Исследование функции с помощью производной и построение графика функции

План исследования функции и построения графика

- 1. Найти область определения D(f) функции f(x).
- 2. Найти область значений E(f) (если это возможно вначале, часто E(f) можно указать только по результатам исследования).
- 3. Исследовать функцию на четность.
- 4. Исследовать функцию на периодичность.
- 5. Найти точки пересечения с осью Ox (нули функции) и точки пересечения с осью Oy.
- 6. Найти промежутки знакопостоянства функции.
- 7. Исследовать функцию на непрерывность, дать классификацию разрывов.
- 8. Найти асимптоты графика функции (вертикальную, наклонную, горизонтальную).
- 9. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
- 10. Исследовать график функции на выпуклость, вогнутость, перегиб.
- 11. Построить график функции.

Нахождение области определения функции

- Обозначение: D(f)
- Определение: ООФ – это множество чисел, на котором задается функция. Если ООФ не указана, то считается, что ООФ состоит из всех значений x, при которых функция определена.

Какие могут быть препятствия для х?

- 1. Знаменатель дроби ($\neq 0$)
- 2. Подкоренное выражение (≥ 0)
- 3. Логарифмируемое число (> 0)
- 4. Основание логарифма ($> 0, \neq 1$)
- 5. tgx=a. ($x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \epsilon Z$)
- 6. arcsin x, arccos x: $x \in [-1; 1]$

Исследование функции на четность

- Условие четности:
- f(x)=f(-x); график симметричен относительно OY.
- Условие нечетности:
- f(-x)= - f(x); график симметричен относительно начала координат.
- Если эти условия не выполняются, то функция общего вида.

Исследование функции на периодичность

- Определение: Функцию $y=f(x)$, $x \in X$ называют периодической, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из множества X выполняется двойное равенство

$$f(x-T)=f(x)=f(x+T)$$

Пересечение с осями координат

- Нули функции (пересечение с ОХ)

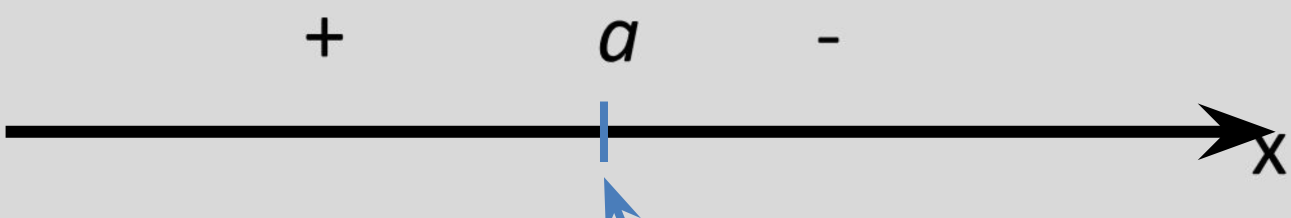
  Решаем уравнение $f(x)=0$

- Пересечение с ОУ

  Находим $f(0)$

Промежутки знакопостоянства функции

- Определяем знак функции слева и справа от точек, в которых функция равна нулю.



нуль функции

Записываем: $y > 0$ при $x \in (-\infty; a)$;

$y < 0$ при $x \in (0; +\infty)$

Исследование функции на непрерывность

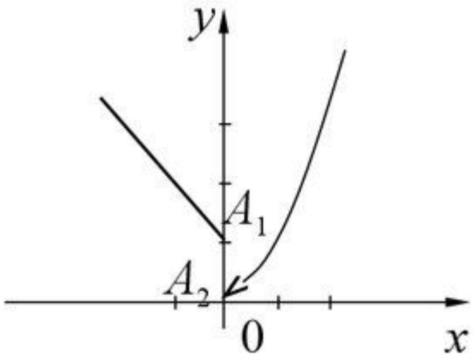
- Определение. Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0 , если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Для непрерывности функции необходимо выполнение трех условий:

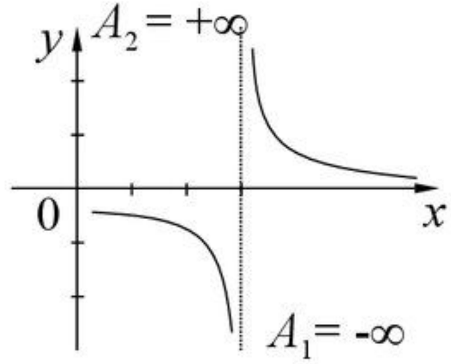
- 1. Функция в точке x_0 должна быть определена.
- 2. В точке x_0 должен существовать предел.
- 3. Предел в точке x_0 должен быть равен значению функции в этой точке.

