Занятие 1. Тема. Элементарные функции и их применение в биологии и медицине. Производная функции. Интеграл неопределенный, определенный

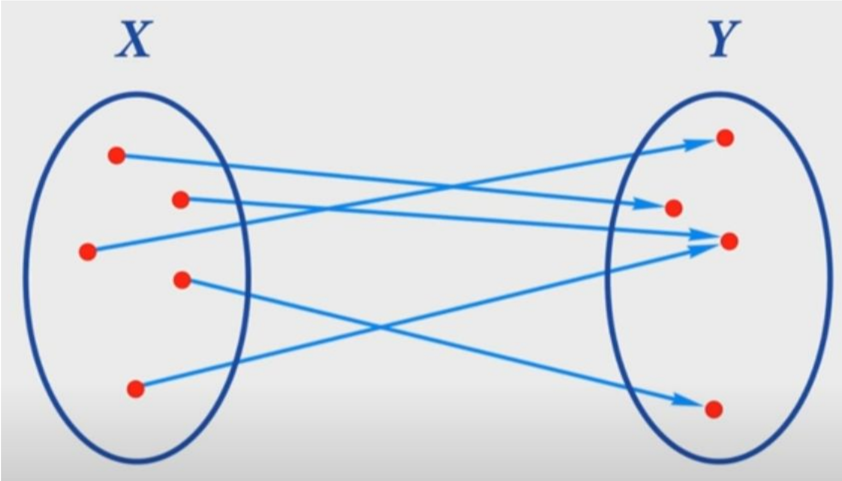
1. Определение и свойства функций
2. Исследование функций. Асимптоты, четность, периодичность.
3. Графический анализ и методы построения функций.
4. Аппроксимация медицинских (антропометрических) данных функциями.
5. Дифференцирование. Дифференцирование сложной функции.
6. Интегрирование: неопределенный и определенный интегралы. Интегрирование путем замены переменной.

Коплак О.В.

2022 г

Определение и свойства функций

Если каждому значению x из некоторого множества чисел поставлено в соответствие число y, то говорят, что на этом множестве задана **функция** y(x).



$$y = f(x)$$

x -независимая переменная или **аргумент**,
y – зависимой переменной или **значение функции**

Множество x – область изменения аргумента (**область определения** функции) **D(y)**
Множество y – область изменения функции (**область значений** функции) **E(y)**

Способы задания функций

1. Аналитический. (Задание функции с помощью формул)

Например: $y = \sin x$.

$$y = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ при } x < 2 \\ x - 4 \text{ при } x \geq 2 \end{cases}$$

2. Табличный. (Задание таблиц)

Пример: тригонометрические таблицы, таблицы логарифмов

3. Графический.

Пример : кардиограмма, осциллограмма

Свойства функций

1. Возрастание (убывание) функций
2. Нули функции
3. Четность функции
4. Периодичность функции
5. Ограниченность функции
6. Сложная и обратная функции

Монотонность

Функцию **$y = f(x)$** называют **возрастающей** на множестве **X**, если для любых двух элементов из этого множества, таких, что **$x1 < x2$** , выполняется условие **$f(x1) < f(x2)$.**

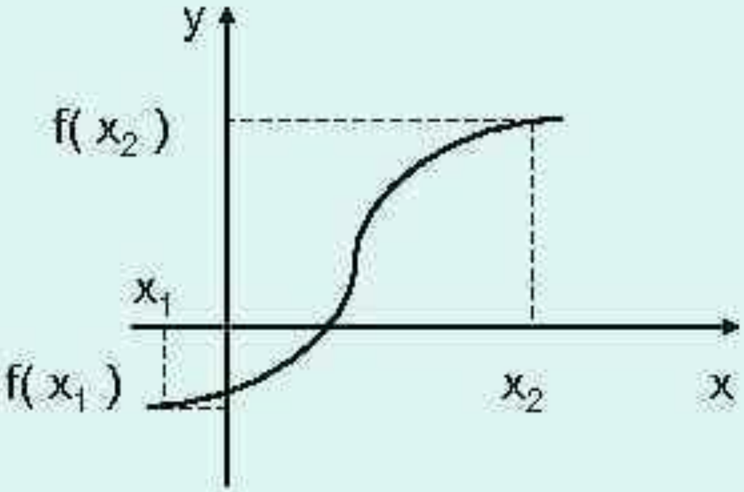
*Функцию называют возрастающей, если большему значению аргумента соответствует **большее** значение функции*

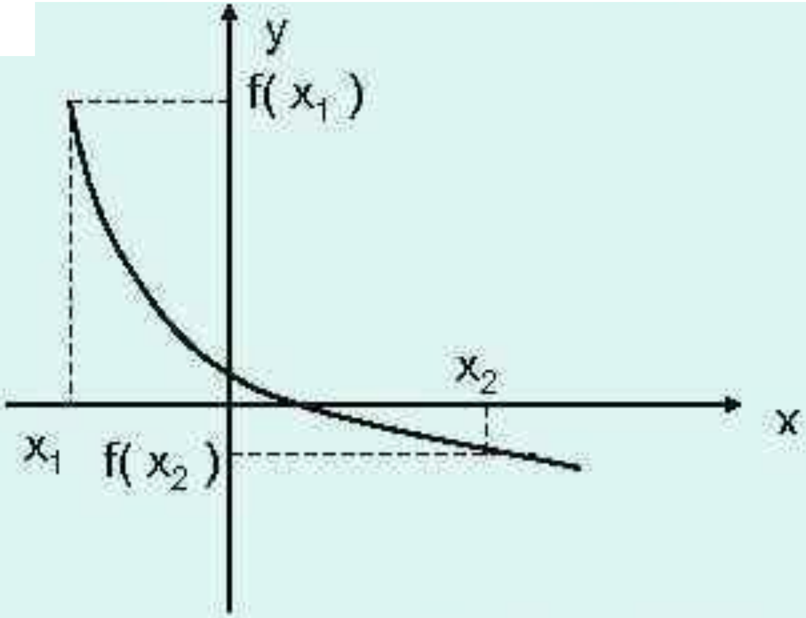
Функцию **$y = f(x)$** называют **убывающей** на множестве **X**, если для любых двух элементов из этого множества, таких, что **$x1 < x2$** , выполняется условие **$f(x1) > f(x2)$.**

Функцию называют убывающей, если большему значению аргумента соответствует ***меньшее*** значение функции

Монотонность

Где возрастающая и где убывающая функция?





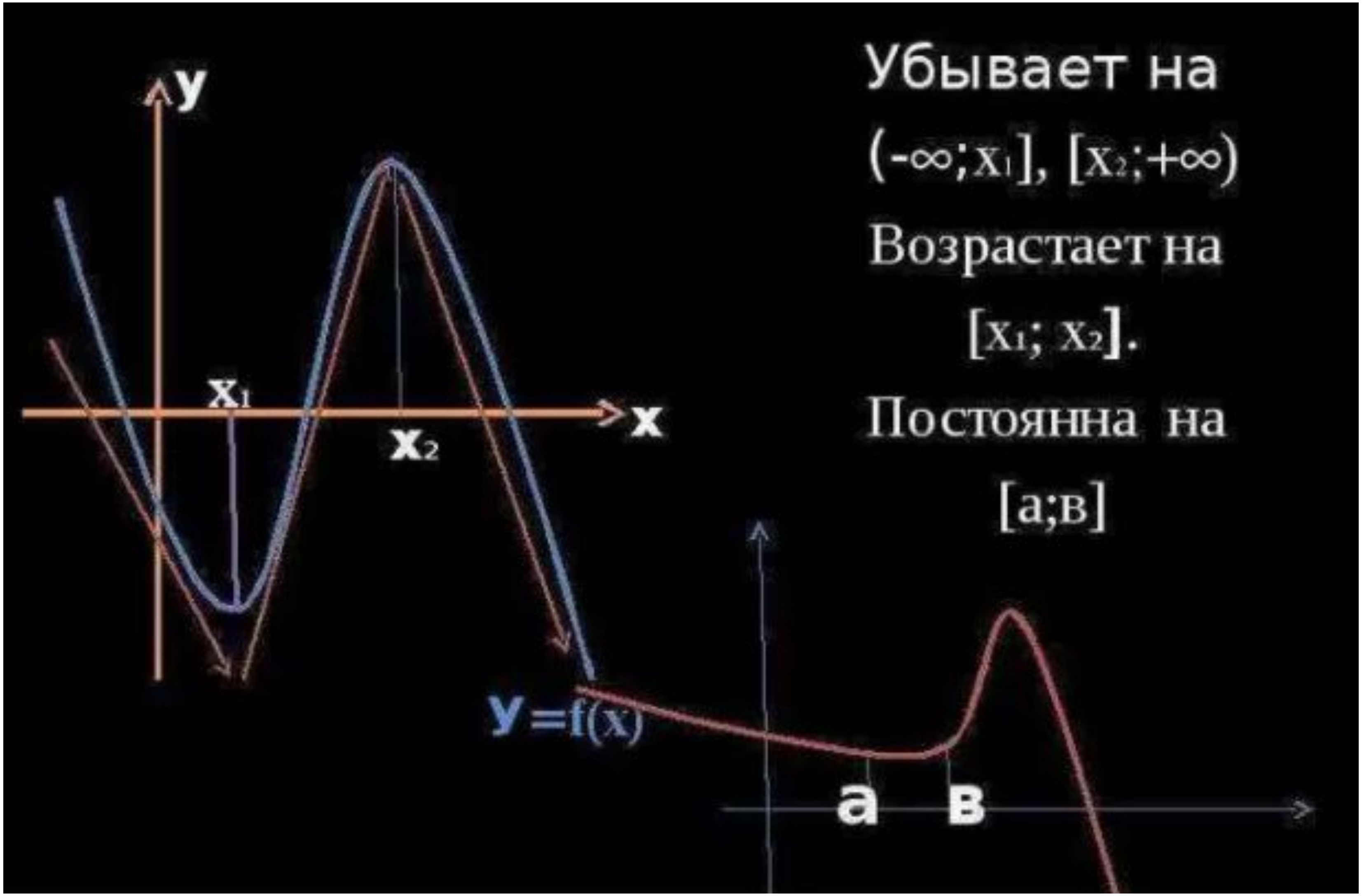
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$(x_1; x_2)$ - ***интервал монотонности*** функции

Функцию $y = f(x)$ заданную на интервале $(x_1; x_2)$ называют ***строго монотонной***

Монотонной называется функция, постоянно убывающая или возрастающая **на заданном промежутке**. Если она постоянно убывает или возрастает, то считается **строго** монотонной.



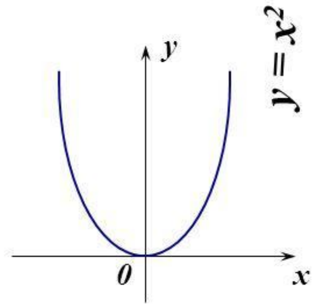
Четность функции

Пример

- *Функция f(x)* ***четная****, если* $\forall x \in X$ *справедливо равенство* $\boxed{f(-x) = f(x)}$
- *График четной функции симметричен относительно оси OY.*

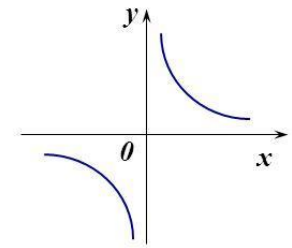
$$f(x) = x^2$$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$



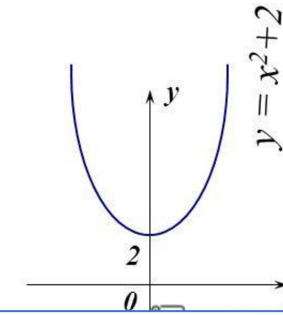
$$f(x) = \frac{1}{x}$$ - нечетная, т.к.

