

Исследование функции с помощью производной и построение графика функции

План исследования функции и построения графика

- 1. Найти область определения $D(f)$ функции $f(x)$.
- 2. Найти область значений $E(f)$ (если это возможно вначале, часто $E(f)$ можно указать только по результатам исследования).
- 3. Исследовать функцию на четность.
- 4. Исследовать функцию на периодичность.
- 5. Найти точки пересечения с осью Ox (нули функции) и точки пересечения с осью Oy .
- 6. Найти промежутки знакопостоянства функции.
- 7. Исследовать функцию на непрерывность, дать классификацию разрывов.
- 8. Найти асимптоты графика функции (вертикальную, наклонную, горизонтальную).
- 9. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
- 10. Исследовать график функции на выпуклость, вогнутость, перегиб.
- 11. Построить график функции.

Нахождение области определения функции

- Обозначение: $D(f)$
- Определение: ООФ — это множество чисел, на котором задается функция. Если ООФ не указана, то считается, что ООФ состоит из всех значений x , при которых функция определена.

Какие могут быть препятствия для x ?

- 1. Знаменатель дроби ($\neq 0$)
- 2. Подкоренное выражение (≥ 0)
- 3. Логарифмируемое число (> 0)
- 4. Основание логарифма ($> 0, \neq 1$)
- 5. $\operatorname{tg}x=a$. ($x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$)
- 6. $\arcsin x, \arccos x$: $x \in [-1; 1]$

Исследование функции на четность

- **Условие четности:**
 - $f(x)=f(-x)$; график симметричен относительно ОУ.
- **Условие нечетности:**
 - $f(-x)= - f(x)$; график симметричен относительно начала координат.
- Если эти условия не выполняются, то функция общего вида.

Исследование функции на периодичность

- Определение: Функцию $y=f(x)$, $x \in X$ называют периодической, если существует такое отличное от нуля число T , что для любого x из множества X выполняется двойное равенство

$$f(x-T)=f(x)=f(x+T)$$

Пересечение с осями координат

- Нули функции (пересечение с ОХ)

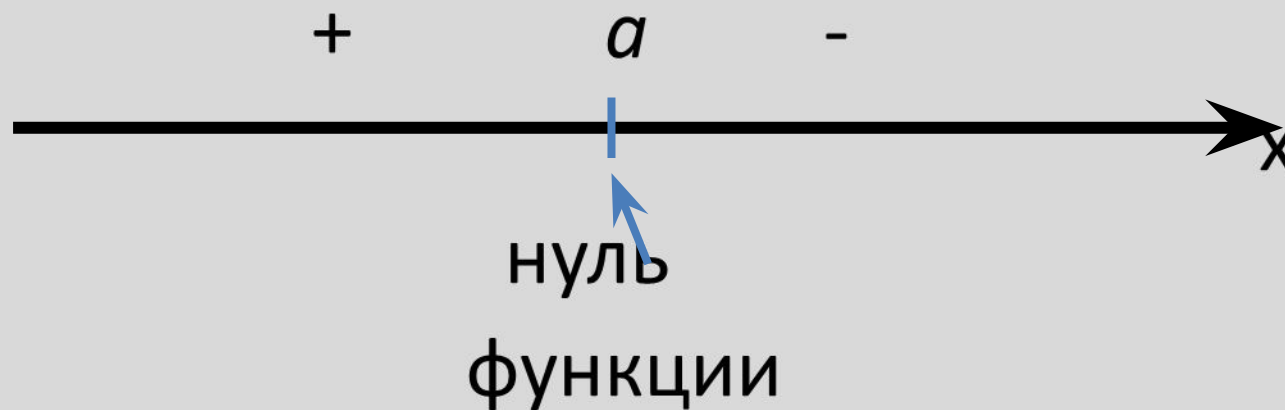
Решаем уравнение $f(x)=0$

- Пересечение с ОУ

Находим $f(0)$

Промежутки знакопостоянства функции

● Определяем знак функции слева и справа от точек, в которых функция равна нулю.