Классификация точек разрыва

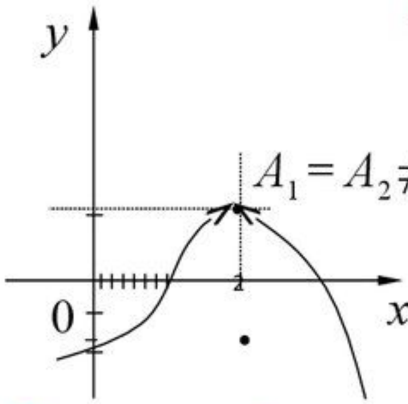


$A_1 \neq A_2 \neq \infty$

Разрыв 1-го рода



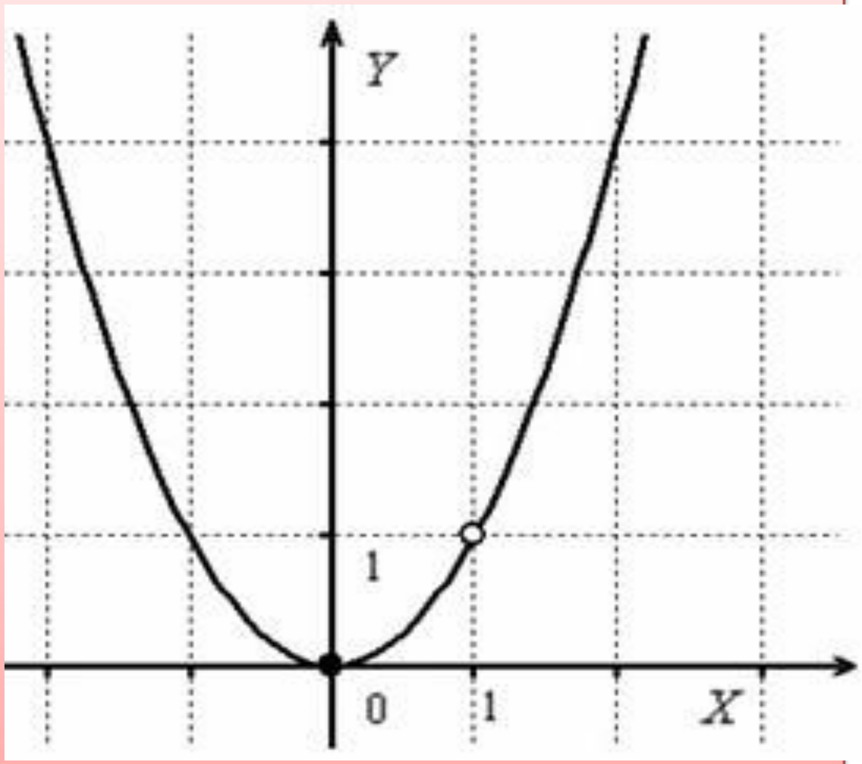
Разрыв 2-го рода



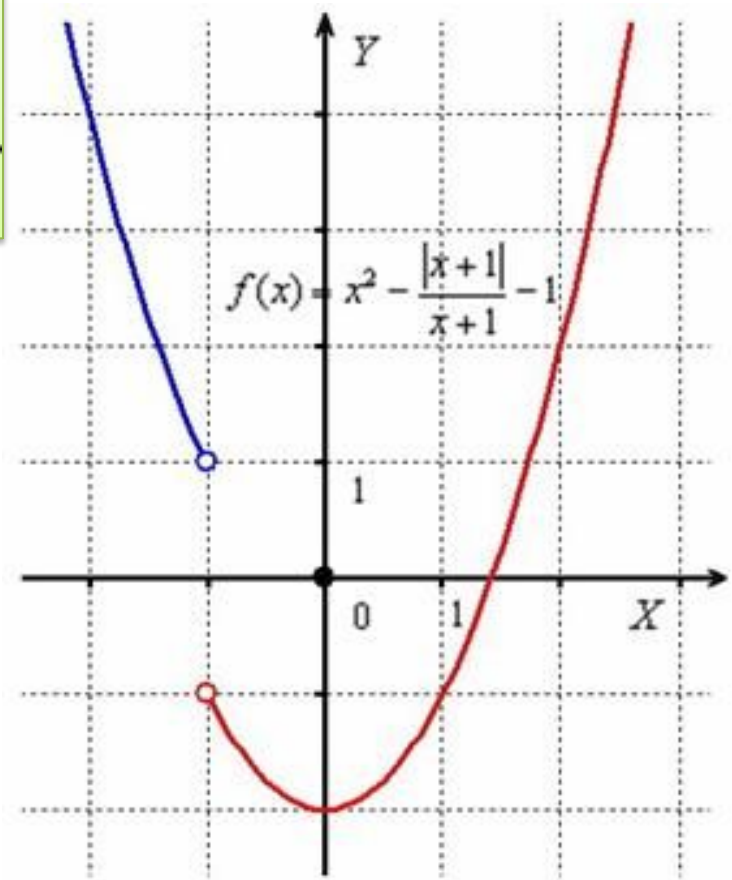
Устранимый разрыв