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$



$$f(x) = x^2 + 2$$ - четная, т.к.

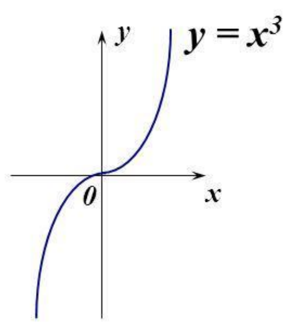
$$f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$$

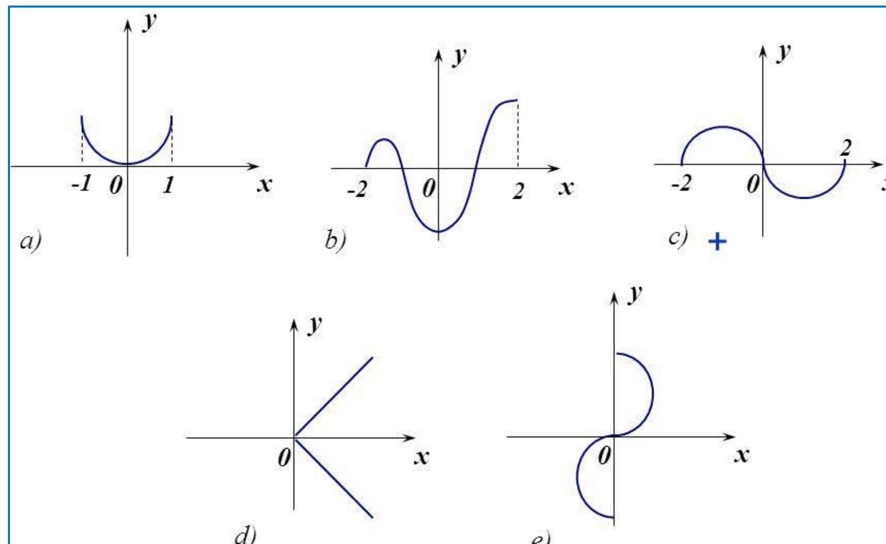


- *Функция f(x)* ***нечетная****, если* $\forall x \in X$ *справедливо равенство* $\boxed{f(-x) = -f(x)}$
- *График нечетной функции симметричен относительно начало координат (0;0)*

$$f(x) = x^3$$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$





Периодичность

Функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$ (называемое периодом), что в каждой точке области определения функции $f(x)$ выполняется условие $\boxed{f(x+T)=f(x)}$

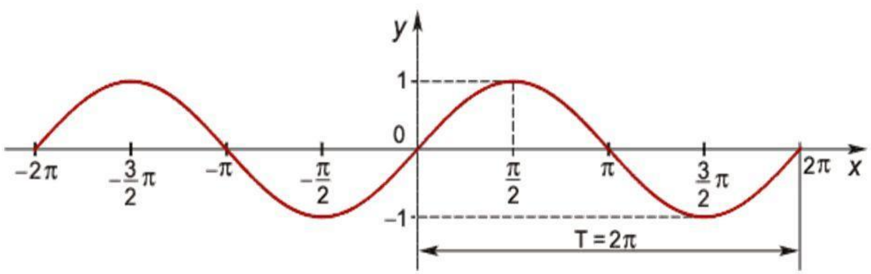
Например: $y=sinx$ и $y=tanx$ - периодические

$$T_{\sin x} = 2\pi \qquad \sin(x+2\pi) = \sin x$$

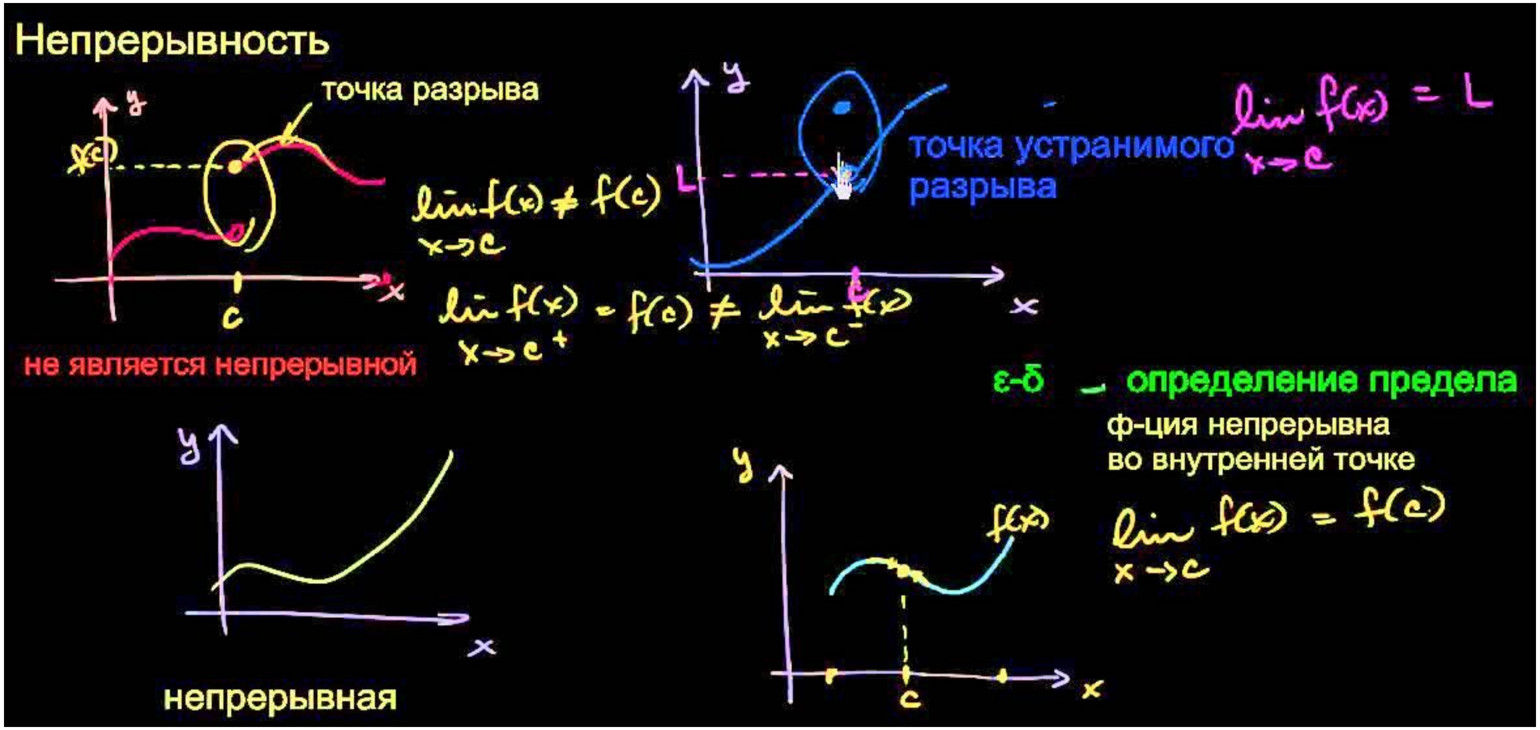
$$T_{\tan x} = \pi \qquad \tan(x+\pi) = \tan x$$

y = sin x

- *График функции – **синусоида***
- *sin (-x) = - sin (x)*
- *sin (x+2πk) = sin x*



Непрерывность



Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке a**, если:

1) функция $f(x)$ определена в точке a,

2) имеет конечный предел при $x \to a$,

3) этот предел равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Элементарные функции

1. Целая и дробная рациональные функции

$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots a_{n-1}x + a_n$

дробная рациональная функция

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots a_{n-1}x + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots b_{n-1}x + b_n}$$

2. Степенная функция $y = x^\alpha$ $\alpha \in R$

3. Показательная функция $y = a^x$ $a > 0,\ a \neq 1$

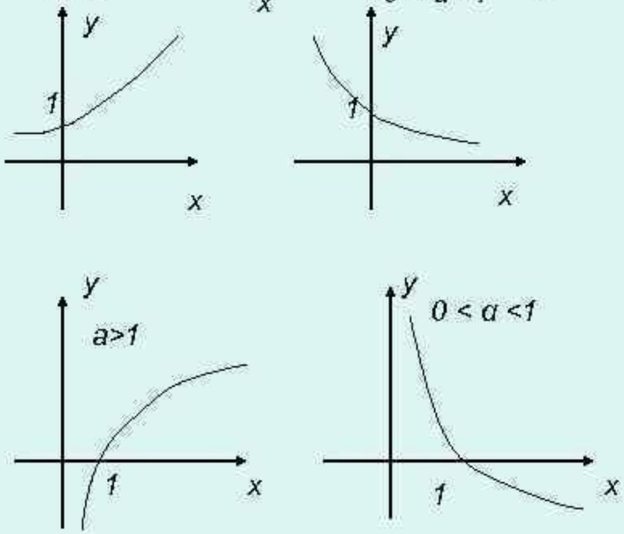
4. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $a > 0,\ a \neq 1$

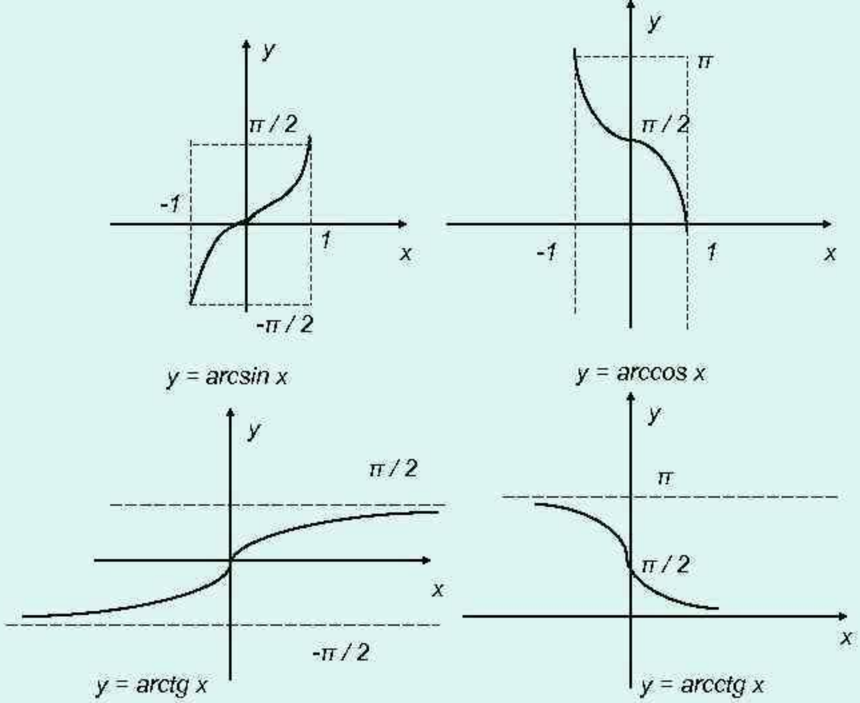
5. Тригонометрические функции $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \mathrm{tg} x$; $y = \mathrm{ctg}\, x$

6. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \mathrm{arctg} x$; $y = \mathrm{arcctg}\, x$

