

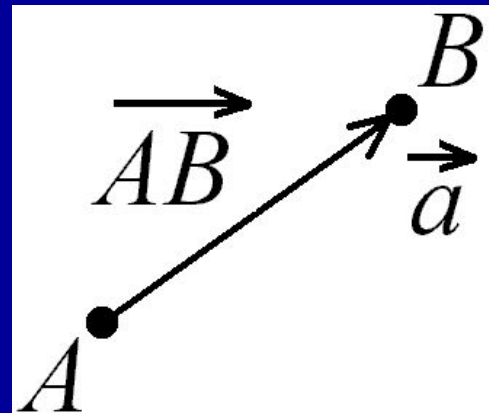
Аналитическая геометрия

Геометрические объекты описывают формулами.

Геометрические задачи решают не с помощью геометрических построений, а тоже с помощью формул.

Векторы. Линейные операции над векторами.

Разложение вектора по базису



Скалярная величина, скаляр – число.

Определение. Вектор – направленный отрезок

\overrightarrow{AB} , \vec{a} , a

Определение. Расстояние между начальной и конечной точками вектора называется **модулем** или **длиной** вектора:

$$|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$$

Определение. Вектор, у которого конец совпадает с началом, называется **нуль-вектором**: $\vec{0}$, $|\vec{0}| = 0$.

По определению нуль-вектор параллелен любому вектору.

Определение. Вектор, имеющий длину равную единице, называется **единичным** вектором : $|\vec{a}| = 1$.

Определение. Параллельные векторы называются **коллинеарными**: $\vec{a} \parallel \vec{b}$;

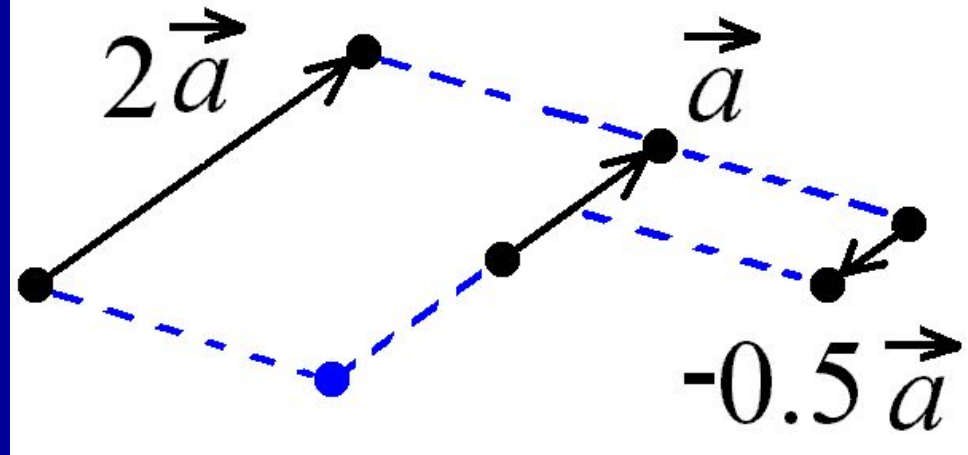
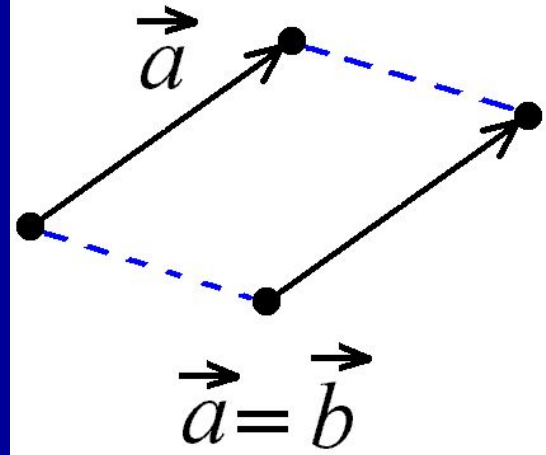
если коллинеарные векторы имеют одинаковые направления, то они называются **сонаправленными**: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$;

если параллельные векторы имеют противоположные направления, то они называются **противоположно направленными**: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Определение. Векторы, расположенные в одной плоскости называются **компланарными**.