Записываем: $y > 0$ при $x \in (-\infty; a)$;

$y < 0$ при $x \in (a; +\infty)$

Исследование функции на непрерывность

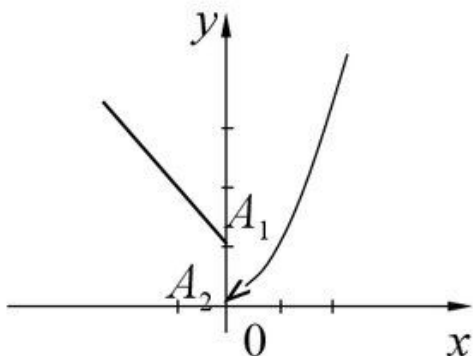
- Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Для непрерывности функции необходимо выполнение трех условий:

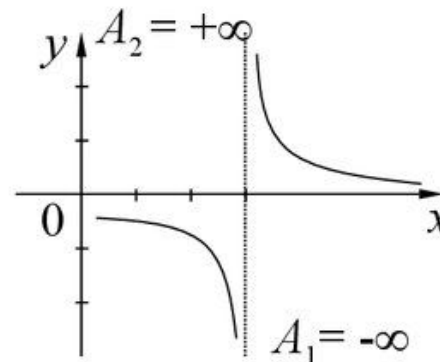
- 1. Функция в точке x_0 должна быть определена.
- 2. В точке x_0 должен существовать предел.
- 3. Предел в точке x_0 должен быть равен значению функции в этой точке.