Показательная функция

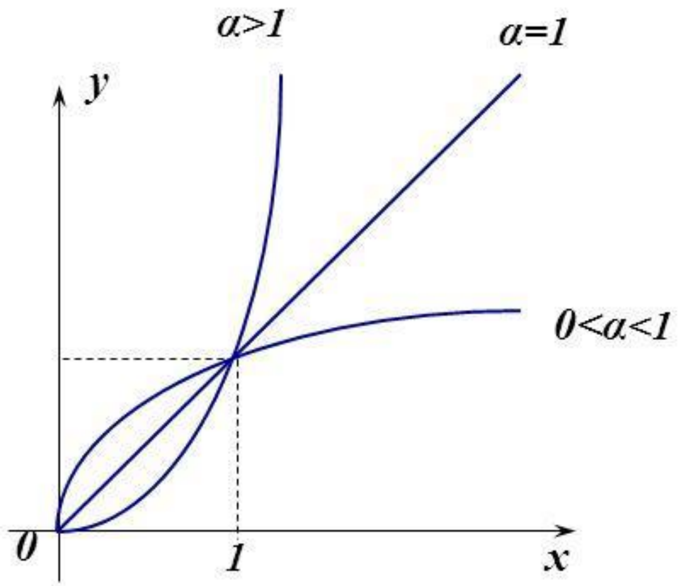
Логарифмическая функция

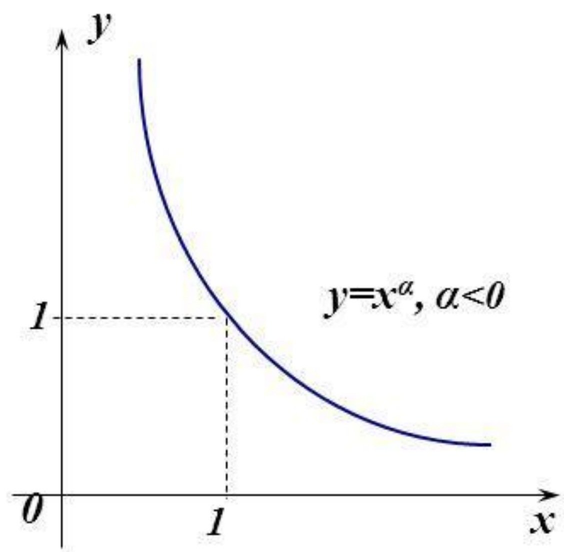




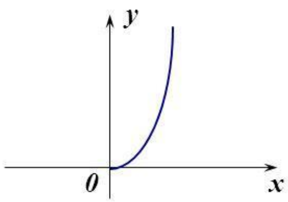
- $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$

Степенная функция

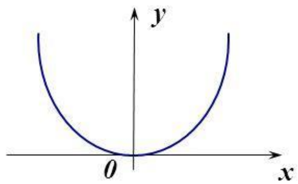




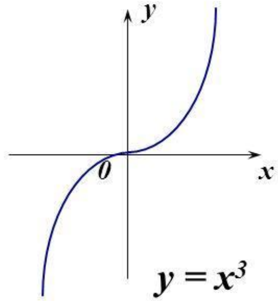
$\alpha > 1$



$y = x^{3/2}$

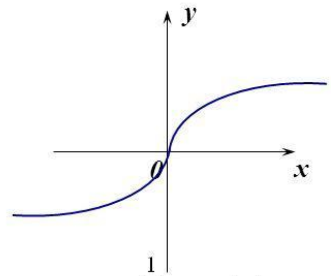


$y = x^2$

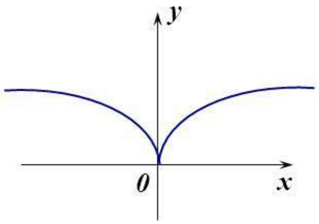


$y = x^3$

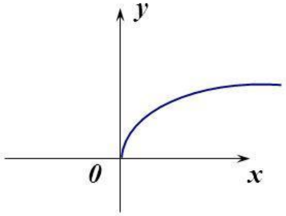
$0 < \alpha < 1$



$y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$



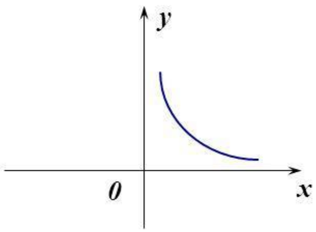
$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$



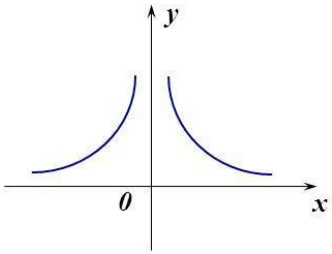
$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

Степенная функция

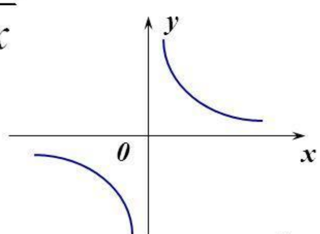
$\alpha < 0$



$y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

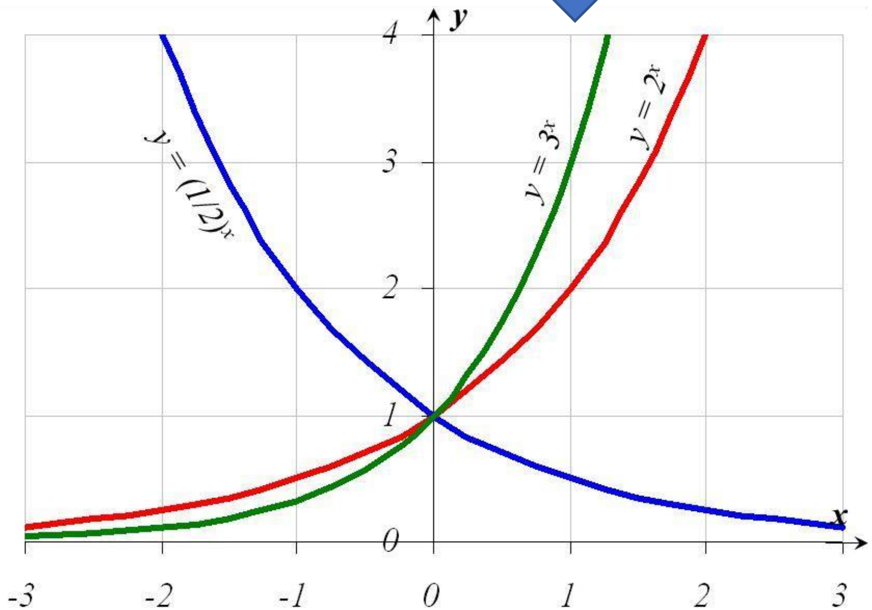


$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

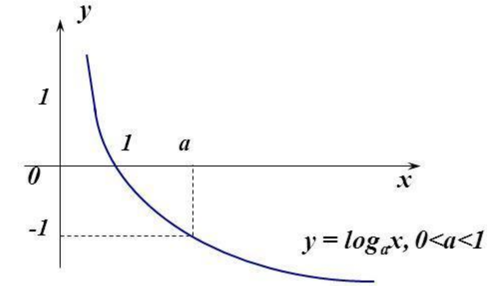


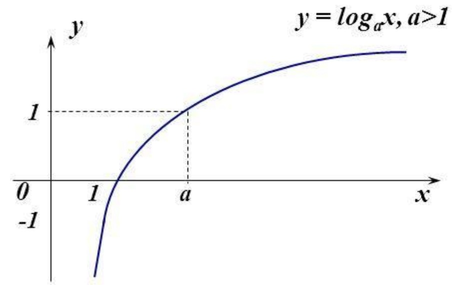
$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$

Показательная и логарифмическая функции

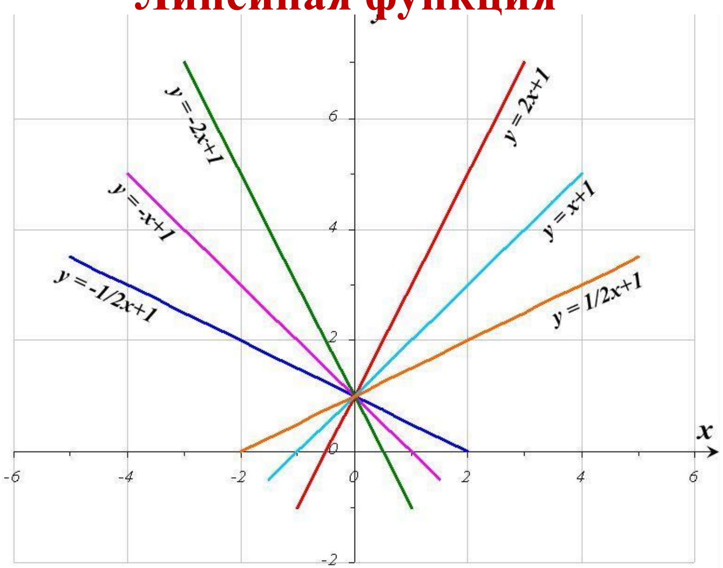


- $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$





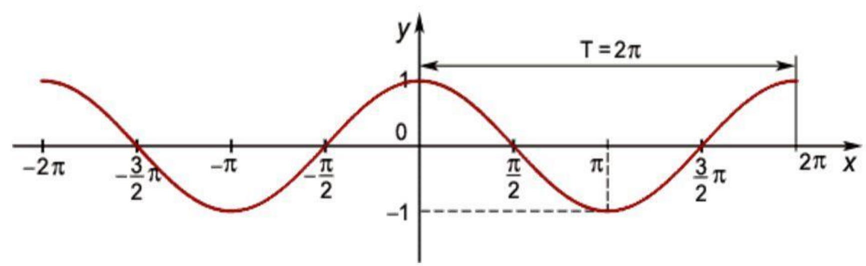
Линейная функция



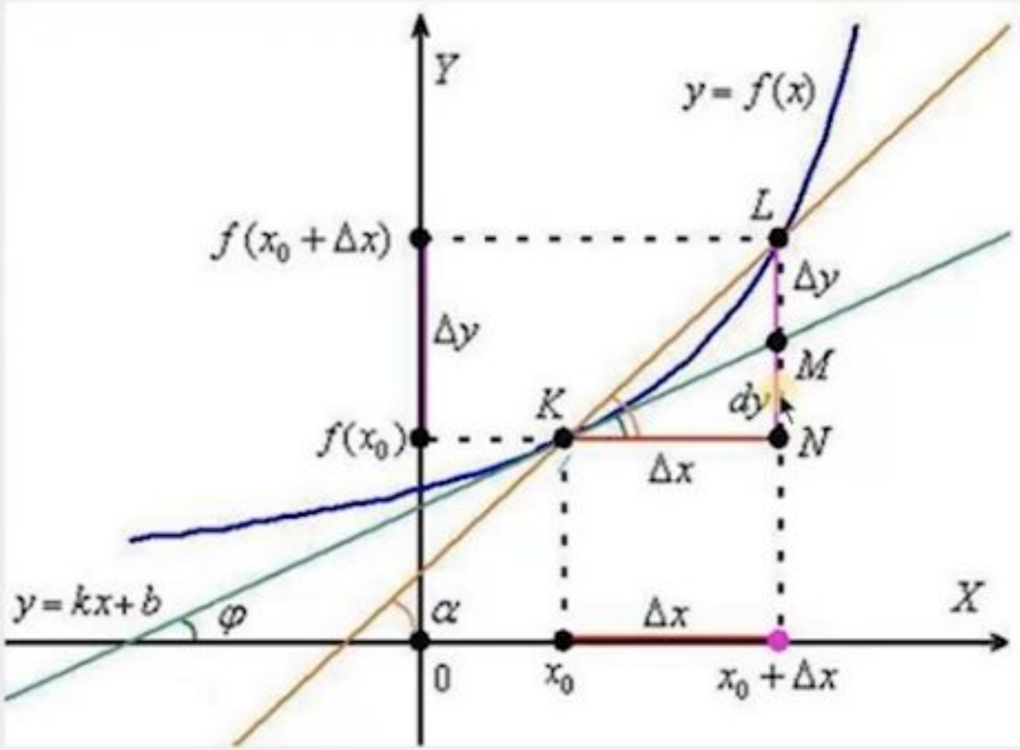
Тригонометрическая функция

$y = \cos x$

- *График функции - **косинусоида***
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$