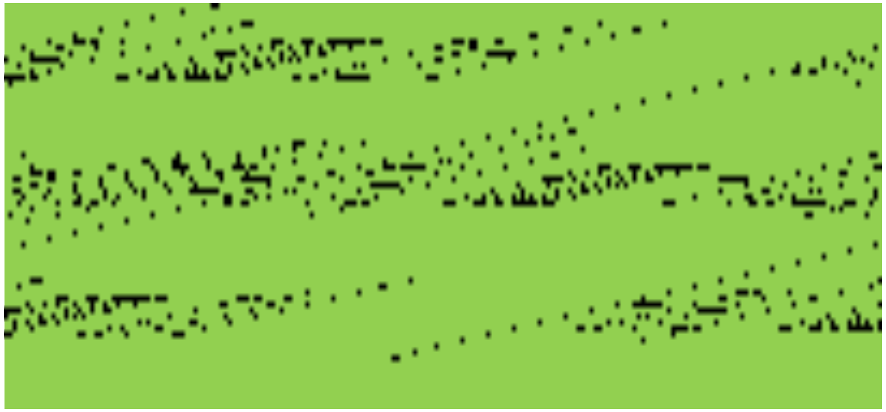
Примеры функций и видов разрыва

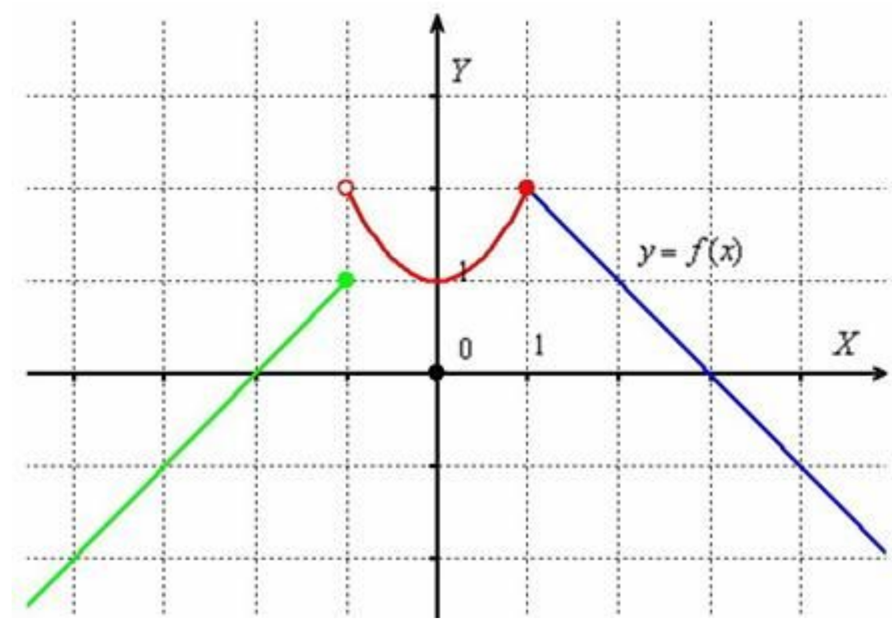
- $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x-1}=\frac{x^2(x-1)}{x-1}=x^2$
- Устранимый разрыв



