

08.02.22.

Тема:

Вычисление производной степенной функции.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:

<https://youtu.be/muwAE0Fjlec>

<https://youtu.be/iBhF3CiRK6Y>

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Правила дифференцирования

При вычислении производной используются следующие правила дифференцирования суммы, произведения и частного:

1. Производная суммы равна сумме производных:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x). \quad (1)$$

Подробно это свойство производной формулируется так: если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет производную, то их сумма также имеет производную и справедлива формула (1).

суммы
нескольких функций равна сумме производных этих функций, производная разности равна разности производных.

Задача

Найти производную функции:

$$1) f(x) = x^3 - x^2 + x - 3; \quad 2) f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\blacktriangleright 1) f'(x) = (x^3)' - (x^2)' + (x)' - (3)' = 3x^2 - 2x + 1;$$

$$2) f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}. \quad \blacktriangleleft$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$(cf(x))' = cf'(x). \quad (2)$$

Задача

Вычислить $f'(-2)$, если $f(x) = \frac{1}{4}x^5 - 3x^3 + 7x - 17$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright f'(x) &= \left(\frac{1}{4}x^5\right)' - (3x^3)' + (7x)' - (17)' = \frac{1}{4}(x^5)' - \\ &- 3(x^3)' + 7(x)' = \frac{5}{4}x^4 - 9x^2 + 7, \end{aligned}$$

$$f'(-2) = \frac{5}{4}(-2)^4 - 9(-2)^2 + 7 = -9. \triangleleft$$

3. Производная произведения:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (3)$$

Задача

Найти производную функции $f(x)g(x)$, если $f(x) = 3x^2 - 5$, $g(x) = 2x + 7$.

\blacktriangleright По формуле (3) находим

$$\begin{aligned} &(f(x)g(x))' = \\ &= (3x^2 - 5)'(2x + 7) + (3x^2 - 5)(2x + 7)' = \\ &= 6x(2x + 7) + (3x^2 - 5) \cdot 2 = 18x^2 + 42x - 10. \triangleleft \end{aligned}$$

4. Производная частного:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}. \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) справедливы при условии, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производную в точке x , причём в равенстве (4) $g(x) \neq 0$.

Задача

Найти производную функции $F(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

► Обозначим $x^3 = f(x)$, $x^2 + 1 = g(x)$. По формуле (4) находим $F'(x) = \frac{(x^3)'(x^2 + 1) - x^3(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$
 $= \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$. ◀

5. Производная сложной функции.

Рассмотрим функцию $F(x) = \log_2(x^2 + 1)$. Эту функцию можно рассматривать как сложную функцию $f(y) = \log_2 y$, где $y = g(x) = x^2 + 1$, т. е. как функцию $f(y)$, аргумент которой также является функцией $y = g(x)$. Иными словами, сложная функция — это функция от функции $F(x) = f(g(x))$. Производная сложной функции находится по формуле $F'(x) = f'(y)g'(x)$, где $y = g(x)$, т. е. по формуле

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x). \quad (5)$$

Рассмотрим примеры.

1) Пусть $F(x) = (2x + 1)^2 + 5(2x + 1)$.

Здесь $f(y) = y^2 + 5y$, $y = g(x) = 2x + 1$.

По формуле (5) находим $F'(x) = (2y + 5) \cdot (2x + 1)' =$
 $= (2y + 5) \cdot 2 = (2(2x + 1) + 5) \cdot 2 = 8x + 14$.

2) Пусть $F(x) = (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$. Здесь $f(y) = y^{\frac{3}{2}}$, $y = g(x) =$
 $= x^2 + 1$. По формуле (5) находим

$$F'(x) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} (x^2 + 1)' = \frac{3}{2} (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x \sqrt{x^2 + 1}.$$

Практическая часть.

805 Найти производную функции:

1) $x^2 + \frac{1}{x^3}$; 2) $x^3 + \frac{1}{x^2}$; 3) $2\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$; 4) $3\sqrt[6]{x} + 7\sqrt[14]{x}$.

810 Найти производную функции:

1) $(x^2 - x)(x^3 + x)$; 2) $(x + 2)\sqrt[3]{x}$; 3) $(x - 1)\sqrt{x}$.

1. Найдите производную функции:

1) $y = (2x + 3)^5$; 5) $y = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$; 9) $y = \frac{1}{4x + 5}$;
2) $y = \left(\frac{1}{3}x - 6\right)^{18}$; 6) $y = \sqrt{2x + 1}$; 10) $y = \left(\frac{x^2}{2} + 4x - 1\right)^{-6}$;