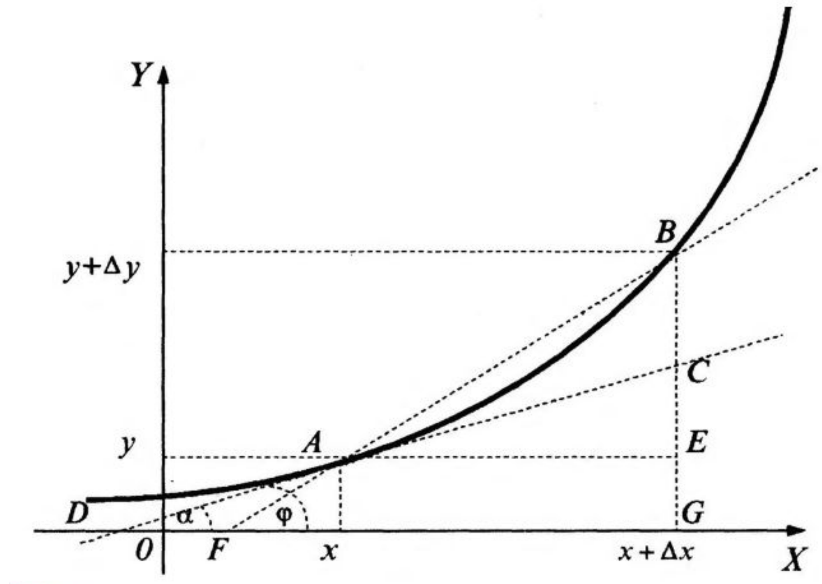
1. Производная функции



$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = tg\varphi$$

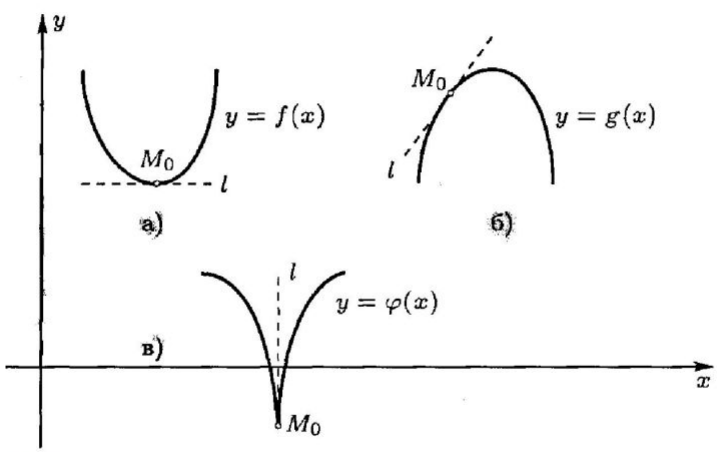
Геометрический смысл производной

Производная функции **y = f(x)** геометрически представляет собой угловой коэффициент касательной к графику этой функции в точке с абсциссой **x** (тангенс угла наклона касательной к оси **0X**



Если существует касательная, то существует и **производная**, и наоборот.

Случаю касательной, не параллельной оси OY, отвечает конечная производная, параллельной оси OY – бесконечная производная



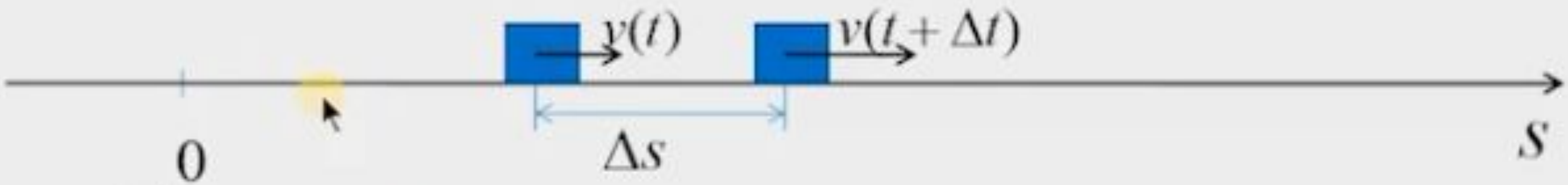
Физический смысл производной

Физический смысл - производная функции отражает скорость изменения функции при изменении ее аргумента.

Например, если **x = f(t)** есть уравнение прямолинейного движения точки, то производная **dx/dt** представляет собой мгновенную скорость точки в момент времени **t**

Скорость (быстрота) протекания физических, химических, биологических процессов, например скорость охлаждения тела, скорость химической реакции и т.п., также выражается при помощи производной.
Например, скорость охлаждения тела равна производной температуры тела по времени: **dT/dt**
Скорость химической реакции есть производная массы образующегося вещества по времени: **dm/dt**

Физический смысл производной



$s = s(t)$ – зависимость перемещения от времени

Средняя скорость $v_{сред} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

Мгновенная скорость $v_{мгнов} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$

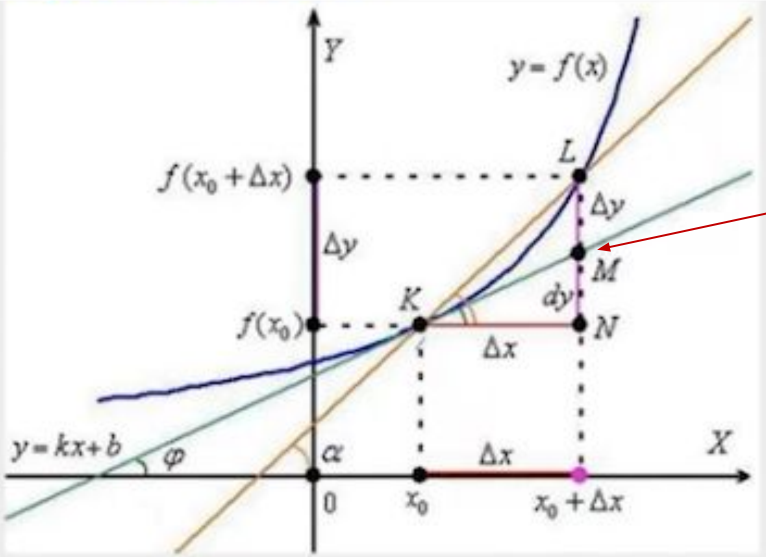
Для произвольной функции $y = f(x)$:

производная $f'(x)$ – мгновенная

скорость изменения функции

при изменении аргумента x

Дифференциал функции: определение, геометрический смысл



Дифференциал функции

Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначается $dy = f'(x)\cdot\Delta x$

Геометрический смысл дифференциала:

ΔKMN : $dy = KN \cdot tg\varphi = MN$

Для функции $y = x$ дифференциал $dy = dx = (x)'\Delta x = \Delta x$

Дифференциал аргумента dx равен приращению Δx аргумента : $dx = \Delta x$

$$dy = f'(x)dx \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Дифференциал функции: определение, геометрический смысл

Дифференциалом функции называется произведение производной этой функции на приращение ее аргумента

$$\boxed{\mathbf{dy = y`(x)\ \Delta x}}$$

Дифференциал функции существует лишь для дифференцируемых функций, то есть функций, имеющих производную. Дифференциал функции прямо пропорционален приращению аргумента Δх (линеен относительно приращения аргумента функции

Формулу дифференциала функции можно записать в виде:

$$\boxed{\mathbf{dy = y'dy}}$$

а формулу производной – в виде

$$\boxed{\mathbf{y'} = \frac{dy}{dx}}$$

Производная функции равна отношению дифференциала функции к дифференциалу ее аргумента

Производные элементарных функций

1. $c' = 0,\ c = \text{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$
17. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$
18. $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
19. $(\mathrm{th}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

Производные и дифференцирование

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(c \cdot u(x)\right)' = c \cdot u'(x)$$

$$\left(uvw\right)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

Вычисления производных

$$а)\ f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = (x^2 - \frac{1}{x})' = (x^2)' - (\frac{1}{x})' =$$

$$= 2x - (-\frac{1}{x^2}) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

$$б)\ f(x) = x^2 \cdot (2x-7)$$

$$f'(x) = (x^2)' \cdot (2x-7) + (x^2) \cdot (2x-7)' =$$

$$= 2x \cdot (2x-7) + x^2 \cdot 2 = 4x^2 - 14x + 2x^2 =$$

$$= 6x^2 - 14x$$

$$в)\ f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2)' \cdot (x^3-1) - x^2 \cdot (x^3-1)'}{(x^3-1)^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot (x^3-1) - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{2x^4 - 2x - 3x^4}{(x^3-1)^2} =$$

$$= \frac{-x^4 - 2x}{(x^3-1)^2}$$

$$г)\ f(x) = x^{-5}$$

$$f'(x) = (x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6}$$

Вычисления производных

$$а)\ f(x) = \frac{1+2x}{3-5x}$$

$$f'(x) = \frac{(1+2x)'(3-5x)-(1+2x)(3-5x)'}{(3-5x)^2} =$$

$$= \frac{2(3-5x)-(1+2x)(-5)}{(3-5x)^2} =$$

$$= \frac{6-10x+5+10x}{(3-5x)^2} = \frac{11}{(3-5x)^2}$$

$$б)\ f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(2x-1)-x^2(2x-1)'}{(2x-1)^2} =$$

$$= \frac{2x(2x-1)-x^2\cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2-2x-2x^2}{(2x-1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2}$$

1. Продифференцировать функцию: $\boxed{y = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 3}$

$$y' = \left(2x^3 - 4x^2 + 5x - 3\right)' = \left(2x^3\right)' - \left(4x^2\right)' + \left(5x\right)' - 3' =$$

$$= 2\cdot\left(x^3\right)' - 4\cdot\left(x^2\right)' + 5\cdot x' - 0 = 2\cdot 3x^2 - 4\cdot 2x + 5\cdot 1 =$$

$$= 6x^2 - 8x + 5$$

$\boxed{\mathbf{y = (2x+3)\ sin\ x}}$

$$y' = \left[(2x+3)\cdot\sin x\right]' = (2x+3)'\sin x + (2x+3)\cdot(\sin x)' =$$

$$= \left[(2x)' + 3'\right]\cdot\sin x + (2x+3)\cdot\cos x = (2+0)\cdot\sin x + (2x+3)\cdot\cos x =$$

$$= 2\sin x + (2x+3)\cdot\cos x$$

$$\boxed{y=\frac{x^3}{\cos x}}$$

$$y'=\left(\frac{x^3}{\cos x}\right)'=\frac{\left(x^3\right)'\cos x+x^3\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2}=$$

$$=\frac{3x^2\cos x+x^3(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{x^2(3\cos x-x\cdot\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{y=\frac{\tan x}{7}}$$

$$y'=\left(\frac{\tan x}{7}\right)'=\left(\frac{1}{7}\cdot\tan x\right)'=\frac{1}{7}\cdot(\tan x)'=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{7\cos^2 x}$$

$$\boxed{y=\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}}$$

$$y=\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}=4\cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

$$y'=\left(4\cdot x^{-\frac{2}{3}}\right)'=4\cdot\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'=4\cdot\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}\right)=-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}=$$

$$=-\frac{8}{3\cdot\sqrt[3]{x^5}}=-\frac{8}{3x\cdot\sqrt[5]{x^2}}$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
x^n	nx^{n-1}	$f^n(x)$	$n\cdot f^{n-1}(x)\cdot f'(x)$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{f(x)}$	$-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin(f(x))$	$\cos(f(x))\cdot f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos(f(x))$	$-\sin(f(x))\cdot f'(x)$
tgx	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$tg(f(x))$	$\dfrac{1}{\cos^2(f(x))}\cdot f'(x)=\dfrac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$

