

Семинар 10

доцент Волков Н.П.

Занятие 10

Приведение к каноническому виду
уравнений параболического типа.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \quad (34)$$

После преобразований поворота и
параллельного переноса уравнение (34)
в параболическом случае приводится к виду

$$BY^2 + 2DX + C = 0 \quad (K_2)$$

689| 1) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$ (*)

Найдем $J_1 = 9 + 16 = 25$, $J_2 = \begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{vmatrix} = 144 - 144 = 0$
 \Rightarrow параболический тип.

Произведем преобразование поворота.

$$\operatorname{tg} \varphi_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 576}}{-24} = \frac{7 \pm 25}{-24}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{4}{3}$$

Возьмем φ_1 : $\cos \varphi_1 = \frac{4}{5}$, $\sin \varphi_1 = \frac{3}{5}$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}(4\tilde{x} - 3\tilde{y}) \\ y = \frac{1}{5}(3\tilde{x} + 4\tilde{y}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow & \frac{9}{25}(4\tilde{x} - 3\tilde{y})^2 - \frac{24}{25}(4\tilde{x} - 3\tilde{y})(3\tilde{x} + 4\tilde{y}) + \\ & + \frac{16}{25}(3\tilde{x} + 4\tilde{y})^2 - \frac{20}{5}(4\tilde{x} - 3\tilde{y}) + \frac{110}{5}(3\tilde{x} + 4\tilde{y}) - 50 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 \cdot \tilde{x}^2 + 0 \cdot \tilde{x} \cdot \tilde{y} + 625 \tilde{y}^2 + 1250 \tilde{x} + 2500 \tilde{y} = 1250$$

$$\Rightarrow \tilde{y}^2 + 4 \tilde{y} + 2 \tilde{x} = 2$$

$$\Rightarrow (\tilde{y}^2 + 4 \tilde{y} + 4) - 4 + 2 \tilde{x} = 2$$

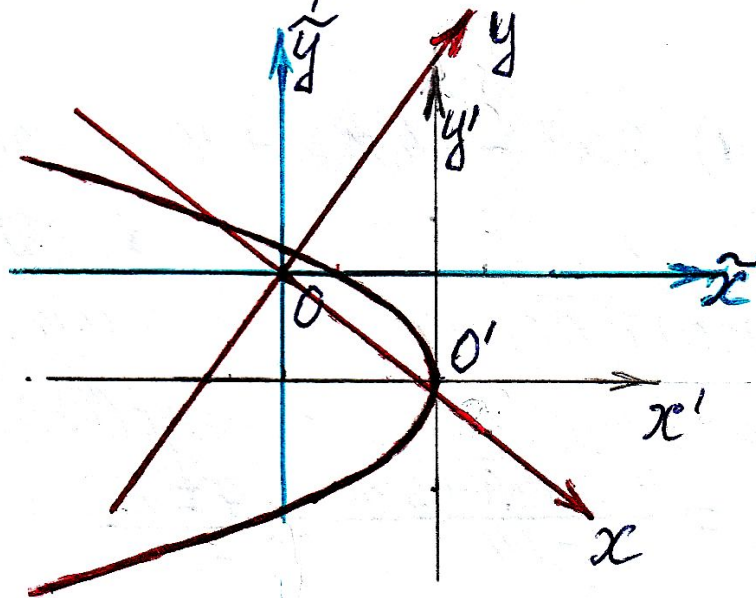
$$\Rightarrow (\tilde{y} + 2)^2 = -2(\tilde{x} - 3)$$

Заменим $y' = \tilde{y} + 2$, $x' = \tilde{x} - 3$

$\Rightarrow \boxed{(y')^2 = -2x'}$ - парабола (сопряженная)

после параллельного переноса:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x' + 3 \\ \tilde{y} = y' - 2 \end{cases}$$



$$689 \quad 3) \quad 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$$

$$J_1 = 16 + 9 = 25, \quad J_2 = \begin{vmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{vmatrix} = 144 - 144 = 0$$

\Rightarrow параболический тип

1) Поворот:

$$\operatorname{tg} \varphi_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 576}}{-24} = \frac{7 \pm 25}{24}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{3}{4}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{4}{3}$$

