УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Примеры некорректных задач.

3. Неединственность решения задачи Коши.

Семинар 5-2. Не единственность решений задачи Коши. (Продолжение).

3.Пример некорректной задачи относительно единственности решения.

Теорема Коши – Пикара о существовании и единственности локального решения задачи Коши для ОДУ.

Рассматривается задача Коши

$$\begin{cases} x' = f(x,t) & \text{(НС)} \\ x(t_0) = x_0 & \text{(НУ)} \end{cases}$$

состоящая из нормальной системы (НС) и начального условия (НУ). Предполагается, что

$$f: [a,b] \times R^n \to R^n \qquad (1)$$

1. *Функция* $f(x,t)$ *непрерывна по* x *при любом фиксированном* x; (2)

2. *Функция* $f(x,t)$ *удовлетворяет по* x ***условию Липшица*** *с некоторой константой* L:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le L\|x-y\| \quad (t \in [a,b]; \; x,y \in R^n) \qquad (3)$$

Исследуется вопрос о существовании и единственности решения (НС), (НУ) и используется *метод последовательных приближений* для приближённого отыскания решения.

Замечание. Последовательные приближения. Пусть произвольная непрерывная функция

$$\varphi_0: [a,b] \to R^n \quad \text{– произвольная непрерывная функция} \quad (4)$$

Последовательные приближения, соответствующие начальному приближению , определим с помощью рекуррентной формулы:

$$\varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int f[s, \varphi_k(s)]ds \qquad (5)$$

Заметим, что из (5) вытекают два равенства:

$$\boldsymbol{\varphi'_{k+1} = f[t,\ \varphi_k(t)]} \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{\varphi_k(t_0) = x_0} \qquad (7)$$

<u>Формулировка теоремы Коши – Пикара</u> **.** *Пусть выполнены условия (1) – (3). Тогда:*

1) *Задача (НС), (НУ) имеет на* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *единственное решение* $\boldsymbol{\varphi}$*;*
2) *Последовательные приближения (4), (5) сходятся на* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *к* $\boldsymbol{\varphi}$*, причём справедлива следующая оценка погрешности* $\boldsymbol{k}$*-го приближения:*

$$\boldsymbol{\|\varphi_k(t) - \varphi(t)\| \le L_2\ \frac{c^k}{k!}}\ , \qquad (8)$$

где

$$\boldsymbol{L_2 = L_1 e^c}\ , \quad \boldsymbol{L_1 = \|\varphi_0 - \varphi_1\|}, \quad \boldsymbol{c = L(b-a)},$$

$\boldsymbol{L}$ – *константа Липшица (3).*

Доказательство состоит из четырёх лемм.

Приведём примеры неединственности теоремы Коши – Пикара.

Пример 1. Рассматривается задача Коши:

$$\begin{cases} x'(t) = 2\sqrt{x(t)} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Решение.

1. *Задача имеет очевидное* ***тривиальное*** *решение:* $x(t) = 0.$
2. *Помимо него существует ещё одно решение. Интегрируя уравнение находим:*

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int dt + C \;\rightarrow\; \sqrt{x} = t + C \;\rightarrow\; x(t) = (t + C)^2$$

С учётом начального условия $x(0) = 0$ *, окончательно получаем второе решение:*

$$x(t) = t^2$$

Теорема единственности не «сработала», так как при $x = 0$ ***не выполняются условия Липшица***. Правая часть этого уравнения в точке имеет бесконечную производную по x .

Пример 2. Отсутствие локальной разрешимости.

Рассматривается задача Коши:

$$\begin{cases} x' = -sign(x) + \frac{1}{2}, & x \in R. \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Решение. ***Задача не имеет решения ни на каком промежутке. Причина: разрывность правой части уравнения (3) в точке*** $x = 0$.

Пример 3. Отсутствие глобальной разрешимости.

Рассматривается задача Коши:

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) + 1 & (I) \\ x(0) = 0 & (II) \end{cases}$$

Решение. ***Задача не имеет решения ни на каком промежутке.***

Задача легко интегрируется:

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int dt + C \ \rightarrow \ arctg(x) = t + C \ \rightarrow \ x(t) = tg(t + C) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t + < \frac{\pi}{2}\right), \qquad (III)$$

Подчеркнём, что (I) (III). Это означает, в частности, что вопрос о разрешимости задачи (I)- (II) скажем на промежутке R имеет отрицательный ответ, так как область определения любого решения не выходит за рамки интервала $\left(-\frac{\pi}{2} - C,\ \frac{\pi}{2} - C\right)$. Этот эффект связан с тем, что правая часть $x^2 + 1$ в уравнении (I) при $x \rightarrow \infty$ растёт «слишком быстро» по сравнению с x.

БЛАГОДАРЮ

ЗА

ВНИМАНИЕ