Лекция № 3.

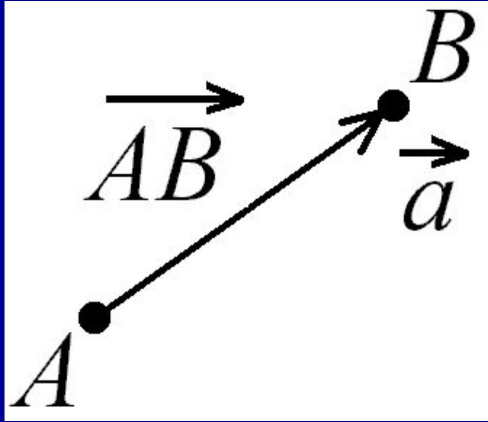
Аналитическая геометрия

Геометрические объекты описывают формулами. Геометрические задачи решают не с помощью геометрических построений, а тоже с помощью формул.

Векторы. Линейные операции над векторами. Разложение вектора по базису

Скалярная величина, скаляр – число.

Определение. **Вектор** – направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, **a**



Определение. Расстояние между начальной и конечной точками вектора называется **модулем** или **длиной** вектора:

$$|\overrightarrow{AB}|, \ |\vec{a}|$$

Определение. Вектор, у которого конец совпадает с началом, называется **нуль-вектором**: $\vec{0}$, $|\vec{0}| = 0$.

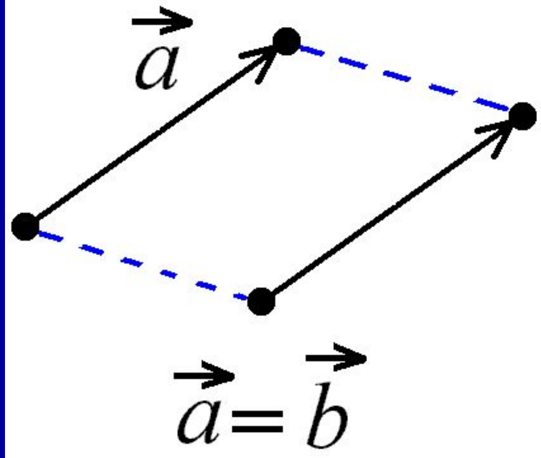
По определению нуль-вектор параллелен любому вектору.

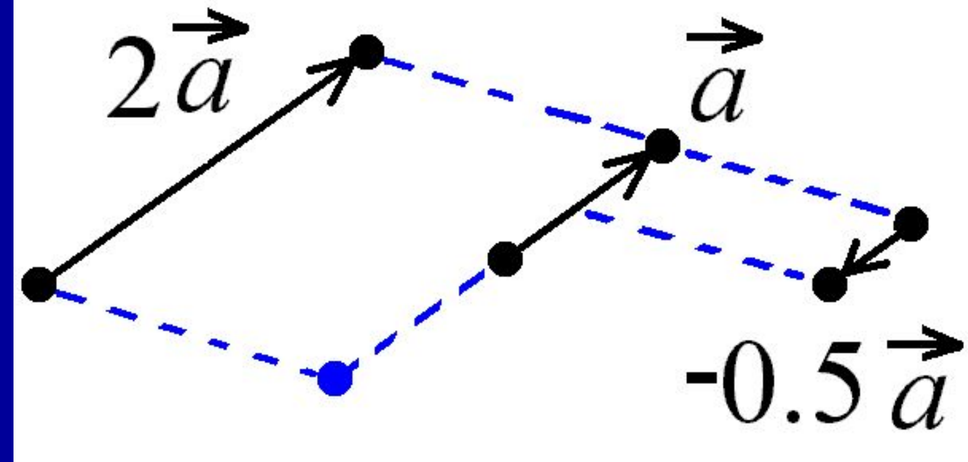
Определение. Вектор, имеющий длину равную единице, называется **единичным** вектором : $|\vec{a}| = 1$.

Определение. Параллельные векторы называются **коллинеарными**: $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$;
если коллинеарные векторы имеют одинаковые направления, то они называются **сонаправленными**: $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$;
если параллельные векторы имеют противоположные направления, то они называются **противоположно направленными**: $\overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b}$.
Определение. Векторы, расположенные в одной плоскости называются **компланарными**.