Возьмем угол $\varphi_2 \Rightarrow$ преобразование поворота:

$$\cos \varphi_2 = \frac{3}{5}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}(3\tilde{x} - 4\tilde{y}) \\ y = \frac{1}{5}(4\tilde{x} + 3\tilde{y}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{25}(3\tilde{x} - 4\tilde{y})^2 - \frac{24}{25}(3\tilde{x} - 4\tilde{y})(4\tilde{x} + 3\tilde{y}) + \frac{9}{25}(4\tilde{x} + 3\tilde{y})^2 -$$

$$- 32(3\tilde{x} - 4\tilde{y}) + 24(4\tilde{x} + 3\tilde{y}) + 425 = 0$$

$$0 \cdot \tilde{x}^2 + 0 \tilde{x}\tilde{y} + 25\tilde{y}^2 + 0 \cdot \tilde{x} + 200\tilde{y} + 425 = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{y}^2 + 8\tilde{y} + 17 = 0$$

$$\Rightarrow (\tilde{y} + 4)^2 + 1 = 0$$

Заменим: $y' = \tilde{y} + 4$

$$\Rightarrow \boxed{(y')^2 = -1} \text{ - две мнимые параллельные прямые.}$$

$$690 \quad 3) \quad 4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0 \quad (**)$$

$$T_1 = 4 + 9 = 13 > 0, \quad T_2 = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0$$

\Rightarrow параболический тип

Преобразование поворота.

$$\operatorname{tg} \varphi_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12} = \frac{5 \pm 13}{12}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{2}{3}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{3}{2}$$

$$\text{Возьмем угол } \varphi_1 \Rightarrow \cos \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

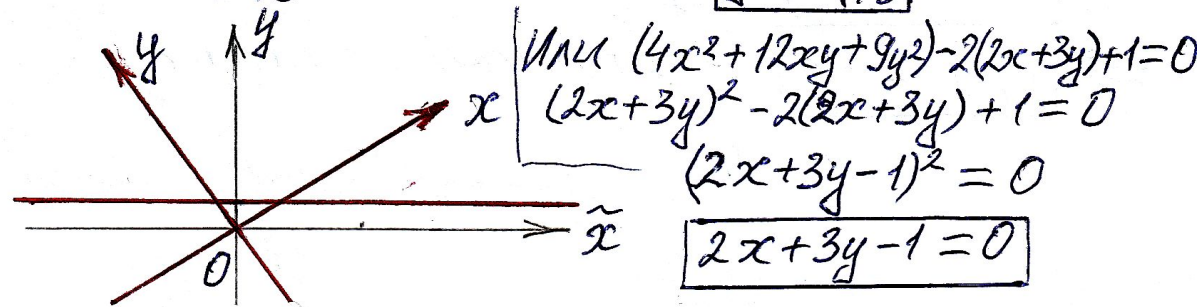
$$\sin \varphi_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\text{Поворот: } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{13}}(3\tilde{x} + 2\tilde{y}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2\tilde{x} + 3\tilde{y}) \end{cases}$$

$$(**) \Rightarrow \frac{4}{13}(3\tilde{x} + 2\tilde{y})^2 + \frac{12}{13}(3\tilde{x} + 2\tilde{y})(3\tilde{y} - 2\tilde{x}) + \\ + \frac{9}{13}(3\tilde{y} - 2\tilde{x})^2 - \frac{4}{\sqrt{13}}(3\tilde{x} + 2\tilde{y}) - \frac{6}{\sqrt{13}}(3\tilde{y} - 2\tilde{x}) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 0 \cdot \tilde{x}^2 + 0 \cdot \tilde{x}\tilde{y} + 169\tilde{y}^2 + 0 \cdot \tilde{x} - 26\sqrt{13}\tilde{y} + 13 = 0$$

$$\Rightarrow (13\tilde{y} - \sqrt{13})^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{13}}}$$



693 | 1) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x + y - 15 = 0$

$$J_1 = 1 + 4 = 5 > 0, J_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow параболический тип

$$(x^2 + 4xy + 4y^2) + 4x + y - 15 = 0$$

$$(x + 2y)^2 + 2(2x) + 2\left(\frac{1}{2}y\right) - 15 = 0$$

3) $25x^2 - 20xy + 4y^2 + 3x - y + 11 = 0$

$$J_1 = 25 + 4 = 29 > 0, J_2 = \begin{vmatrix} 25 & -10 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = 100 - 100 = 0$$

\Rightarrow параболический тип.

$$(25x^2 - 20xy + 4y^2) + 3x - y + 11 = 0$$

$$(5x - 2y)^2 + 2\left(\frac{3}{2}x\right) - 2\left(\frac{1}{2}y\right) + 11 = 0$$

5) $9x^2 - 42xy + 49y^2 + 3x - 2y - 24 = 0$

$$J_1 = 9 + 49 = 58 > 0, J_2 = \begin{vmatrix} 9 & -21 \\ -21 & 49 \end{vmatrix} = 441 - 441 = 0$$