Производная сложной функции

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
x^n	nx^{n-1}	$f^n(x)$	$n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$

Пример: 1) $\boxed{y = (2x-1)^4}$. $\begin{cases} y = f^4; \\ f = 2x-1. \end{cases}$

$$y' = \left((2x-1)^4\right)' = 4(2x-1)^3 \cdot (2x-1)' = 4(2x-1)^3 \cdot 2 = 8(2x-1)^3.$$

Производная сложной функции

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

Пример: 1) $\boxed{y = \frac{1}{\sin x}.}$ $\begin{cases} y = \frac{1}{f}; \\ f = \sin x. \end{cases}$

$$y' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}(\sin x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Производная сложной функции

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

Пример: 1) $y = \sqrt{2x^3 - x}.$ $\begin{cases} y = \sqrt{f}; \\ f = 2x^3 - x. \end{cases}$

$$y' = \sqrt{(2x^3 - x)^4}' = \frac{1}{2\sqrt{2x^3 - x}}(2x^3 - 1)' = \frac{6x^2}{2x\sqrt{2x^2 - 1}} = \frac{3x}{\sqrt{2x^2 - 1}}$$

Производная сложной функции

Простая функция	Производная простой функции	Сложная функция	Производная сложной функции
$\sin x$	$\cos x$	$\sin(f(x))$	$\cos(f(x))\cdot f'(x)$

Пример: 1) $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right).$ $\begin{cases} y=\sin f; \\ f=2x-\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

$$y'=\sin'\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)'=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right).$$

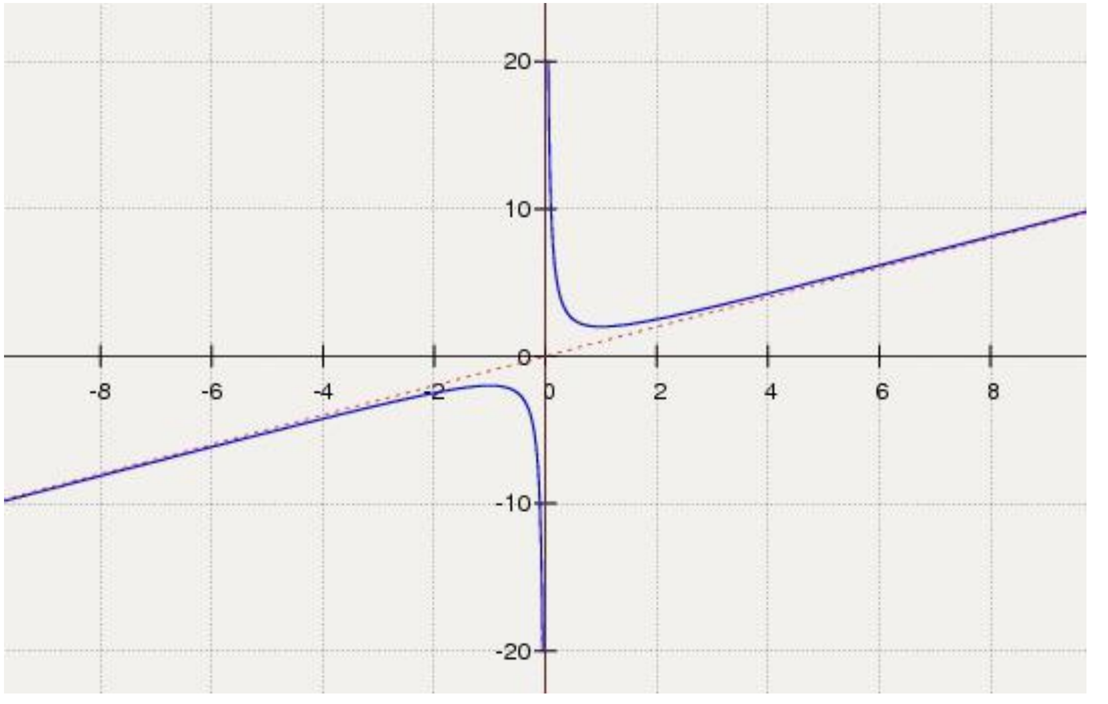
Исследовать функцию

1. **Найти область определения функции**
2. **Найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в этих точках**
3. **Выяснить, является ли функция четной, нечетной или периодической**
4. **Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции**
5. **Найти вертикальные и невертикальные асимптоты графика функции**
6. **Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции**
7. **Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости вверх и вниз**
8. **Построить график функции**

$y= (x^2+1)/x.$

Исследовать функцию и построить график

1. Область определения - $x \neq 0$ - деление на 0.
$x \in (-\infty,0] \cup [0,+\infty)$
2. Пересечение с осью X
$y(x) = 0$ - Корней нет - нет точек пересечения.
3. Пересечение с осью Y
$X \in \varnothing$
4. Поведение на бесконечности.
$Y(-\infty) = -\infty$
$Y(+\infty) = +\infty$
5. Наклонная асимптота
$Y = x.$
6. Исследование на четность.
$Y(-x) = - (x^2+1)/x$
$Y(x) = (x^2+1)/x$
Функция нечетная.
7. Производная функции
$Y' = 2 - (x2+1)/x^2$
8. Корни производной.
$Y' = 0.$ $x1 = -1$ и $x2 = 1$. - точки экстремумов.
9. Монотонность.
Возрастает - $X \in (-\infty, -1] \cup [1,+\infty)$
Максимум - $Ymax(-1) = -2$
Убывает- $X \in [-1,0] \cup [0,1]$
Минимум - $Ymin(1) = 2.$

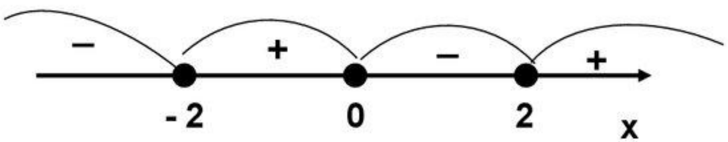


Исследовать функцию и построить график

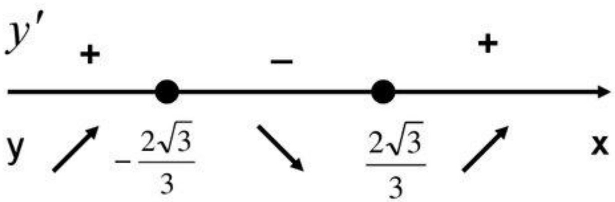
$$\boxed{y = x^3 - 4x}$$

1) Область определения функции: $x \in R$, функция нечетная.

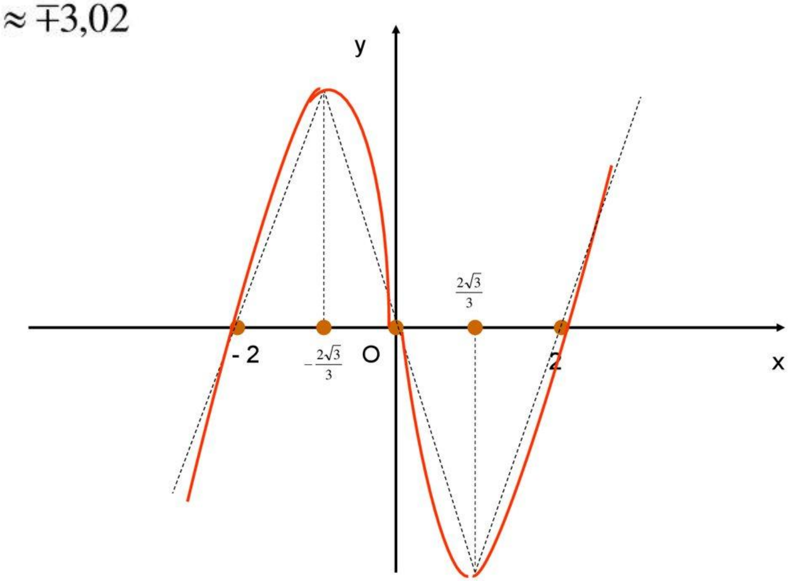
2) Нули функции: X = - 2; 0; 2.



3) Производная $y' = 3x^2 - 4, \quad y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \approx \pm 1{,}13$



$$y\left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \mp\frac{16\sqrt{3}}{9} \approx \mp 3{,}02$$



$$\boxed{y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11}$$

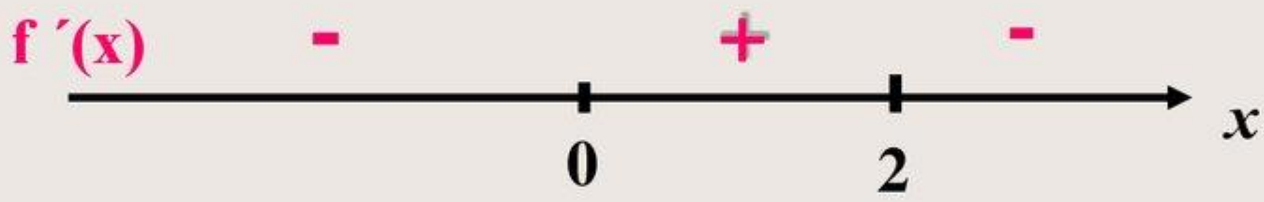
Решение. 1) $y' = 12x^3 - 48x^2 + 48x =$

$= 12x(x^2 - 4x + 4) = 12x(x - 2)^2$

2) $y' = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$ (стационарные точки)

3)

4)



5) Значит: $x = 0$ – **точка минимума,**

$x = 2$ - **точка максимума.**

$y = 2x^3+3x^2 -1$

Решение. D(y)= (-∞; +∞), четность не определена

Найдем стационарные точки:

т.к. $y' = 6x^2+6x = 6x(x+1)$ => $6x(x+1)=0$

тогда **x=0** и **x=-1** стационарные точки

Найдем точки экстремума:

т.к.

$$\begin{array}{lccccc} f'(x) & + & -1 & - & 0 & + \quad x \\ f(x) & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \end{array}$$

и **x=-1** – точка максимума

x= 0 – точка минимума

Найдем ещё некоторые точки (контрольные, дополнительные):

- т.к. **x=-1** – точка максимума, то $y_{max}=0$ => **(-1; 0)** -точка локального максимума
- т.к. **x= 0** – точка минимума, $y_{min}=-1$ => **(0;-1)** -точка локального минимума
- если x=1, то y=4 => **(1;4)**
- если x=-2, то y=-5 => **(-2;-5)**

Удобнее все эти данные заполнять в виде таблицы.