Линейные операции над векторами

Определение. Два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называются **равными**: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$, если они коллинеарны $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$, сонаправленны $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$ и имеют одинаковую длину $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$.





вектор не меняется, если его переместить в пространстве параллельно самому себе

Определение. Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется новый вектор $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, параллельный данному, имеющий длину $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и либо сонаправленный с вектором $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, либо противоположно направленный с $\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Теорема. *Если вектора* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *коллинеарны и длина вектора* $\vec{a}$ *не ноль, т.е.* $|\vec{a}| \neq 0$, *то существует единственное число* λ, *что*

$$\vec{b} = \lambda \vec{a},$$

т.е. вектор $\vec{b}$ **линейно выражается через вектор** $\vec{a}$.

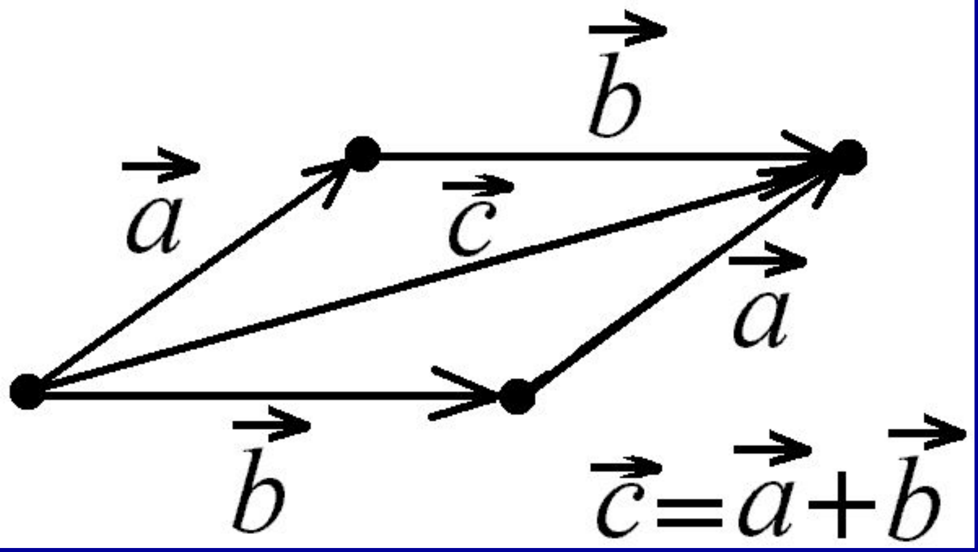
Доказательство: если параллельные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то $\lambda = |\vec{b}|/|\vec{a}|$. А если векторы противоположно направлены, то $\lambda = -|\vec{b}|/|\vec{a}|$.

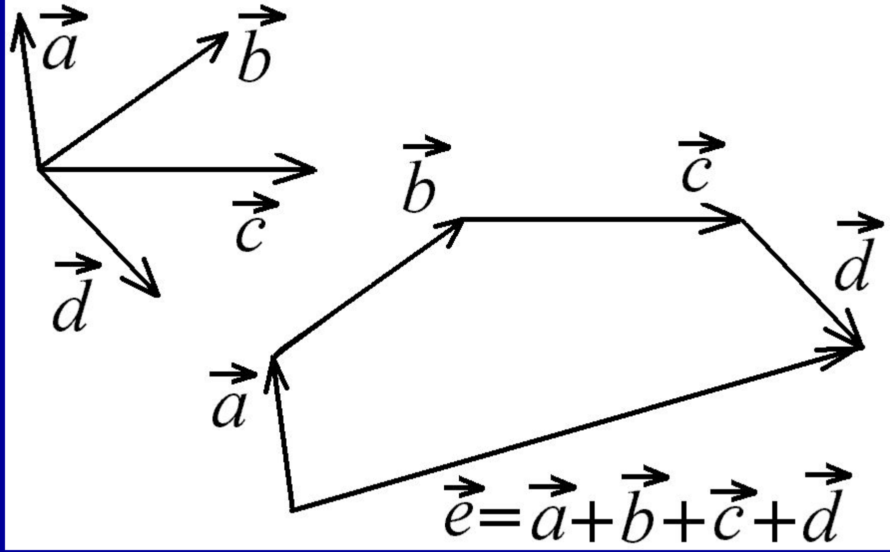
Определение. **Сумма** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть новый вектор $\vec{c}$:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

к концу вектора $\vec{a}$ подставляется начало вектора $\vec{b}$ и из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ проводится вектор $\vec{c}$.

