15.12.20.

Тема:
Знаки тригонометрических функций.
Формулы сложения.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://youtu.be/bK7zcql6SXs

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Например:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

Формулы сложения

Формулами сложения называют формулы, выражающие $\cos(\alpha \pm \beta)$ и $\sin(\alpha \pm \beta)$ через синусы и косинусы углов α и β.

Теорема. Для любых α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

Задача 1 Вычислить $\cos 75°$.

▶ По формуле (1) находим
$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° -$
$- \sin 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Заменив в формуле (1) β на $-\beta$, получим

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos(-\beta) - \sin\alpha \sin(-\beta),$$

откуда

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta. \qquad (2)$$

Задача 2 Вычислить $\cos 15°$.

▶ По формуле (2) получаем
$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° +$
$+ \sin 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Задача 3 Доказать формулы

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \qquad (3)$$

▶ При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ по формуле (2) получаем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta = \sin\beta, \text{ т. е.}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta. \qquad (4)$$

Заменив в этой формуле β на α, получим $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$. Полагая в формуле (4) $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, имеем $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$. ◁

Используя формулы (1) — (4), выведем формулы сложения для синуса:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta =$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

$$\mathbf{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.} \qquad (5)$$

Заменяя в формуле (5) β на $-\beta$, получаем

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta).$$

$$\mathbf{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.} \qquad (6)$$

Задача 4 Вычислить $\sin 210°$.

▶ $\sin 210° = \sin(180° + 30°) = \sin 180° \cos 30° + \cos 180° \sin 30° = 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. ◁

Задача 5 Вычислить $\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$.

▶ $\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7} = \sin\left(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin\pi = 0$. ◁

Практическая часть.

Ответить на вопросы

Какие формулы называют формулами сложения? Запишите их.

475 Вычислить:

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1+\operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$;

3) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

4) $\cos(-\pi)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

481 С помощью формул сложения вычислить:
1) $\cos 135°$; 2) $\cos 120°$; 3) $\cos 150°$; 4) $\cos 240°$.

485 Найти значение выражения:
1) $\sin 73° \cos 17° + \cos 73° \sin 17°$;
2) $\sin 73° \cos 13° - \cos 73° \sin 13°$;
3) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$;
4) $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$.

486 Вычислить:
1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;