Классификация точек разрыва

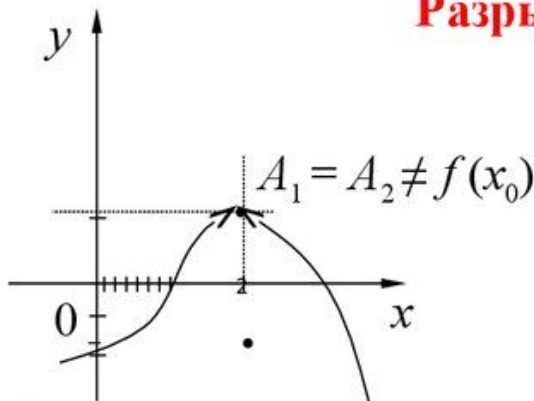


$$A_1 \neq A_2 \neq \infty$$

Разрыв 1-го рода



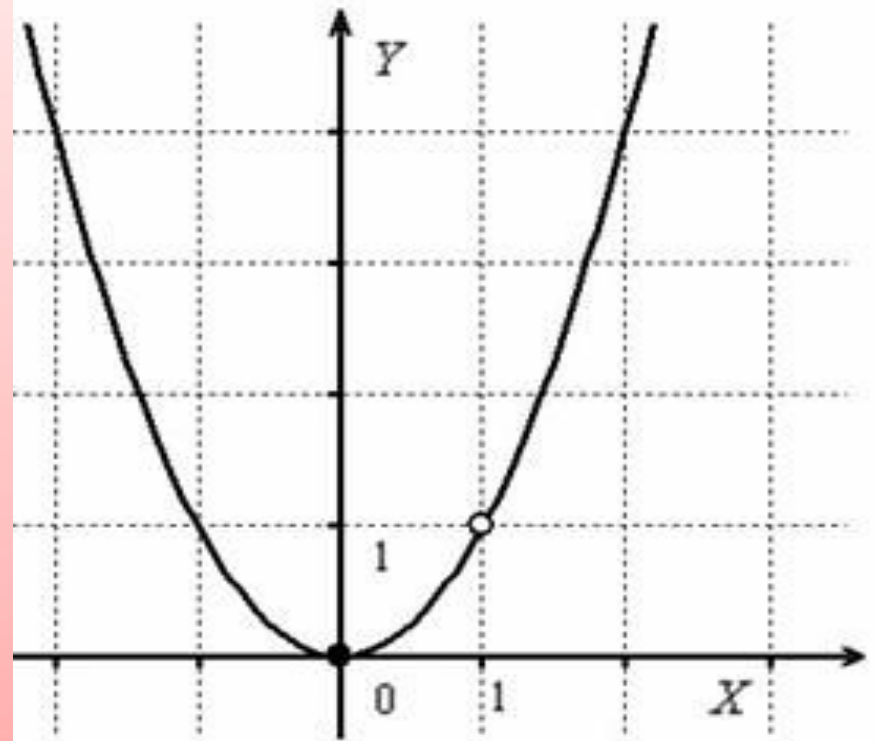
Разрыв 2-го рода

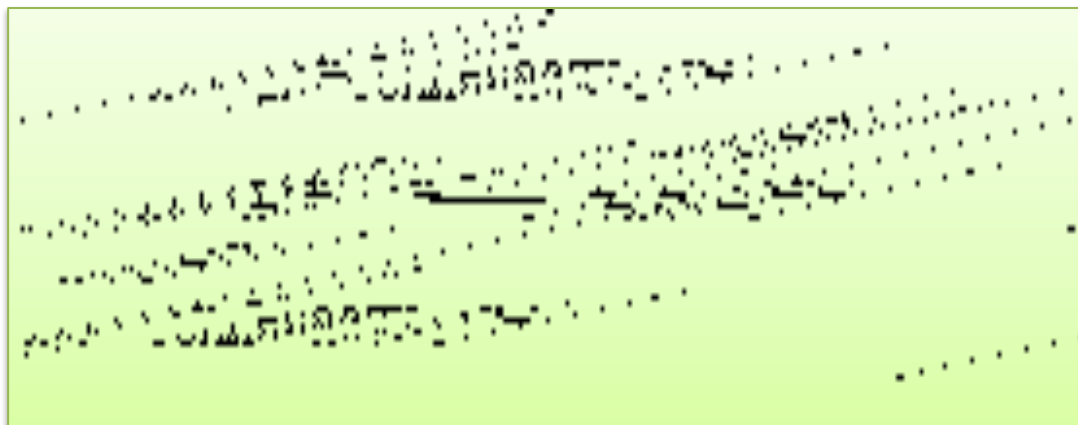


Устранимый разрыв

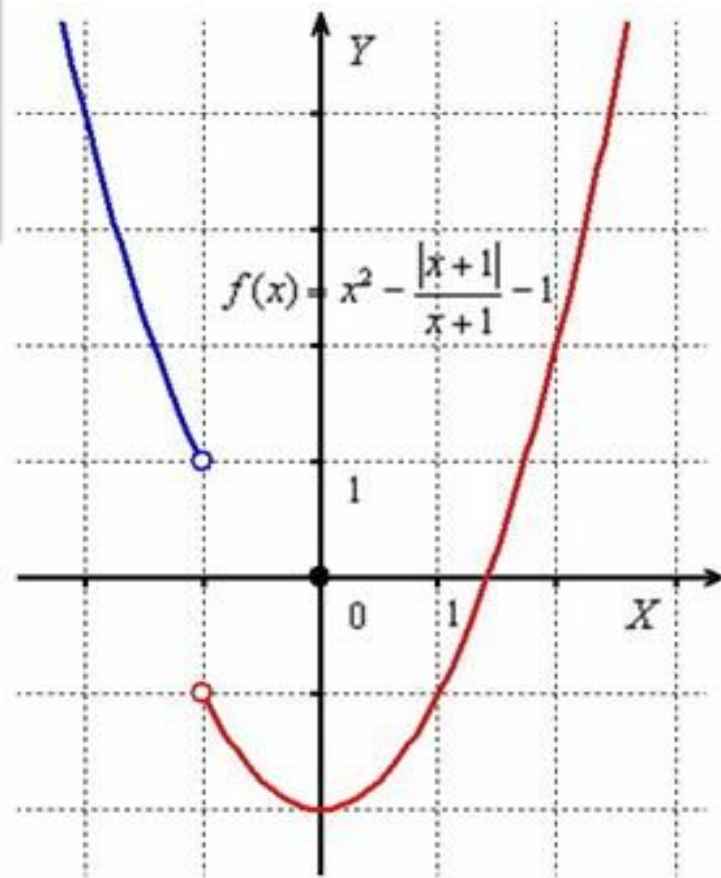
Примеры функций и видов разрыва