\Rightarrow параболический тип

$$(9x^2 - 42xy + 49y^2) + 3x - 2y - 24 = 0$$

$$(3x - 7y)^2 + 2\left(\frac{3}{2}x\right) - 2y - 24 = 0$$

$$697 | 1) 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 120x + 90y = 0$$

Выпишем инварианты

$$J_1 = 9 + 16 = 25 > 0, \quad J_2 = \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{vmatrix} = 144 - 144 = 0$$

\Rightarrow параболический тип.

$$J_3 = \begin{vmatrix} 9 & 12 & -60 \\ 12 & 16 & 45 \\ -60 & 45 & 0 \end{vmatrix} = -60(12 \cdot 45 + 16 \cdot 60) - 45(9 \cdot 45 + 12 \cdot 60) = -90000 - 50625 = -140625 \neq 0$$

\Rightarrow парабола

$$U_3 (K_2): BY^2 + 2DX + C = 0$$

$$\Rightarrow J_1 = B = 25, \quad J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = 0,$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & D \\ 0 & B & 0 \\ D & 0 & C \end{vmatrix} = -B \cdot D^2 = -140625$$

$$\Rightarrow D^2 = \frac{-140625}{-25} = 5625 \Rightarrow D = \pm 75$$

$$(K_2) \Rightarrow Y^2 = 2\left(-\frac{D}{B}\right)X - \frac{C}{B}$$

$$\Rightarrow p = -\frac{D}{B} = \frac{75}{25} = 3 \quad (D = -75, \text{ т.к. } p > 0)$$

Итак, $p = 3$

$$697) 3) x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 14y + 29 = 0$$

Вычислим инварианты

$$J_1 = 1 + 1 = 2 > 0, J_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$$

параболический тип.

$$J_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -7 \\ 3 & -7 & 29 \end{vmatrix} = 1 \cdot (29 - 49) + 1 \cdot (-29 + 21) + 3(7 - 3) = \\ = -20 - 8 + 12 = -16 < 0$$

Рассмотрим (K_2) : $BY^2 + 2DX + C = 0$

$$J_1 = B = 2, J_2 = 0, J_3 = -BD^2 = -16$$

$$\Rightarrow B = 2, D^2 = 8 \Rightarrow D = \pm 2\sqrt{2}$$

$$K_3(K_2) \quad p = -\frac{D}{B} = \sqrt{2} \quad \text{при } D = -2\sqrt{2}$$

Итак, $p = \sqrt{2}$

$$699) 2) 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 20x - 30y - 11 = 0$$

Найдем инварианты

$$J_1 = 4 + 9 = 13 > 0, J_2 = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow параболический тип.

$$J_3 = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 10 \\ -6 & 9 & -15 \\ 10 & -15 & -11 \end{vmatrix} = 4(-99 - 225) + 6(66 + 150) + \\ + 10(90 - 90) = -1296 + 1296 + 0 = 0$$

\Rightarrow вырожденная парабола.

$$(4x^2 - 12xy + 9y^2) + 10(2x - 3y) - 11 = 0$$

$$(2x - 3y)^2 + 10(2x - 3y) - 11 = 0$$

$$z = 2x - 3y \Rightarrow z^2 + 10z - 11 = 0 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = -11$$

$$\Rightarrow (2x - 3y - 1)(2x - 3y + 11) = 0$$

2 параллельные прямые.

$$\boxed{\ell_1: 2x - 3y - 1 = 0 \text{ и } \ell_2: 2x - 3y + 11 = 0}$$

$$\underline{700} \quad 2) \quad 9x^2 + 30xy + 25y^2 + 42x + 70y + 49 = 0$$

$$J_1 = 9 + 25 = 34 > 0, \quad J_2 = \begin{vmatrix} 9 & 15 \\ 15 & 25 \end{vmatrix} = 225 - 225 = 0 \Rightarrow$$

параболический тип.

$$J_3 = \begin{vmatrix} 9 & 15 & 21 \\ 15 & 25 & 35 \\ 21 & 35 & 49 \end{vmatrix} = 9(1225 - 1225) - 15(735 - 735) + 21(525 - 525) = 0 + 0 + 0 = 0$$

\Rightarrow вырожденная парабола

$$(9x^2 + 30xy + 25y^2) + 14(3x + 5y) + 49 = 0$$

$$(3x + 5y)^2 + 14(3x + 5y) + 49 = 0$$

$$z = 3x + 5y \Rightarrow z^2 + 14z + 49 = 0 \Rightarrow (z + 7)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (3x + 5y + 7)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\ell: 3x + 5y + 7 = 0}$$

2 совпавшие прямые.

Дома: К. 689(2), 690(1,2), 693(2,4), 697(2,4),
699(1,3), 700(1,3).