Сумма $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ определяется и по правилу параллелограмма.





Для сложения нескольких векторов надо к концу очередного слагаемого подставлять начало следующего слагаемого, а потом соединить начало самого первого слагаемого с концом последнего слагаемого.

Свойства сложения векторов

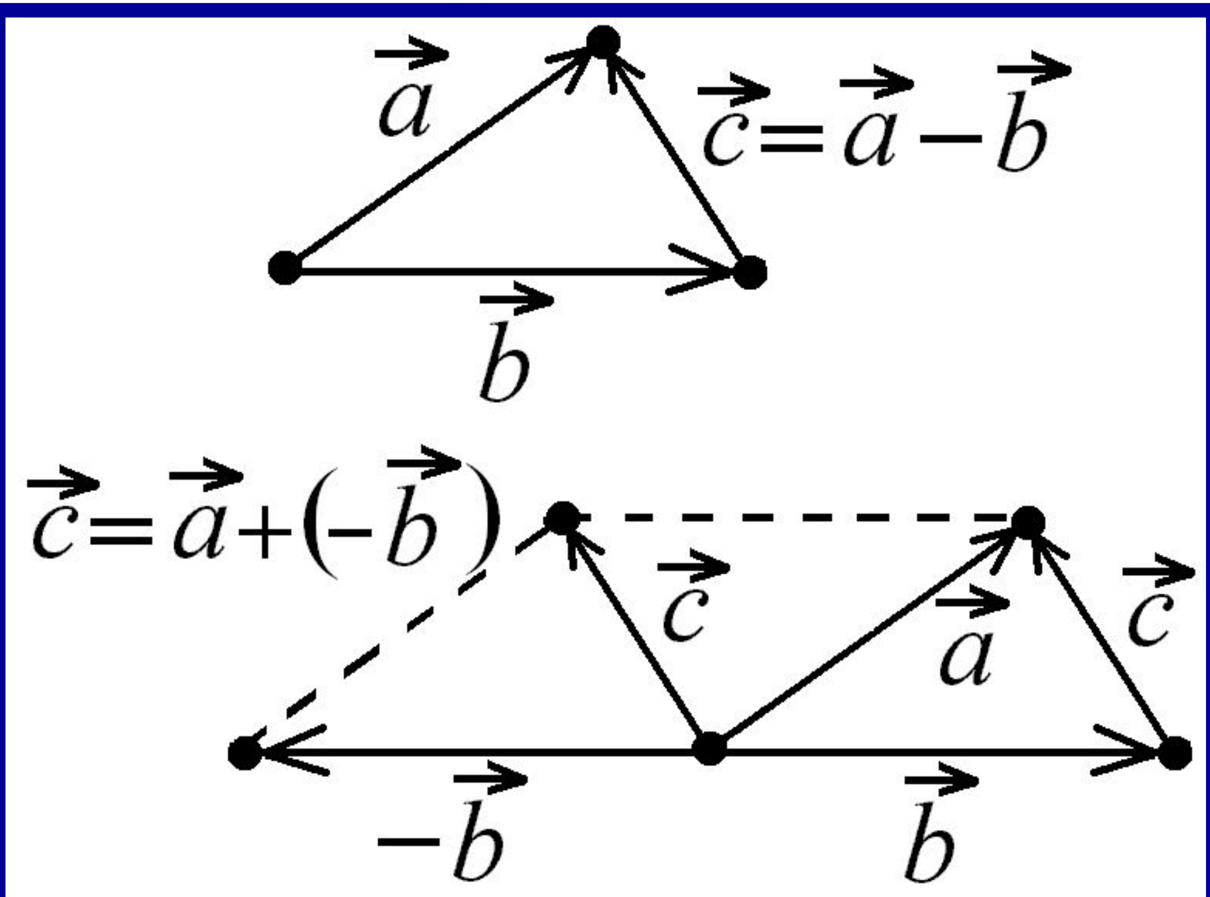
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$$