Найдем промежутки монотонности:

при **x ϵ (-∞; -1] и [0; + ∞) -** функция возрастает

при **x ϵ [-1; 0] -** функция убывает

Найдем точки пересечения графика с осями координат:

если x=0, то y=-1 => **(0;-1)**

если y=0, то x= -1 => **(-1; 0)**

Составим таблицу:

x	(-∞;-1)	-1	(-1;0)	0	(0;+∞)
f′(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↑	0 (-1;0) max	↓	-1 (0;-1) min	↑

Найдем f ′′(x).

$f''(x) = (6x(x+1))' = 12x+6 = 6(2x+1)$

$f''(x)=0$ => $6(2x+1)=0$ => $x = -0,5$ - точка перегиба

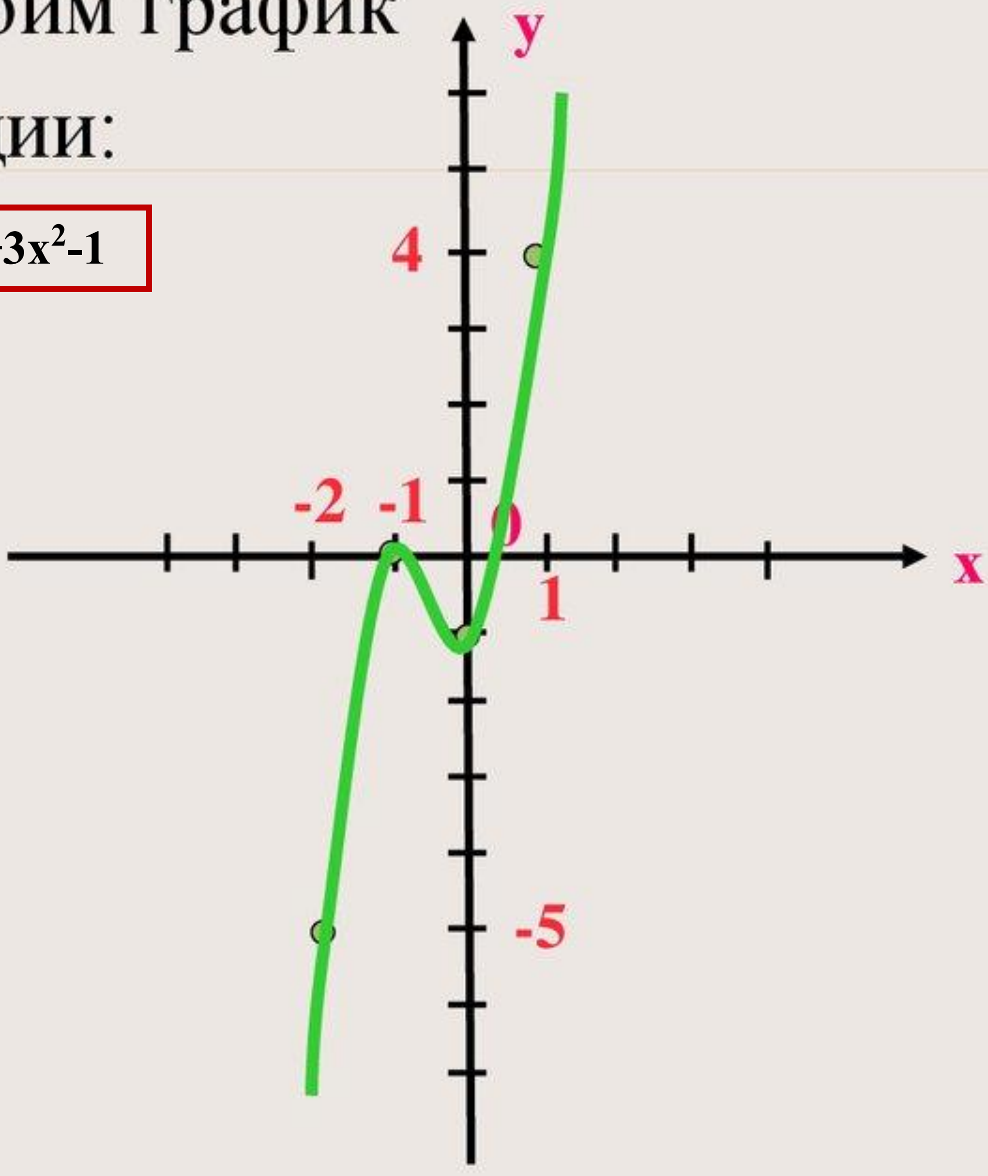
т.к. при x=-1(левее x=-0,5) $f''(x) <0$,

а при x=-0,1(правее x=-0,5) $f''(x) >0$

Найдем её координаты: (-0,5; ?), если это не трудно

Построим график функции:

$y = 2x^3+3x^2-1$



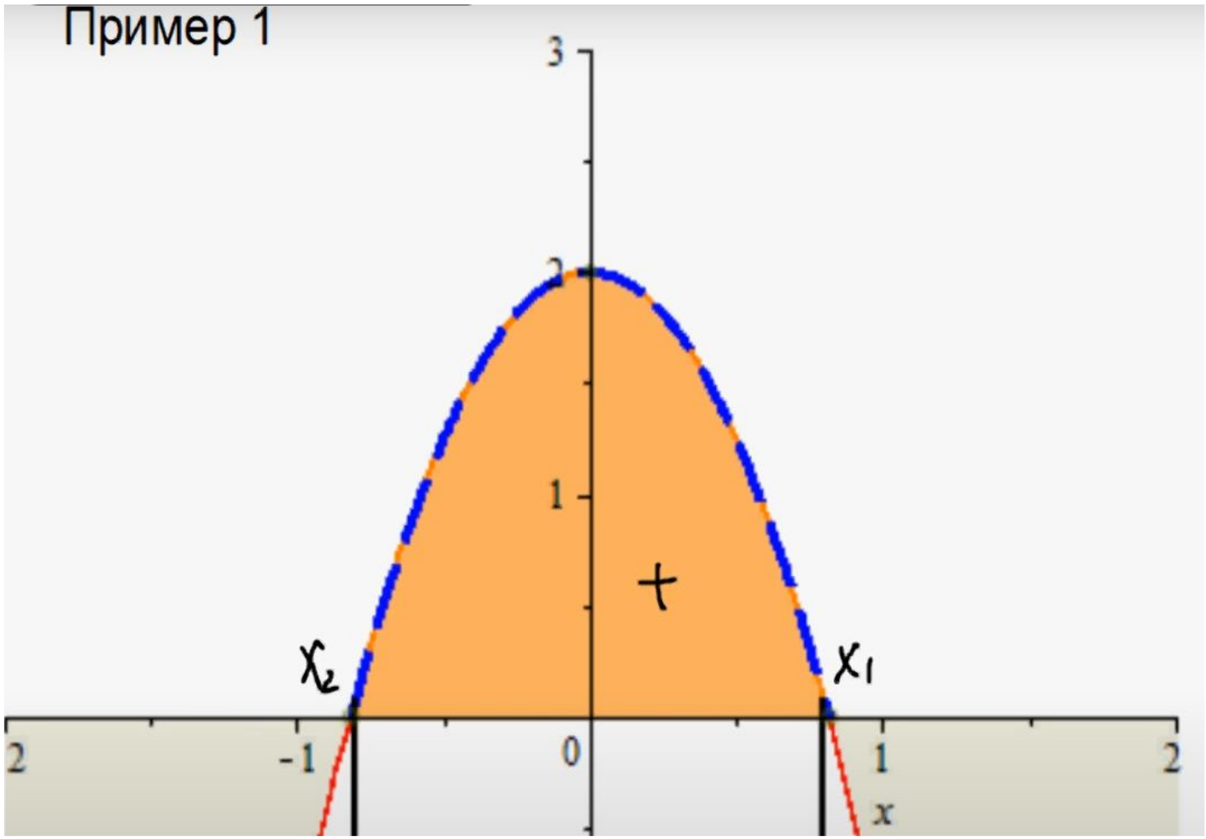
$y = -x^3 + 2x$

$x \in (-\infty; +\infty)$

$y(-x) = -y(x)$

$y` = -3x^2 + 2$

$x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ $\quad$ $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$



$y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$

Пример

1) X-2 =0
   X=2
   D(y) = =(-∞; -2) U (-2; +∞)
2) x = 2 точка разрыва

$$\frac{lim}{x\to 2-0}\frac{(x+1)^2}{x-2}=-\infty$$

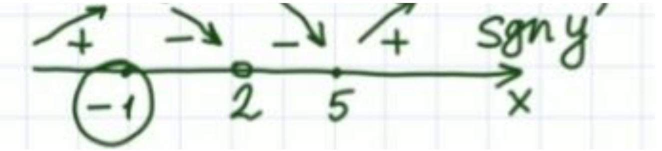
...$\frac{(2-0+1)^2}{2-0-2}=\frac{9}{-0}$ = -∞

$$\frac{lim}{x\to 2+0}\frac{(x+1)^2}{x-2}=+\infty$$

3) f(-x) = $\frac{(-x+1)^2}{-x-2}\neq\pm$ f(x) функция не является ни четной, ни нечетной
4) x=0, то y = -$\frac{1}{2}$
   если y = 0, то x = -1, т.е.
   (0; -1/2) и (-1; 0) – точки пересечения с осями координат
5) x=2 -вертикальная асимптота y=kx+b
   k= $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$
   b = $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ (f(x) - kx)
   k= $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2}{(x-2)x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{(x+1)^2}{x}}{\frac{(x-2)x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})^2}{1-\frac{2}{x}}=1$
   b = $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{(x+1)^2}{(x-2)}-x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{(x+1)^2-x(x-2)}{(x-2)})=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{x^2+2x+1-x^2+2x}{x-2})=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4x+1}{x-2}$
   $=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{4+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}})=4$; **y = x + 4** -невертикальная асимптота
6) y` = $(\frac{(x+1)^2}{x-2})'=\frac{2(x+1)(x-2)-(x+1)^2}{(x-2)^2}=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$,
   x= -1
   x= 5
   x= 2

   x = -1 -точка max y_{max} =y (-1) = 0
   x =5 – точка min y_{min} = y (5) = 12

   y`` = (y`)` = $(\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2})'=(\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2})'=\frac{18}{(x-2)^3}$
   y``(-1) < 0
   y`` (5) > 0
   функция y = f(x) – возрастает, если x ∈ (-∞; -1) U (5; +∞)
   функция y = f(x) – убывает, если x ∈ (-1; 2) U (2; 5)



7) y``= 0;
   $\frac{18}{(x-2)^3}$=0; x = 2 точка разрыва

Обратные примеры:

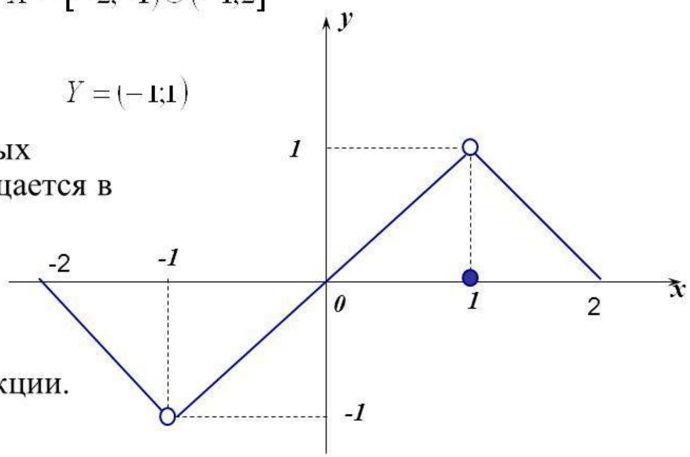
По графику функции, изображенному на рисунку, указать:

a) область её определения; $X=[-2;-1)\cup(-1;2]$

b) множество её значений; $Y=(-1;1)$

c) точки, в которых функция обращается в ноль; $x=\pm 2;\ 0;\ 1$

d) промежутки возрастания и убывания функции.