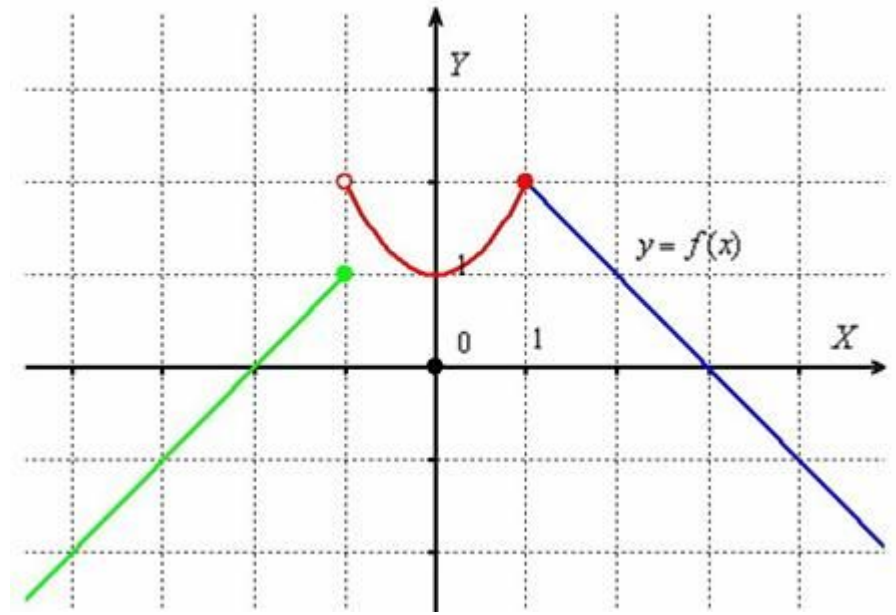
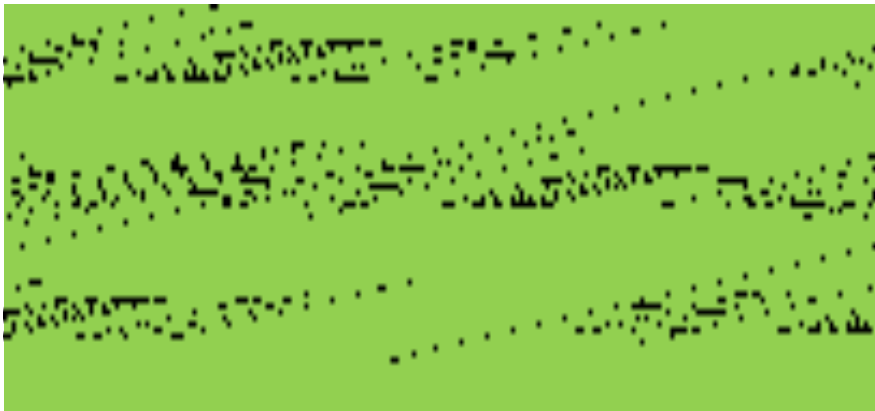
- $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x - 1} = \frac{x^2(x - 1)}{x - 1} = x^2$
- Устранимый разрыв





Функция непрерывна на всей числовой прямой кроме точки $x=-1$, в которой она терпит разрыв первого рода со скачком.