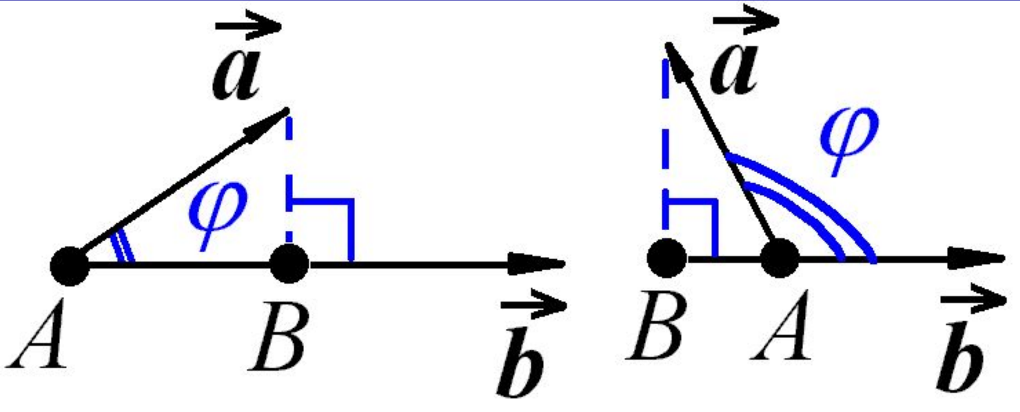
или с помощью второй диагонали параллелограмма: вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ должны иметь общее начало и проводить $\vec{c}$ из конца $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$, т.к. $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.



Определение. **Проекция** вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$: $\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}$ есть число

$$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$$

Если угол между векторами $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ – *угол* φ – *есть угол острый, то* $\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} > 0$. *Если* φ – *тупой, то* $\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} < 0$.



$$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \pm|AB|$$

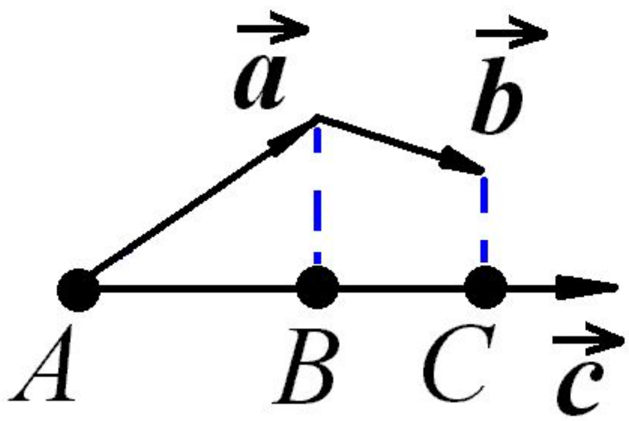
Свойства проекции вектора на вектор:

проекция суммы равна сумме проекций

$$\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{b}\,;$$

числовой сомножитель можно выносить за знак проекции

$$\text{пр}_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = \lambda\,\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}$$



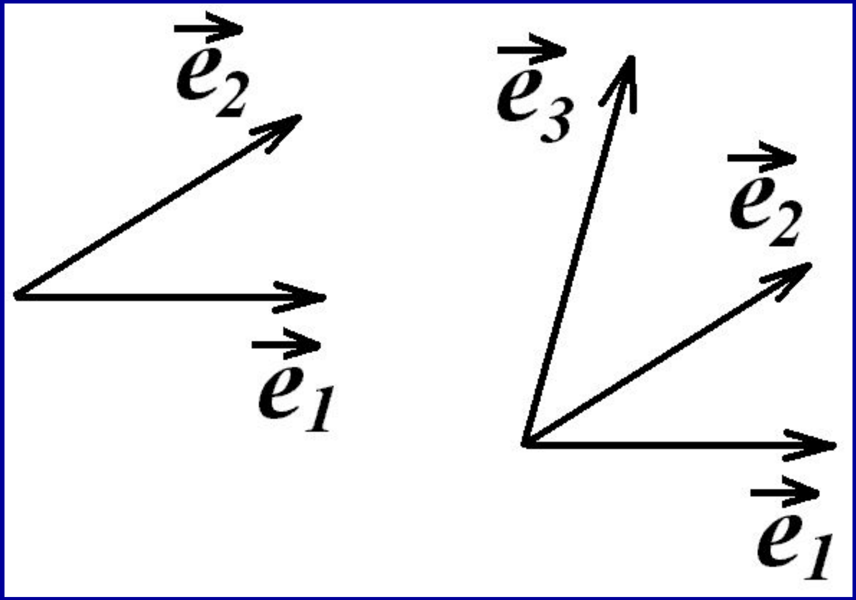
$$\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{b}$$

Разложение вектора по базису

Определение. **Базисом на плоскости** называются любые два неколлинеарных вектора

$$\vec{e_1}, \quad \vec{e_2}: \quad \vec{e_1} \nparallel \vec{e_2}$$

Определение. **Базисом в пространстве** называются любые три вектора $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, не лежащие в одной плоскости, т.е. не компланарные.