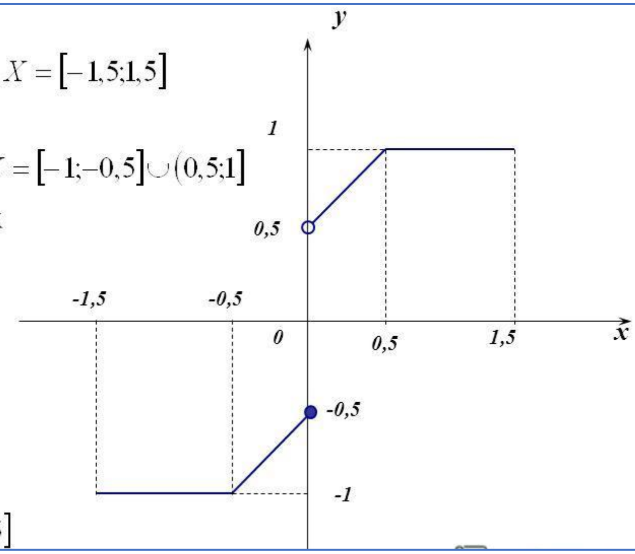
$f(x)\uparrow\ x\in(-1;1)$ $\quad f(x)\downarrow\ x\in[-2;-1)\cup(1;2]$

a) область её определения; $X=[-1,5;1,5]$

b) множество её значений; $X=[-1;-0,5]\cup(0,5;1]$

c) точки, в которых функция обращается в ноль; (нет)

d) промежутки возрастания и убывания функции.



$f(x)\uparrow\ x\in[-0,5;0,5]$


Дифференцирование
x(t) v(t) a(t)
Интегрирование

«Неберущиеся» интегалы

Интеграл, который не выражается через элементарные функции, т.е. его нельзя найти

$\int e^{-x^2}\,dx$ - интеграл Пуассона (теория вероятностей)

$\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм (теория чисел)

$\int \cos x^2\,dx$; $\int \sin x^2\,dx$ -интегралы Френеля (физика)

$\int \frac{\sin x}{x}\,dx$; $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ -интегральные синус и косинус

$\int \frac{e^x}{x}\,dx$ -интегральная показательная функция

Неопределенный интеграл. Свойства

- Первообразной функции $f(x)$ называется функция $F(x)$при условии $F'(x) = f(x)$
- Пример: $f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3}$.

Проверка:$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x)$

- Если для функции $f(x)$ найдена одна первообразная $F(x)$, то любая функция $F(x) + C$ $(C = const)$ также является первообразной для функции $f(x)$:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$$

- Совокупность всех первообразных для функции

$f(x)$ называется неопределённым интегралом

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$
- $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$
- $d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'dx = f(x)dx$

Неопределенный интеграл элементарных функций

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; n \neq -1$
- $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int sinx \cdot dx = -cosx + C$
- $\int cosx \cdot dx = sinx + C$
- $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$

Неопределенный интеграл. Метод замены переменных

$$\boxed{\int sin\ (5x+1)\cdot dx}$$

- Замена переменных $5x+1=u$
- Нахождение дифференциала новой переменной

  $du = u'(x)dx = (5x+1)'dx = 5dx$
- Нахождение дифференциала dx: $dx = \frac{du}{5}$
- Подстановка $u(x)$ и выражения для dx в исходных интеграл $\int sinu\cdot\frac{du}{5} = -\frac{1}{5}cosu + C$
- Возвращение к исходным переменным

  $\int sin(5x+1)\,dx = -\frac{1}{5}cos(5x+1) + C$

Неопределенный интеграл. Метод замены переменных

$$\boxed{\int sin^2x \cdot cosx \cdot dx}$$

Замена переменных $sinx = u$

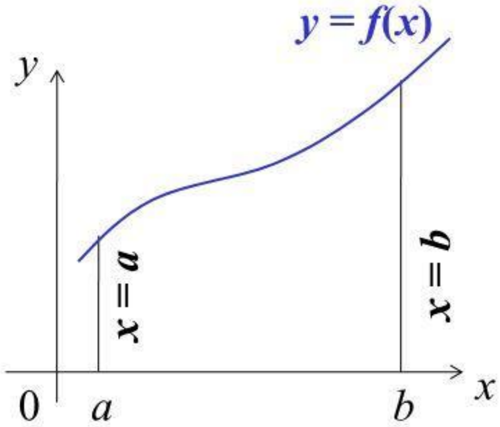
$du = (sinx)'dx \ = cosx \cdot dx$

$$dx = \frac{du}{cosx}$$

Исходный интеграл преобразуется к виду

$$\int \frac{u^2 \cdot cosx \cdot du}{cosx} = \int u^2du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(sinx)^3}{3} + C$$

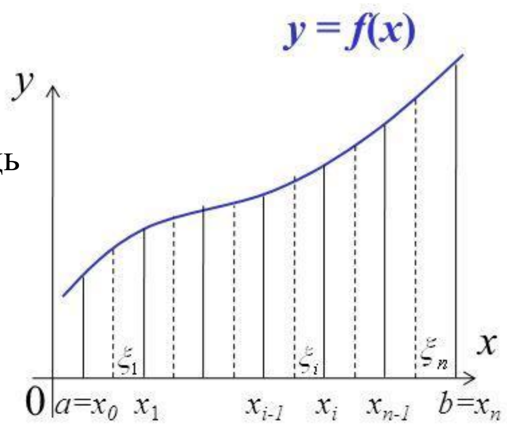
Определенный интеграл



Пусть $y = f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a;b]$

Криволинейная трапеция- это фигура, ограниченная графиком непрерывной неотрицательной функции $f(x)$, $x \in [a;b]$, параллельными прямыми $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси OX.

Найдем площадь криволинейной трапеции



1) Разобьем отрезок $[a;b]$ точками x_i $(a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b)$ на n отрезков $[a;x_1], [x_1;x_2], \ldots, [x_{n-1};b]$

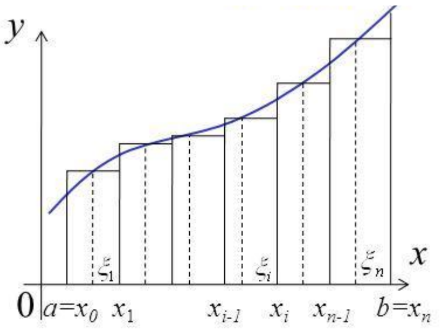
2) Пусть длина отрезка

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

3) Проведём через точки x_i прямые, параллельные оси OY.

4) В каждом отрезке $[x_{i-1};x_i]$ возьмём произвольную точку ξ_i и вычислим значение функции в ней, т.е. $f(\xi_i)$

Определенный интеграл



5) Произведение $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$.

6) Составим сумму всех таких произведений (интегральная сумма):

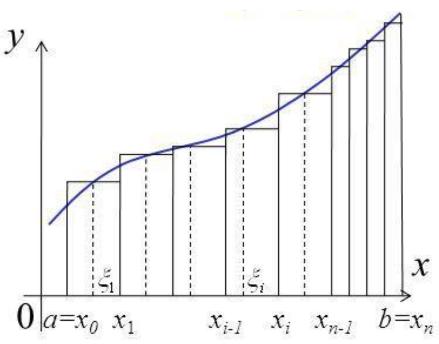
$$f(\xi_1)\cdot\Delta x_1+f(\xi_2)\cdot\Delta x_2+\ldots+f(\xi_n)\cdot\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=S_n$$

7) Интегральная сумма приближенно равна площади криволинейной трапеции, т.е.

$$S\approx S_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

Геометрический смысл определённого интеграла: определённый интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$



8) Пусть λ длина наибольшего из отрезков $[x_{i-1};x_i]$:

$$\lambda=\max\Delta x_i\,,\quad i=1,2,\ldots,n$$

9) При $n\to\infty\ (\lambda=\max\Delta x_i\to 0)$ интегральная сумма имеет предел

$$\boxed{S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i}$$

$$\boxed{\lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx}$$

Определенный интеграл. Свойства

$\int_a^b f(x)\,dx$ - определённый интеграл

$f(x)$ - подынтегральная функция

$f(x)\,dx$ - подынтегральное выражение

x – переменная интегрирования

$\left.\begin{array}{l}\textbf{\textit{a}}\text{– нижний предел интегрирования}\\ \textbf{\textit{b}}\text{– верхний предел интегрирования}\end{array}\right\}$ пределы интегрирования

- 1^0. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла:

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx, \quad k = const$$

Определенный интеграл. Свойства

- 2^0. Определённый интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

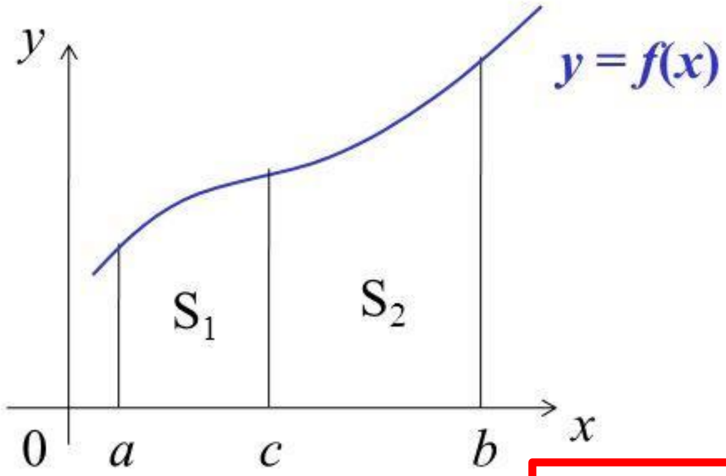
- 3^0. При перестановке пределов интегрирования, знак интеграла меняется на противоположный, т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Определенный интеграл. Свойства

- 4^0. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и $a<c<b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

знак двойной подстановки

Определенный интеграл. Свойства

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$

Примеры. Прямое интегрирование

$$\boxed{\int_0^{\pi} \sin x \, dx}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = \cos x \Big|_{\pi}^{0} = \cos 0 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2$$

$$\boxed{\int_1^8 \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x} \, dx}$$

$$\int_1^8 \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x} dx = \int_1^8 dx - \int_1^8 x^{-\frac{2}{3}} dx = x \Big|_1^8 - 3\sqrt[3]{x} \Big|_1^8 =$$

$$= (8-1) - 3(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1}) = 7 - 3(2-1) = 4$$

Примеры. Метод подстановки

Пусть дан интеграл $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a;b].

