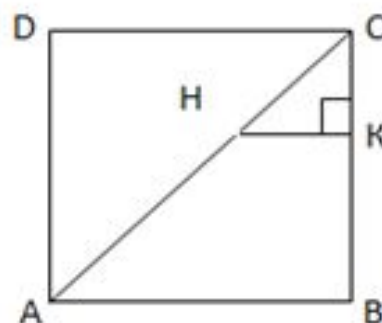
На стороне  $A_1 D_1$  поставит точку  $E$  так, чтобы сторона  $EF$  была параллельна  $AD$ , тогда  $A_1 E = FC_1$ , а  $ED_1 = D_1 F$  по теореме Фалеса, следовательно эта трапеция равнобедренная. Проведем высоты  $EN$  и  $FH$ , которые  $= 2\sqrt{2}$  по теореме Пифагора из треугольника  $ED_1 F$ , где стороны  $ED_1 = D_1 F = 2$  т.к. точка  $F$  принадлежит ребру  $C_1 D_1$  и делит его в отношении



2:1.  $AC=6\sqrt{2}$ , по теореме Пифагора из треугольника ABC.  $AN=FN$ , т.к. трапеция равнобедренная,  $EN=FN$ , т.к. это перпендикуляры опущенные на параллельную прямую, отсюда

$$X + X + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}, \quad 2X = 4\sqrt{2}, \quad X = 2\sqrt{2}$$

Рассмотрим квадрат ABCD. Опустим перпендикуляр к стороне CB, диагональ делит угол C пополам равным по 45, угол SKH=90, следовательно угол KHC=45, следовательно треугольник KCH равнобедренный, по теореме Пифагора можем найти два катета, которые равны 2. Теперь мы смело можем водить систему координат.



Введем систему координат с началом в точке C:

$$F(4;0;1), \quad E(6;2;1), \quad H(2;2;0), \quad A(6;6;0), \quad C(0;0;0)$$

$$\overline{HF}(2;-2;1), \quad \overline{EF}(-2;-2;0), \quad \overline{AC}(-6;-6;0)$$

$$|\overline{HF}| = 3, \quad |\overline{EF}| = 2\sqrt{2}, \quad |\overline{AC}| = 6\sqrt{2}$$

Теперь подставляем в формулу

площади трапеции: [5]



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

a, b - основания  
h - высота

$$1) \quad S = \frac{(2\sqrt{2} + 6\sqrt{2})}{2} \cdot 3 = 12\sqrt{2}$$

$$2) \quad \text{Ответ: } 12\sqrt{2}$$

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Л.С. Атанасян и др., Геометрия 10-11/-Москва: Просвещение, 2009г.
2. Ф.Ф. Лысенко и др., Математика, подготовка к еге 2013/-Ростов-на-Дону: Легион, 2012г.
3. Вектора, определитель матрицы 2-3 порядка/-<http://ru.wikipedia.org>
4. Ларин А.А, задачи С<sub>2</sub> 2012-2013 года/- <http://alexlarin.net>
5. Малкова А. Г., формулы скалярного произведения, и площадей/-  
<http://dvd.ege-study.ru>
6. Фельдман И.В., формула угла между плоскостями/-<http://ege-ok.ru>
7. Спивак Ю.Е. формулы расстояния/-<http://youtube.com>