Из определений следует, что среди векторов, образующих базис, заведомо нет нулевых векторов:

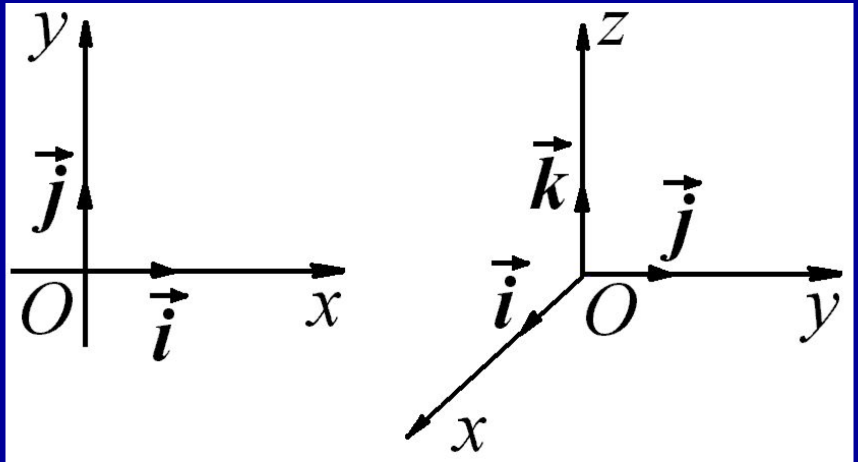
$$|\vec{e_i}| \neq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Если $|\vec{e}_i| = 1, i = 1, 2, 3$, то базис называется **единичным**. Если

$$\vec{e_1} \perp \vec{e_2}, \quad \vec{e_1} \perp \vec{e_3}, \quad \vec{e_2} \perp \vec{e_3},$$

то базис называется **ортогональным** или **декартовым**. Векторы $\vec{e_1} = \vec{i}$, $\vec{e_2} = \vec{j}$, $\vec{e_3} = \vec{k}$ образуют единичный декартов базис на плоскости и в пространстве:

$$\vec{i}, \quad \vec{j}, \quad \vec{k} \; : \quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \quad \vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{i} \perp \vec{k}, \quad \vec{j} \perp \vec{k}$$



Теорема. *Любой вектор можно разложить по базису, причем единственным образом, т.е. для любого вектора $\vec{a}$ существует единственный набор из трех чисел a_1, a_2, a_3 такой, что справедливо равенство*

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}, \tag{1}$$

вектор $\vec{a}$ линейно выражается через векторы $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$.

Определение. Числа a_1, a_2, a_3 – **координаты** вектора $\vec{a}$, представление (1) называется **разложением вектора $\vec{a}$ по заданному базису $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$,**

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} = \{a_1; a_2; a_3\} \tag{2}$$

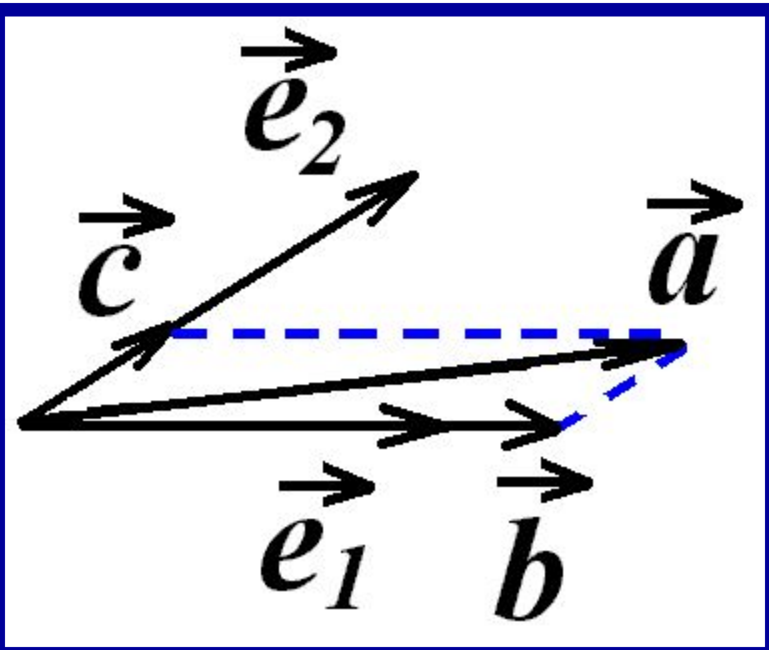
т.е. **вектор задан своими координатами.**