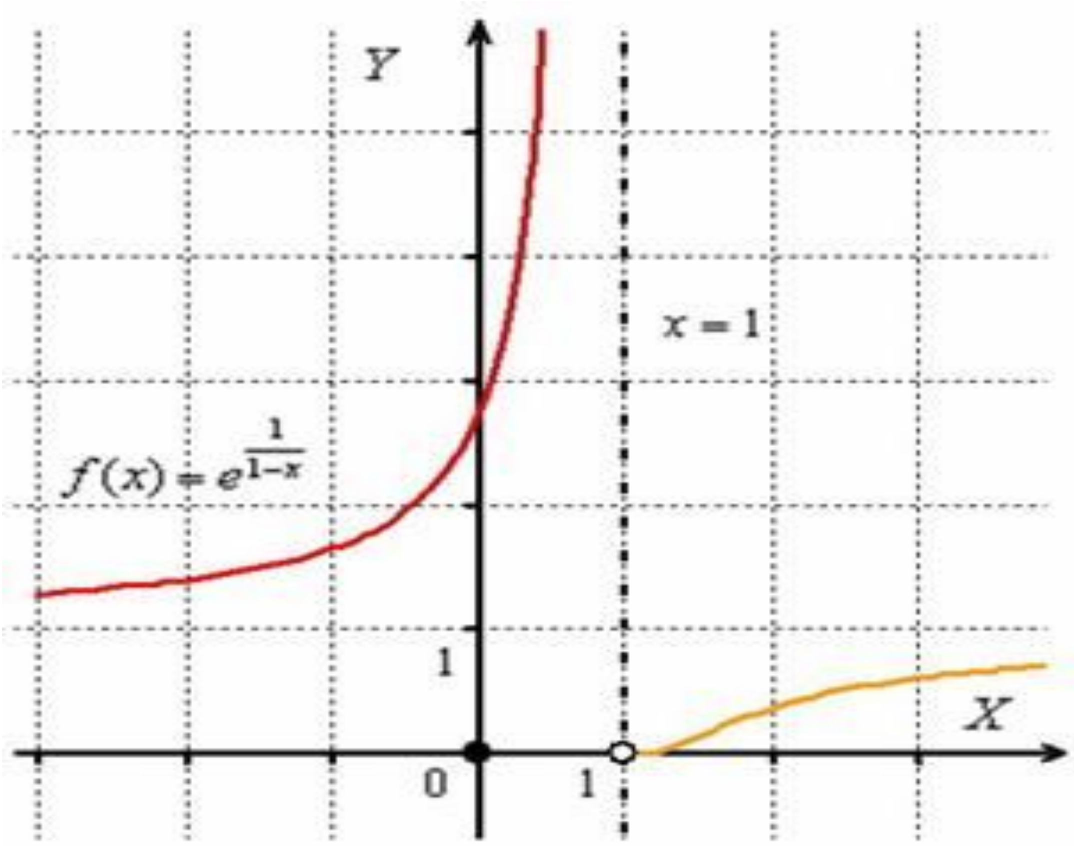
Функция непрерывна на всей числовой прямой кроме точки x=-1 , в которой она терпит разрыв **первого рода** со скачком.