Линейные операции над векторами

Определение. Два вектора \vec{a} и \vec{b} называются **равными**: $\vec{a} = \vec{b}$, если они коллинеарны $\vec{a} \parallel \vec{b}$, сонаправленны $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и имеют одинаковую длину $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.



вектор не меняется, если его переместить в пространстве параллельно самому себе

Определение. Произведением вектора \vec{a} на число λ называется новый вектор $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, параллельный данному, имеющий длину $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и либо сонаправленный с вектором \vec{a} , если $\lambda > 0$, либо противоположно направленный с \vec{a} , если $\lambda < 0$.

Теорема. Если вектора \vec{a} и \vec{b} коллинеарны и длина вектора \vec{a} не ноль, т.е. $|\vec{a}| \neq 0$, то существует единственное число λ , что

$$\vec{b} = \lambda \vec{a},$$

т.е. вектор \vec{b} линейно выражается через вектор \vec{a} .

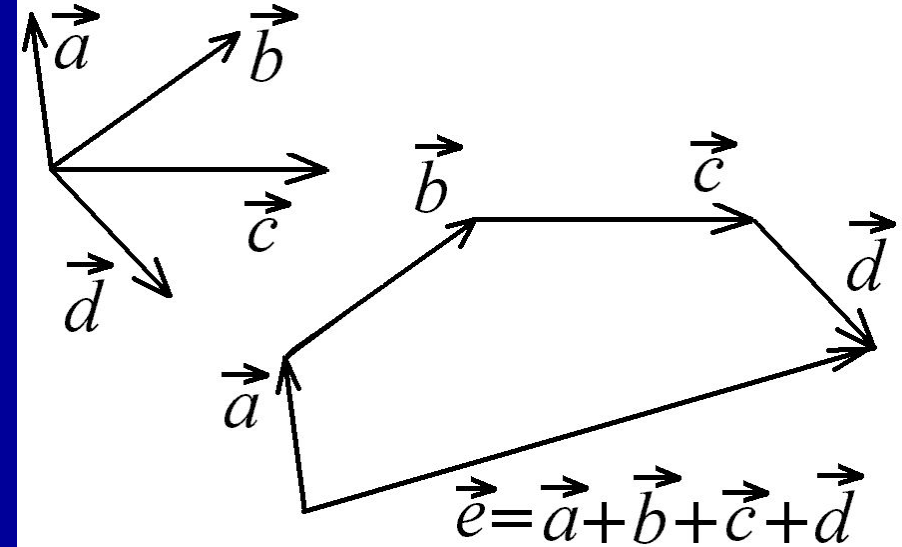
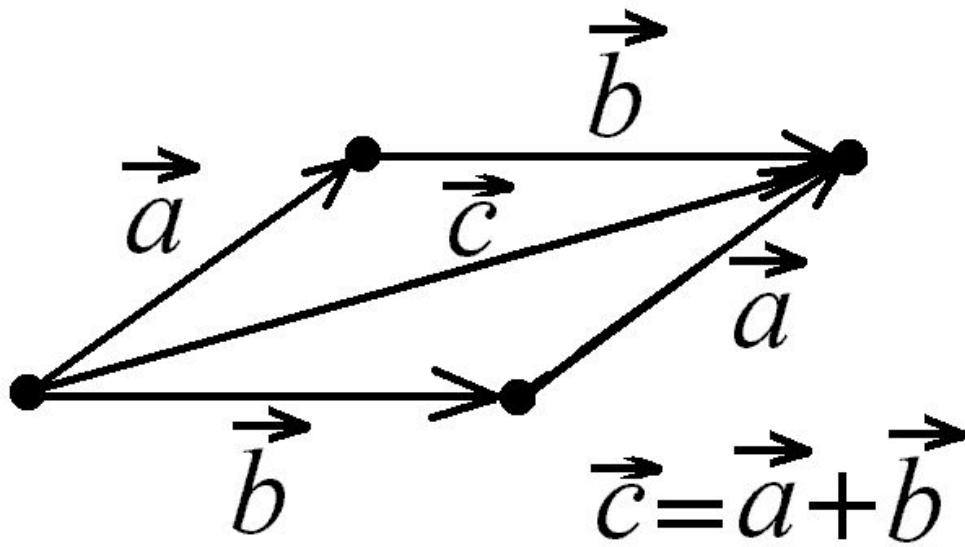
Доказательство: если параллельные векторы \vec{a} и \vec{b} сонаправлены, то $\lambda = |\vec{b}|/|\vec{a}|$. А если векторы противоположно направлены, то $\lambda = -|\vec{b}|/|\vec{a}|$.