Вместо геометрического объекта – вектора рассматривается математический объект – упорядоченная тройка чисел **координаты вектора.**

Доказательство сначала для случая плоскости:
векторы $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{a}$ проводятся из общего начала;
из конца вектора $\vec{a}$ проводятся прямые, параллельные базисным векторам;
определяются вектора $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} \,||\, \vec{e_1} \Longrightarrow \vec{b} = a_1\vec{e_1}$, $\vec{c} \,||\, \vec{e_2} \Longrightarrow \vec{c} = a_2\vec{e_2}$

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$$



Случай пространства:

$$\vec{a} = \vec{d} + \vec{f}$$

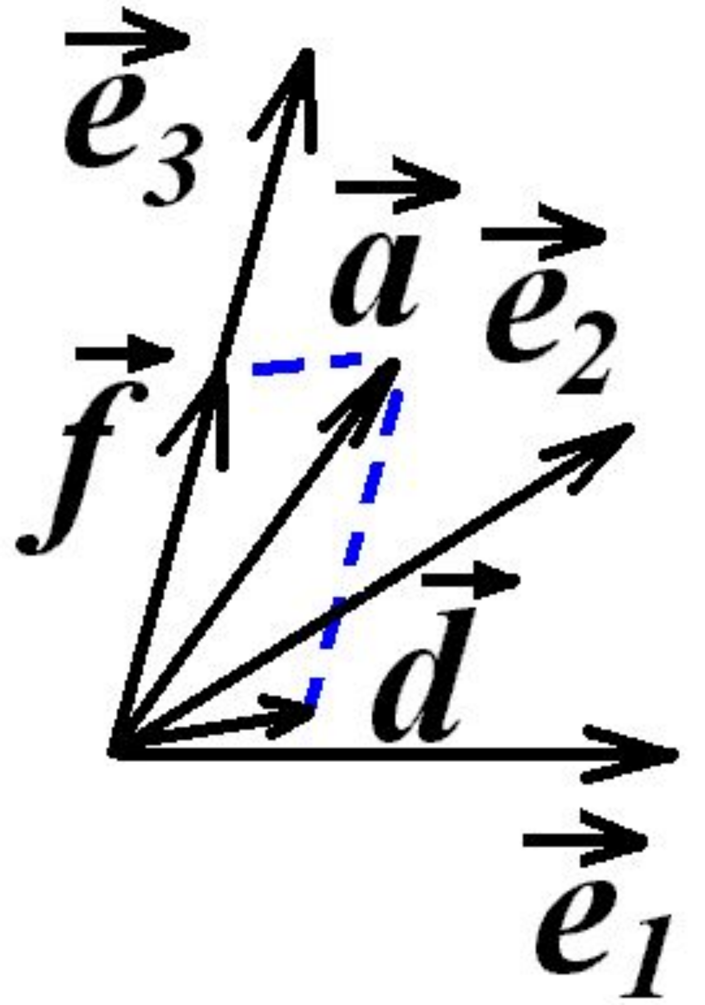
$\vec{d}$ в плоскости векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$

$$\vec{d} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2};$$

$\vec{f} \,||\, \vec{e_3}$; $\quad \vec{f} = a_3\vec{e_3}$

т.е.

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} =$$
$$= \{a_1, a_2, a_3\}$$



Пусть базис декартов: $\vec{e_1} = \vec{i}$, $\vec{e_2} = \vec{j}$, $\vec{e_3} = \vec{k}$

$$a_1 = \text{пр}_{\vec{i}}\, \vec{a}, \quad a_2 = \text{пр}_{\vec{j}}\, \vec{a}, \quad a_3 = \text{пр}_{\vec{k}}\, \vec{a}$$

Определение.

