



УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Примеры некорректных задач.

3. Неединственность решения задачи Коши.





Семинар 5-2. Не единственность решений задачи Коши. (Продолжение).

3. Пример некорректной задачи относительно единственности решения.

Теорема Коши – Пикара о существовании и единственности локального решения задачи Коши для ОДУ.

Рассматривается задача Коши

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) & \text{(НС)} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 & \text{(НУ)} \end{cases}$$

состоящая из нормальной системы (НС) и начального условия (НУ). Предполагается, что

$$\mathbf{f}: [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1)$$

1. Функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ непрерывна по \mathbf{x} при любом фиксированном \mathbf{x} ; (2)

2. Функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет по \mathbf{x} условию Липшица с некоторой константой L :

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (t \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n) \quad (3)$$

Исследуется вопрос о существовании и единственности решения (НС), (НУ) и используется метод последовательных приближений для приближённого отыскания решения.

Замечание. Последовательные приближения. Пусть произвольная непрерывная функция

$$\varphi_0: [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{— произвольная непрерывная функция} \quad (4)$$

Последовательные приближения, соответствующие начальному приближению, определим с помощью рекуррентной формулы:

$$\varphi_{k+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int \mathbf{f}[s, \varphi_k(s)] ds \quad (5)$$



Заметим, что из (5) вытекают два равенства:

$$\varphi'_{k+1} = f[t, \varphi_k(t)] \quad (6)$$

$$\varphi_k(t_0) = x_0 \quad (7)$$

Формулировка теоремы Коши – Пикара . Пусть выполнены условия (1) – (3). Тогда:

- 1) Задача (НС), (НУ) имеет на $[a, b]$ единственное решение φ ;
- 2) Последовательные приближения (4), (5) сходятся на $[a, b]$ к φ , причём справедлива следующая оценка погрешности k -го приближения:

$$\|\varphi_k(t) - \varphi(t)\| \leq L_2 \frac{c^k}{k!}, \quad (8)$$

где

$$L_2 = L_1 e^c, \quad L_1 = \|\varphi_0 - \varphi_1\|, \quad c = L(b - a),$$

L – константа Липшица (3).

Доказательство состоит из четырёх лемм.



Приведём примеры неединственности теоремы Коши – Пикара.

Пример 1. Рассматривается задача Коши:

$$\begin{cases} x'(t) = 2\sqrt{x(t)} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Решение.

1. Задача имеет очевидное **тривиальное** решение: $x(t) = 0$.

2. Помимо него существует ещё одно решение. Интегрируя уравнение находим:

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int dt + C \rightarrow \sqrt{x} = t + C \rightarrow x(t) = (t + C)^2$$

С учётом начального условия $x(0) = 0$, окончательно получаем второе решение:

$$x(t) = t^2$$

Теорема единственности не «сработала», так как при $x = 0$ **не выполняются условия Липшица**. Правая часть этого уравнения в точке имеет бесконечную производную по x .



Пример 2. Отсутствие локальной разрешимости.

Рассматривается задача Коши:

$$\begin{cases} x' = -\mathit{sign}(x) + \frac{1}{2}, & x \in \mathbf{R}. \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Решение. Задача не имеет решения ни на каком промежутке. **Причина:** разрывность правой части уравнения (3) в точке $x = 0$.

Пример 3. Отсутствие глобальной разрешимости.

Рассматривается задача Коши:

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) + 1 & (I) \\ x(0) = 0 & (II) \end{cases}$$

Решение. Задача не имеет решения ни на каком промежутке.

Задача легко интегрируется:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \int dt + C \rightarrow \mathit{arctg}(x) = t + C \rightarrow x(t) = \mathit{tg}(t + C) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t + C < \frac{\pi}{2}\right), \quad (III)$$

Подчеркнём, что (I) (III). Это означает, в частности, что вопрос о разрешимости задачи (I)- (II) скажем на промежутке \mathbf{R} имеет отрицательный ответ, так как область определения любого решения не выходит за рамки интервала $\left(-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C\right)$. Этот эффект связан с тем, что правая часть $x^2 + 1$ в уравнении (I) при $x \rightarrow \infty$ растёт «слишком быстро» по сравнению с x .



БЛАГОДАРЮ

ЗА

ВНИМАНИЕ