Введём новую переменную $x = \varphi(t)$

Если

1) $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$

2) $\varphi(t), \quad \varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$

3) $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$

то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}$$

Примеры. Метод подстановки

$$\int_{-1}^{2} \frac{2xdx}{(2x^2+1)^2}$$

$2x^2+1=t$

$d(2x^2+1)=dt$

$4x\,dx=dt$

$2x\,dx=\frac{1}{2}dt$

$\alpha=2\cdot(-1)^2+1=3$

$\beta=2\cdot 2^2+1=9$

$$\int_{-1}^{2}\frac{2x\,dx}{(2x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int_3^9\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{2}\int_3^9 t^{-2}dt=$$

$$=-\frac{1}{2t}\Big|_3^9=\frac{1}{2t}\Big|_9^3=\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 9}=\frac{1}{6}-\frac{1}{18}=\frac{1}{9}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x\,dx}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x(1-\cos^2 x)}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x\cdot\sin^2 x}\,dx=$$

$\cos x=t$

$d(\cos x)=dt$

$-\sin x\,dx=dt$

$\alpha=\cos 0=1$

$\beta=\cos\frac{\pi}{2}=0$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x\,dx=-\int_1^0\sqrt{t}\,dt=\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Big|_0^1=\frac{2}{3\sqrt{t^3}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

Примеры. Метод подстановки

$$\int_{1}^{5} x\sqrt{x-1}\,dx$$

$$x-1=t \quad \Rightarrow \quad x=t+1$$

$$d(x-1)=dt$$

$$dx=dt$$

$$\alpha=1-1=0$$

$$\beta=5-1=4$$

$$\int_{1}^{5} x\sqrt{x-1}\,dx=\int_{0}^{4}(t+1)\sqrt{t}\,dt=$$

$$=\int_{0}^{4} t^{\frac{3}{2}}\,dt+\int_{0}^{4} t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{2}{5}\sqrt{t^5}\Big|_0^4+\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_0^4=$$

$$=\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\Big|_0^4+\frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big|_0^4=\frac{2}{5}\cdot 16\cdot 2+\frac{2}{3}\cdot 4\cdot 2=\frac{272}{15}$$

Интегрирование по частям

Если функции $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ дифференцируемы на отрезке $[a;b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

$$\boxed{\int_1^e x\ln x\,dx}$$

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{x^2}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx =$$

$$\begin{bmatrix} u = \ln x & dv = x\,dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix}$$

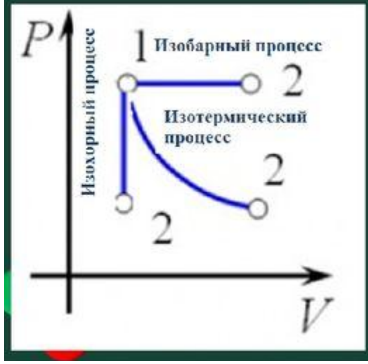
$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \left(\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1\right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+e^2}{4}$$

Интегрирование суммы трех функций

$$\boxed{\int_1^2 \left(x^2 + \frac{5}{x} - \frac{e^x}{3}\right) dx} = \int_1^2 x^2 \cdot dx + \int_1^2 \frac{5\,dx}{x} - \int_1^2 \frac{e^x}{3} dx =$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + 5\ln x - \frac{e^x}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} + 5\ln 2 - \frac{e^2}{3}\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 5\ln 1 - \frac{e}{3}\right) \approx 4{,}26$$

Интегрирование в физике

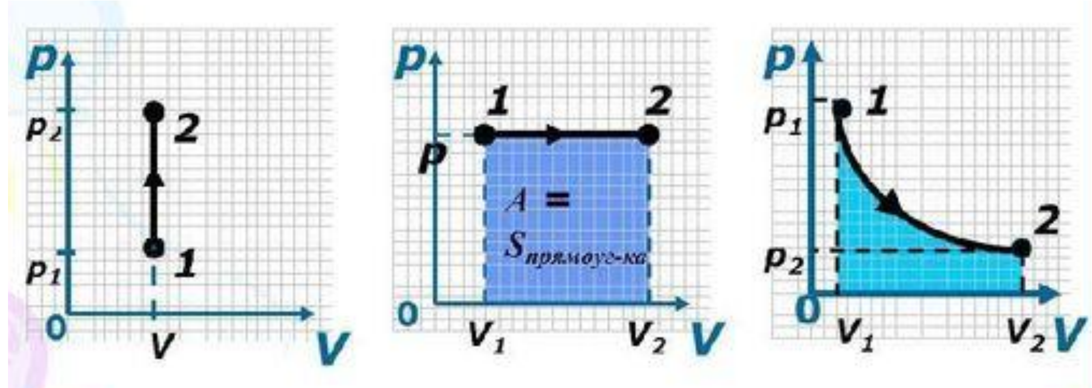


Работа в термодинамике

A_P -?

A_V -?

A_T -?



1. Вычисление работы движущегося тела.
2. Вычисление перемещения движущегося тела.
3. Вычисление массы тела.
4. Вычисление координаты центра тяжести
5. Вычисление кинетической энергии тела.
6. Вычисление потенциальной энергии пружины.

Величины	Вычисление производной	Вычисление интеграла
A – работа; F – сила; N – мощность	$F(x) = A'(x)$; $N(t) = A'(t)$.	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$; $A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt$.
m – масса тонкого стержня; ρ – линейная плотность	$\rho(x) = m'(x)$.	$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx$
q – электрический заряд; I – сила тока	$I(t) = q'(t)$.	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$
S – перемещение; υ – скорость	$\upsilon(t) = S'(t)$.	$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt$
Q – количество теплоты; c – теплоёмкость	$c(t) = Q'(t)$.	$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t)dt$

1. Вычисление работы идеального газа.
2. Вычисление количества теплоты.
3. Вычисление теплоемкости вещества.
4. Вычисление давления
5. Вычисление количества электричества.
6. Вычисление магнитного потока и т.д.

Аппроксимация медицинских (антропометрических) данных функциями.

2. Антропометрия - измерение размеров тела и отдельных его частей с помощью специальных инструментов: антропометра, ростомера, сантиметровой ленты, циркулей.

- **Соматометрия** — измерение размеров тела и его частей;
- **Остеометрия** — измерение размеров скелета и его частей;
- **Краниометрия** — измерение размеров черепа.

Основные и дополнительные антропометрические показатели:

Основные антропометрические показатели:

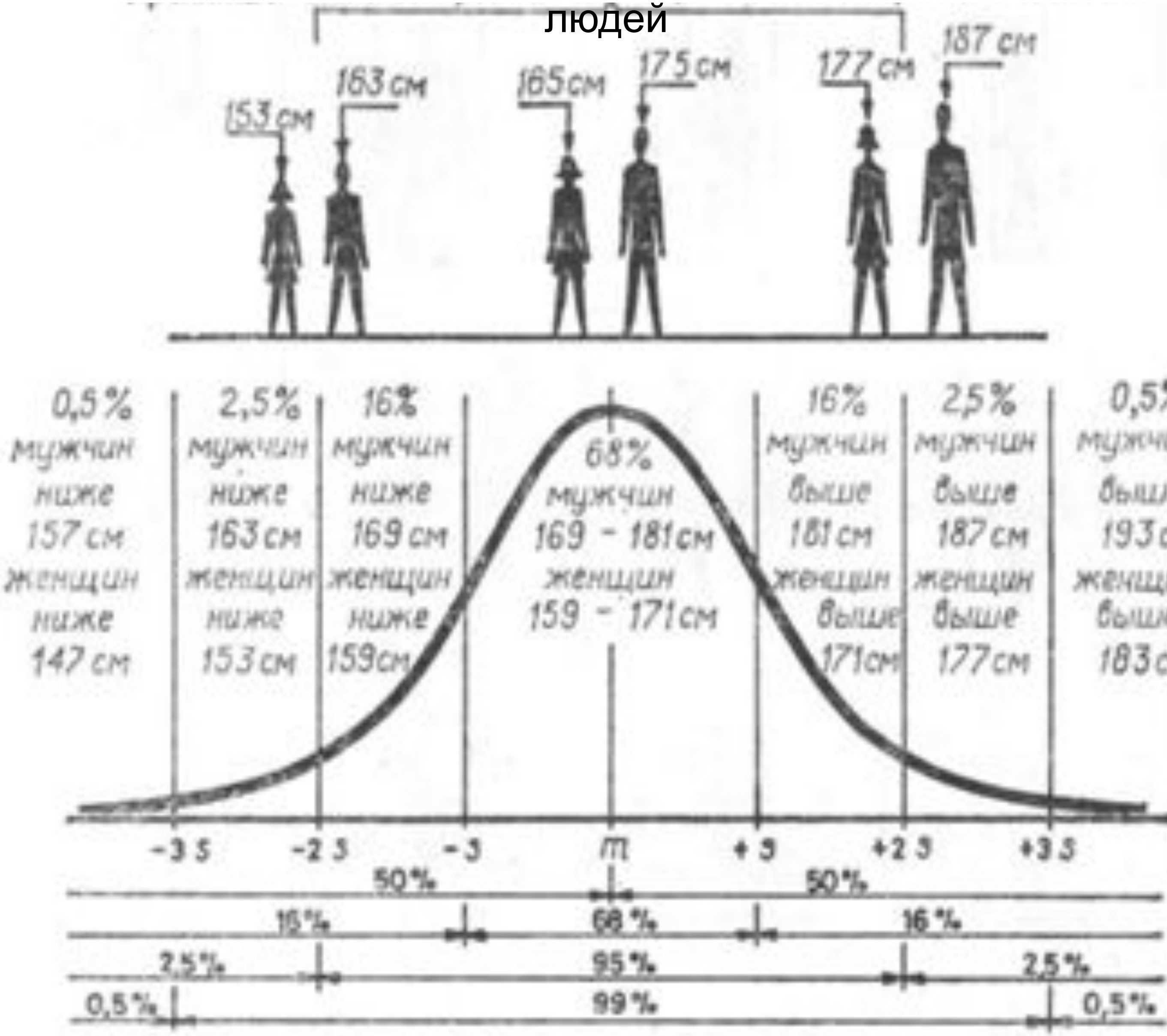
- Рост, масса, площадь поверхности, объём тела, длина окружности грудной клетки при максимальном вдохе, паузе и максимальном выдохе.

Дополнительные антропометрические показатели:

- рост сидя, длина окружности шеи, живота, талии, бедра и голени, размер плеча, сагиттальный и фронтальный размеры грудной клетки, длинна рук, масса подкожного жира и т.д.

Антропометрия

Рост людей



Антропометрия

Для определения примерного роста реального человека предварительно получают набор среднестатистических величин размеров роста человека и соответствующих каждому из этих значений среднестатистических величин размеров следа стопы человека.

Длина стопы, см	Предположительный рост оставившего следы человека, см	
	мужчины	женщины
23	153-157	165-170
24	158-162	171-175
25	163-167	176-178
26	168-171	179-182
27	172-175	183-186
28	176-180	187-192
29	181-185	193-196
30	186-190	

Лабораторная работа:

Часть 1. Антропометрия. Построить зависимость размера обуви от роста студентов в группе и аппроксимировать полученную зависимость линейной функцией. (выполняется группами по 5-6 человек). Построить полученные данные в двойных логарифмических и полулогарифмических координатах. Сделать выводы, сдать в письменном виде.

Часть 2. С помощью мультиметра, снабженного термопарой, построить зависимость температуры теплой воды в стакане от времени и зависимость показаний датчика от времени после прикосновения термопары к вашему телу. Выполнить построение полученных экспериментальных данных в двойных логарифмических и в полулогарифмических координатах.

Сделать выводы о функции, которая описывает полученную экспериментальную зависимость.

Домашнее задание

Предположив, что затухающие волны эпидемии описываются функцией

$y = 10 \exp(-x/10) \sin 2x$, которая выражает собой зависимость количества больных от времени, построить график функции и произвести полное исследование функции. Проверить полученный результат онлайн.