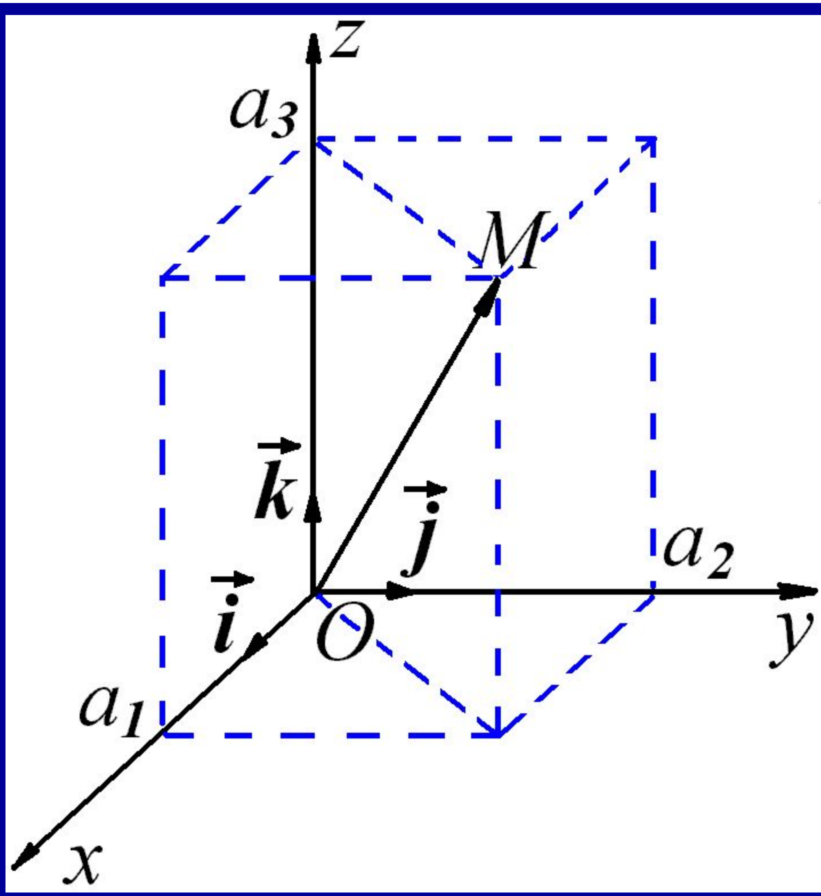
Если начало вектора $\vec{a}$ помещено в **начало координат** O, то вектор $\vec{a}$ называют **радиус-вектором**

$M(a_1, a_2, a_3)$ — точка;

$\overrightarrow{OM} = \{a_1; a_2; a_3\}$ – вектор

по теореме Пифагора

$$|\overrightarrow{OM}| = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



Линейные операции над векторами, заданными своими координатами

Теорема. **Равенство векторов.** *Вектор* $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ *равен вектору* $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ *тогда и только тогда, когда равны соответствующие координаты этих векторов*

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3$$

Доказательство:

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}; \quad \vec{b} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}$$

по условию теоремы

$$a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}$$

из единственности разложения вектора по базису

$$a_1 = b_1; \quad a_2 = b_2; \quad a_3 = b_3$$

Теорема. **Умножение вектора на число.** *Чтобы вектор* $\overrightarrow{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ *умножить на число* λ, *надо каждую координату исходного вектора умножить на это число*

$$\lambda\overrightarrow{a} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\}$$

$$\overrightarrow{b} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\} || \overrightarrow{a}$$

Теорема. **Параллельность векторов.** *Векторы* $\overrightarrow{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ *и* $\overrightarrow{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ *параллельны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны*

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \lambda$$

Теорема. **Сложение и вычитание векторов.** *Чтобы сложить (вычесть) векторы* $\overrightarrow{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ *и* $\overrightarrow{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$, *надо сложить (вычесть) соответствующие координаты*

$$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = \{a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3\}$$

Теорема. **Определение вектора через координаты его начала и конца.** *Если у вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *известны координаты начальной точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и конечной точки* $M_2(x_2, y_2, z_2)$, *то для определения координат вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *надо из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала вектора*

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$