Определение. Сумма векторов \vec{a} и \vec{b} есть новый вектор \vec{c} :

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

к концу вектора \vec{a} подставляется начало вектора \vec{b} и из начала вектора \vec{a} в конец вектора \vec{b} проводится вектор \vec{c} .

Сумма $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ определяется и по правилу параллелограмма.



Для сложения нескольких векторов надо к концу очередного слагаемого подставлять начало следующего слагаемого, а потом соединить начало самого первого слагаемого с концом последнего слагаемого.

Свойства сложения векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

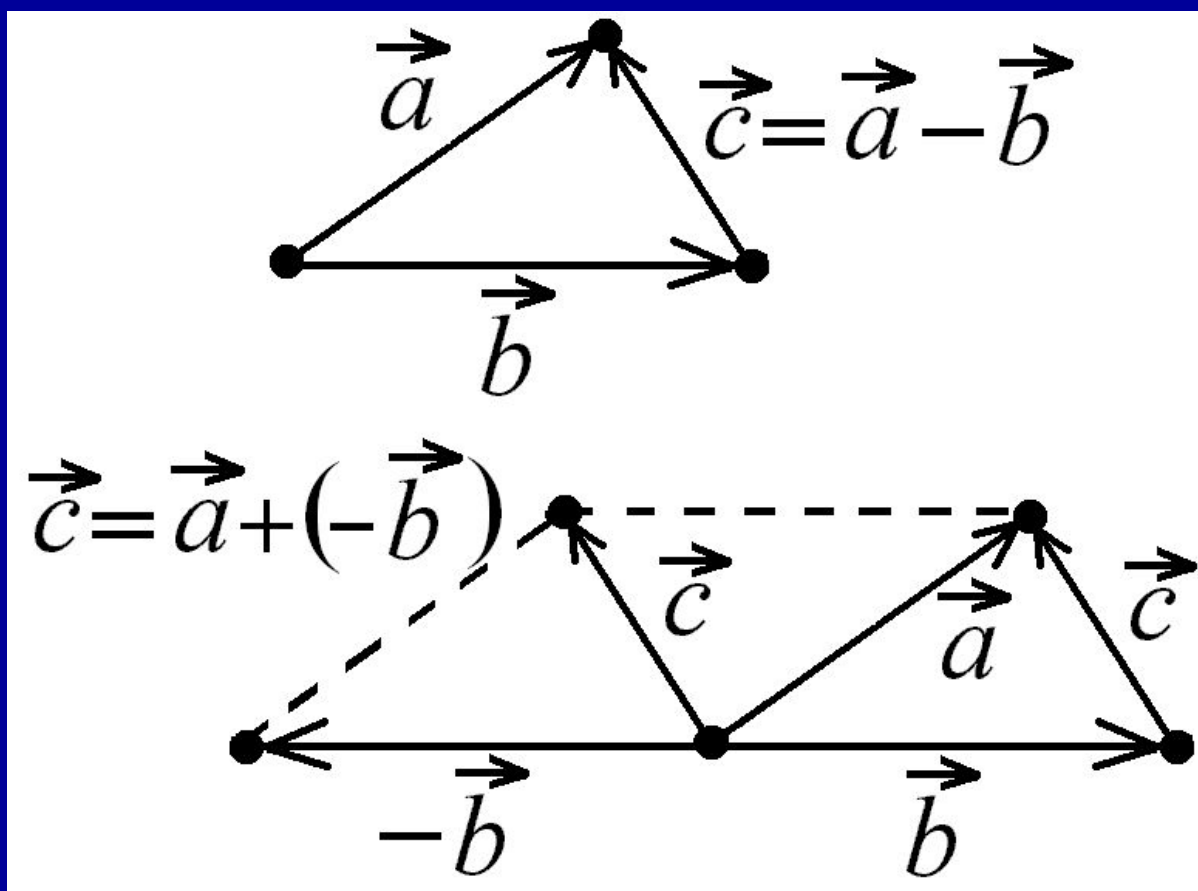
$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

Разность векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$$

или с помощью второй диагонали параллелограмма:

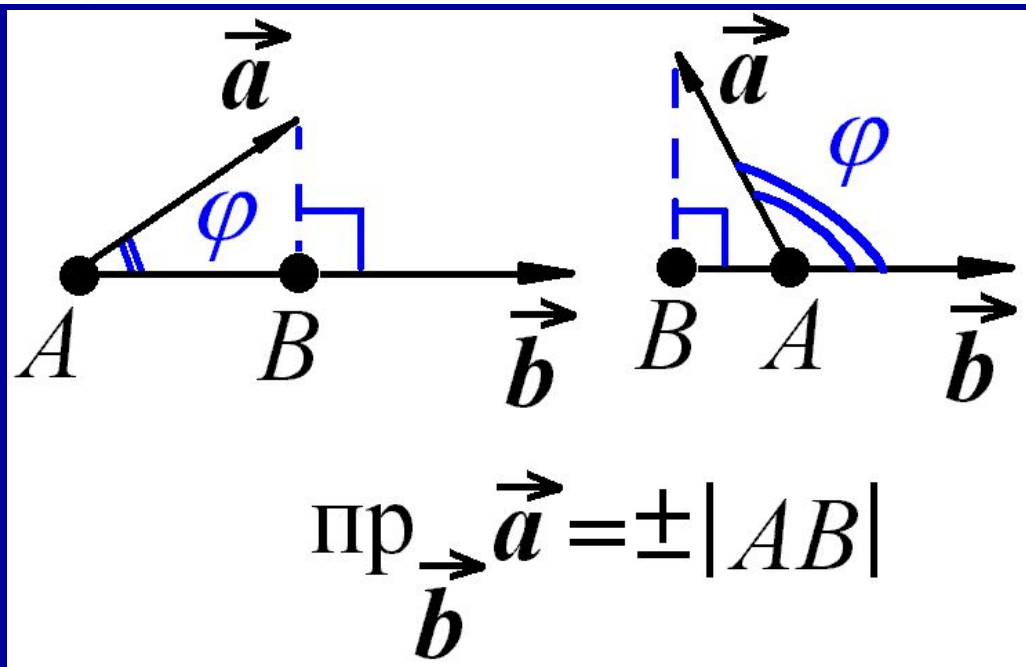
вектора \vec{a} и \vec{b} должны иметь общее начало и проводить \vec{c} из конца \vec{b} в конец вектора \vec{a} , т.к. $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.



Определение. Проекция вектора \vec{a} на вектор \vec{b} : $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$ есть число

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$$

Если угол между векторами \vec{a} и \vec{b} – угол φ – есть угол острый, то $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} > 0$. Если φ – тупой, то $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} < 0$.



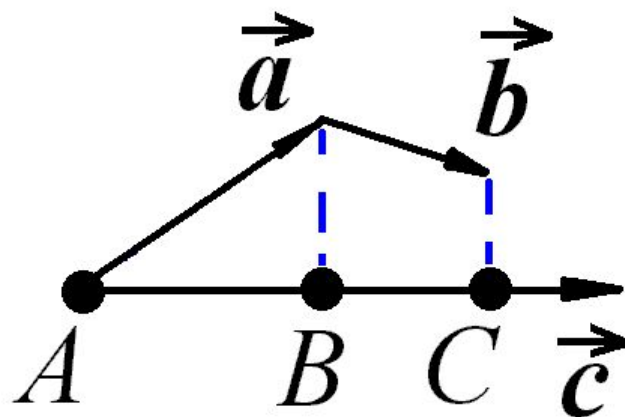
Свойства проекции вектора на вектор:

проекция суммы равна сумме проекций

$$\text{пр}_{\vec{c}} (\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_{\vec{c}} \vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}} \vec{b};$$

числовой сомножитель можно выносить за знак проекции

$$\text{пр}_{\vec{b}} (\lambda \vec{a}) = \lambda \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$$