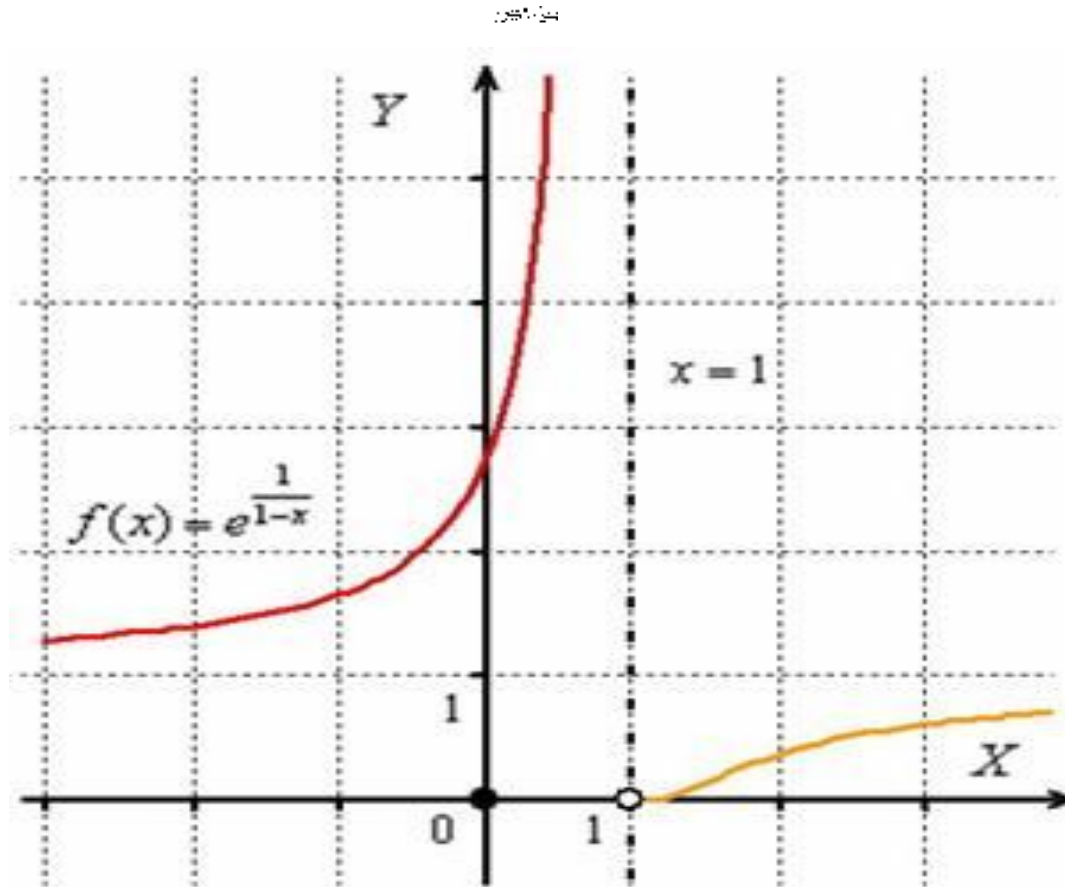




Функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки $x = -1$, в которой она терпит разрыв **первого рода** со скачком.

Не путать с областью определения:

$$D(f) = \mathbb{R}$$

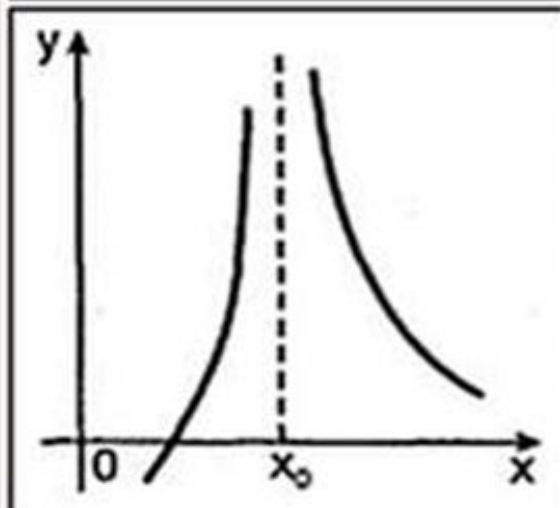


Функция непрерывна на всей числовой прямой кроме точки $x=1$, в которой она терпит разрыв 2-го рода.