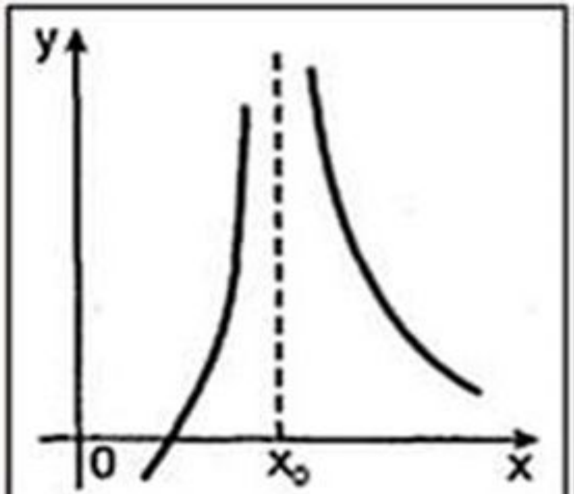
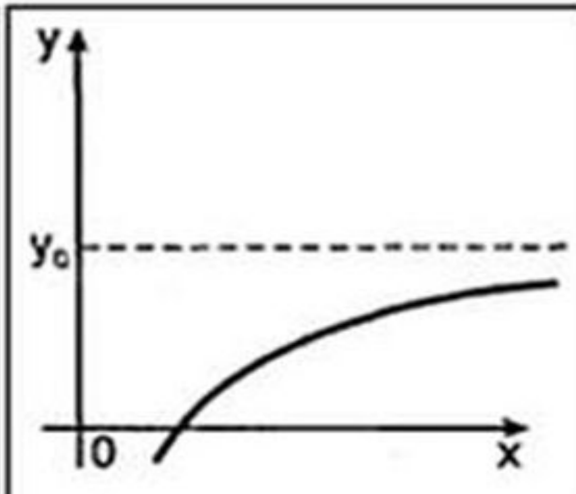
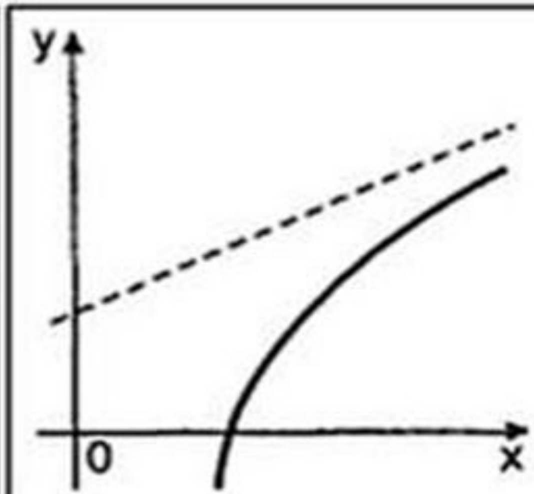
Функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки x=-1 , в которой она терпит разрыв **первого рода** со скачком. Не путать с областью определения: D(f)=R



Функция непрерывна на всей числовой прямой кроме точки x=1,
в которой она терпит разрыв 2-го рода.

Асимптоты графика

Виды асимптот

Вертикальная $x = x_0$	Горизонтальная $y = y_0$	Наклонная $y = kx + b$ $(k \neq 0)$
		
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y_0.$	$k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x};$ $b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx].$

Исследование на монотонность и экстремумы

1) Найти производную функции.
2) Приравнять ее к 0.
3) Справа и слева от точек, в которых производная равна нулю, определить знак производной.
4) Найти промежутки возрастания и убывания функции. Если производная положительна, то функция возрастает; если отрицательна, то убывает.
5) Найти точки экстремума (или точки перегиба)
6) Найти значение функции в точках экстремума или точках перегиба (для построения графика).

Исследование на выпуклость, вогнутость, перегибы

- Необходимо найти вторую производную функции и приравнять ее к нулю. Если вторая производная **больше нуля**, то на этом промежутке **выпуклость вниз**, если **меньше – выпуклость вверх**. Точка, в которой вторая производная равна нулю, является точкой перегиба. В ней меняется направление выпуклости.

Построение графика

В процессе исследования функции мы получили следующие точки графика:

- Точки пересечения с осями
- Точки максимума и минимума
- Точки перегиба
- Точки разрыва

Мы определили промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и убывания, промежутки выпуклости и вогнутости.
Наконец, у нас есть информация о наличии или отсутствии асимптот.
Если этих точек недостаточно, задаем нужное значение х и считаем значение функции в этой точке.