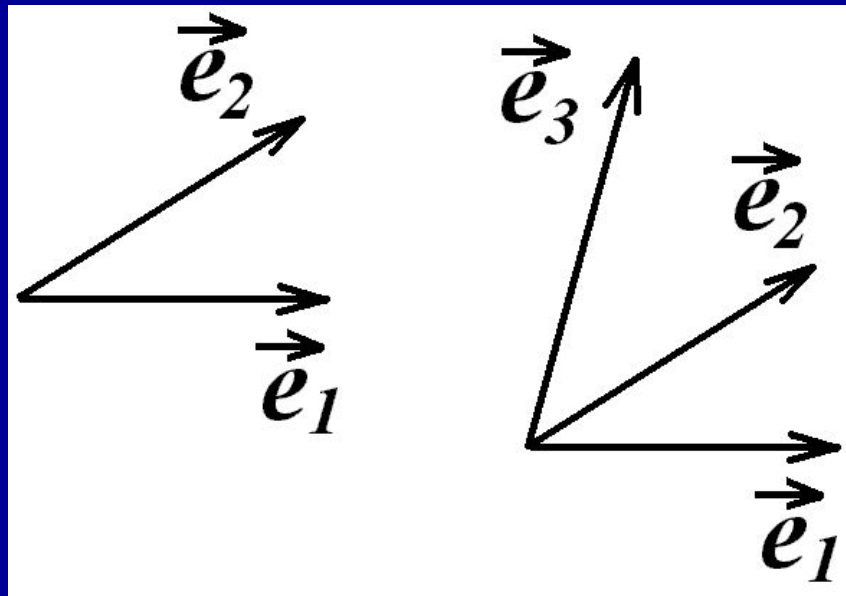
$$\text{пр}_{\vec{c}} (\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_{\vec{c}} \vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}} \vec{b}$$

Разложение вектора по базису

Определение. **Базисом на плоскости** называются любые два неколлинеарных вектора

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2 : \vec{e}_1 \parallel \vec{e}_2$$

Определение. **Базисом в пространстве** называются любые три вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, не лежащие в одной плоскости, т.е. не компланарные.



Из определений следует, что среди векторов, образующих базис, заведомо нет нулевых векторов:

$$|\vec{e}_i| \neq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Если $|\vec{e}_i| = 1, i = 1, 2, 3$, то базис называется **единичным**.

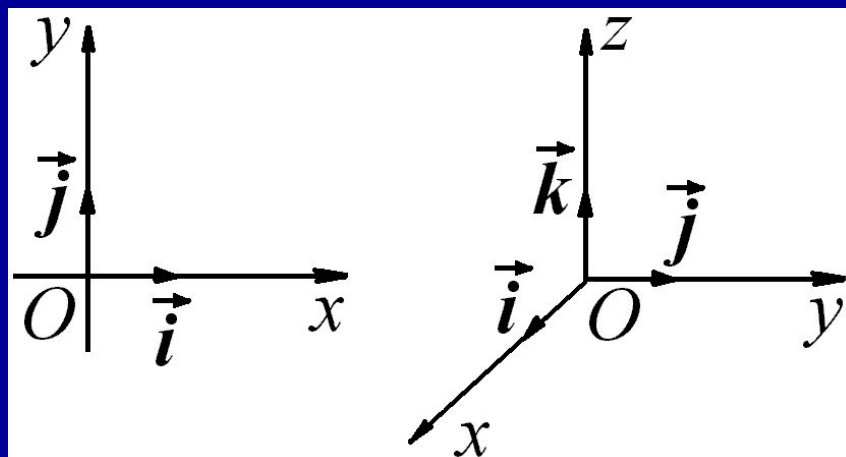
Если

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3,$$

то базис называется **ортогональным** или **декартовым**.

Векторы $\vec{e}_1 = \vec{i}, \vec{e}_2 = \vec{j}, \vec{e}_3 = \vec{k}$ образуют единичный декартов базис на плоскости и в пространстве:

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} : |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \quad \vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{i} \perp \vec{k}, \quad \vec{j} \perp \vec{k}$$



Теорема. *Любой вектор можно разложить по базису, причем единственным образом, т.е. для любого вектора \vec{a} существует единственный набор из трех чисел a_1, a_2, a_3 такой, что справедливо равенство*

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \quad (1)$$

вектор \vec{a} линейно выражается через векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Определение. Числа a_1, a_2, a_3 – **координаты** вектора \vec{a} , представление (1) называется **разложением вектора \vec{a} по заданному базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$,**

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \{a_1; a_2; a_3\} \quad (2)$$

т.е. вектор задан своими координатами.