Асимптоты графика

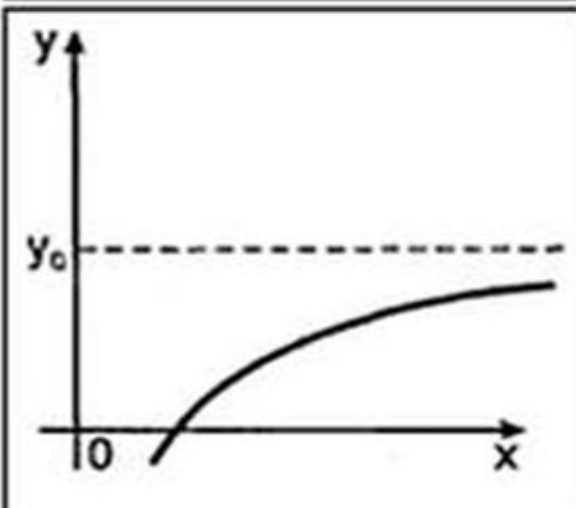
Виды асимптот

Вертикальная
 $x = x_0$



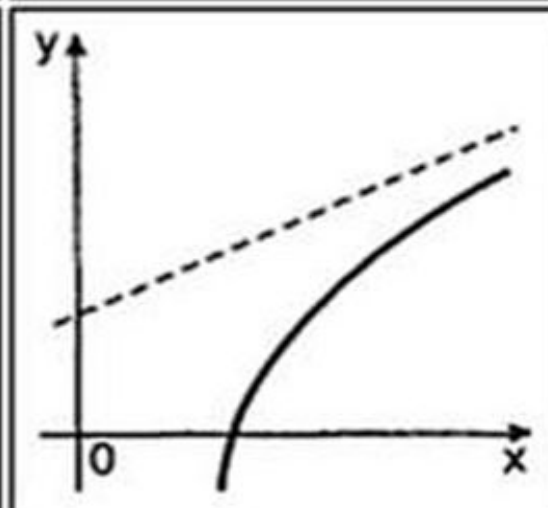
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

Горизонтальная
 $y = y_0$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y_0$$

Наклонная
 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)



$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x};$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx].$$

Исследование на монотонность и экстремумы

- 1) Найти производную функции.
- 2) Приравнять ее к 0.
- 3) Справа и слева от точек, в которых производная равна нулю, определить знак производной.
- 4) Найти промежутки возрастания и убывания функции. Если производная положительна, то функция возрастает; если отрицательна, то убывает.
- 5) Найти точки экстремума (или точки перегиба)
- 6) Найти значение функции в точках экстремума или точках перегиба (для построения графика).

Исследование на выпуклость, вогнутость, перегибы

- Необходимо найти вторую производную функции и приравнять ее к нулю. Если вторая производная **больше нуля**, то на этом промежутке **выпуклость вниз**, если **меньше** – **выпуклость вверх**. Точка, в которой вторая производная равна нулю, является точкой перегиба. В ней меняется направление выпуклости.

Построение графика

В процессе исследования функции мы получили следующие точки графика:

- Точки пересечения с осями
- Точки максимума и минимума
- Точки перегиба
- Точки разрыва

Мы определили промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и убывания, промежутки выпуклости и вогнутости.

Наконец, у нас есть информация о наличии или отсутствии асимптот. Если этих точек недостаточно, задаем нужное значение x и считаем значение функции в этой точке.