Вместо геометрического объекта – вектора рассматривается математический объект –

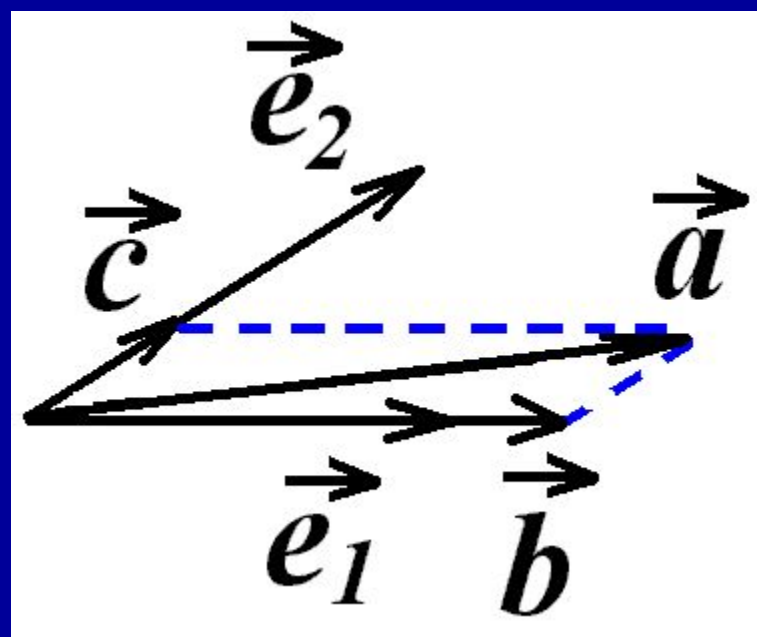
упорядоченная тройка чисел координаты вектора.

Доказательство сначала для случая плоскости:
векторы \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{a} проводятся из общего начала;
из конца вектора \vec{a} проводятся прямые, параллельные
базисным векторам;

определяются вектора \vec{b} , \vec{c} :

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{b} \parallel \vec{e}_1 \implies \vec{b} = a_1 \vec{e}_1, \quad \vec{c} \parallel \vec{e}_2 \implies \vec{c} = a_2 \vec{e}_2$$

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$$



Случай пространства:

$$\vec{a} = \vec{d} + \vec{f}$$

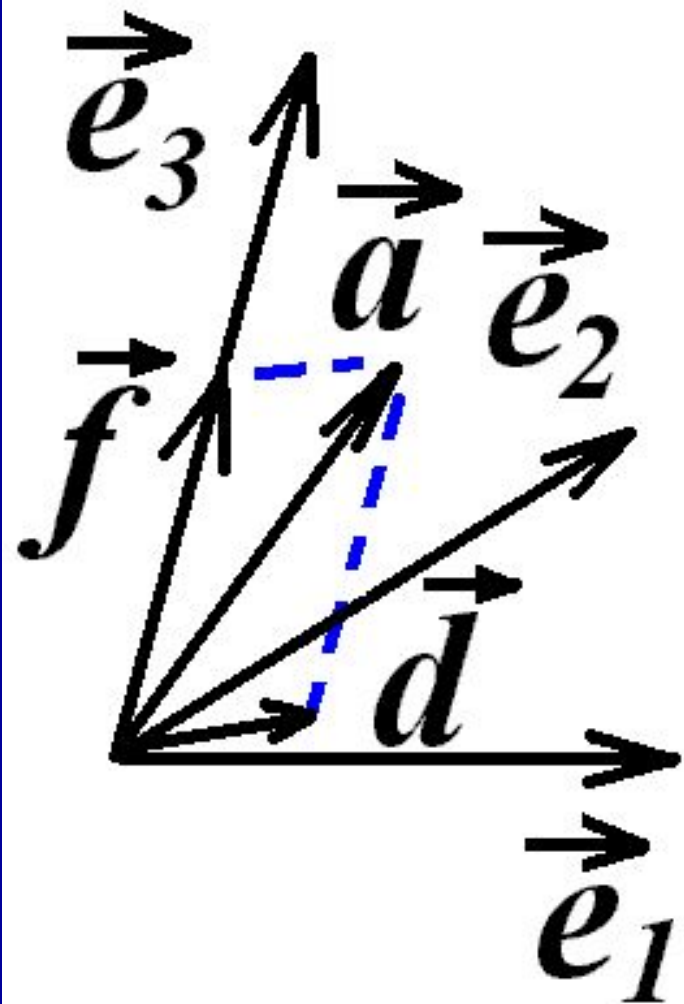
\vec{d} в плоскости векторов \vec{e}_1, \vec{e}_2

$$\vec{d} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2;$$

$$\vec{f} \parallel \vec{e}_3; \quad \vec{f} = a_3 \vec{e}_3$$

т.е.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \\ &= \{a_1, a_2, a_3\} \end{aligned}$$



Пусть базис декартов: $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$

$$a_1 = \text{пр}_{\vec{i}} \vec{a}, \quad a_2 = \text{пр}_{\vec{j}} \vec{a}, \quad a_3 = \text{пр}_{\vec{k}} \vec{a}$$

Определение.

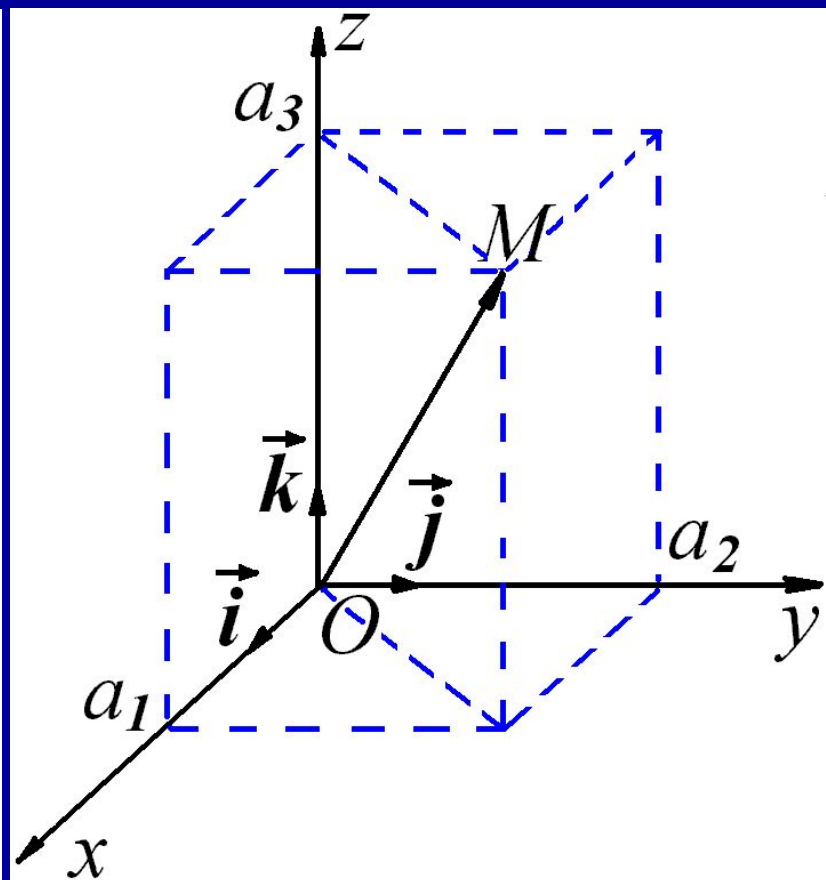
Если начало вектора \vec{a} помещено в **начало координат** O , то вектор \vec{a} называют **радиус-вектором**

$M(a_1, a_2, a_3)$ — точка;

$\vec{OM} = \{a_1; a_2; a_3\}$ — вектор

по теореме Пифагора

$$|\vec{OM}| = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



Линейные операции над векторами, заданными своими координатами

Теорема. Равенство векторов. Вектор $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ равен вектору $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ тогда и только тогда, когда равны соответствующие координаты этих векторов

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3$$

Доказательство:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3; \quad \vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$$

по условию теоремы

$$a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$$

из единственности разложения вектора по базису

$$a_1 = b_1; \quad a_2 = b_2; \quad a_3 = b_3$$

Теорема . Умножение вектора на число. Чтобы вектор $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ умножить на число λ , надо каждую координату исходного вектора умножить на это число

$$\lambda \vec{a} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\}$$

$$\vec{b} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\} \parallel \vec{a}$$

Теорема. Параллельность векторов. Векторы $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ и $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ параллельны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \lambda$$

Теорема. Сложение и вычитание векторов. Чтобы сложить (вычесть) векторы $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ и $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$, надо сложить (вычесть) соответствующие координаты

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3\}$$

Теорема. Определение вектора через координаты его начала и конца. Если у вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ известны координаты начальной точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и конечной точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то для определения координат вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ надо из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала вектора

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$