Семинар 10

доцент Волков Н.П.

Занятие 10

Приведение к каноническому виду уравнений параболического типа.

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0 \quad (34)$$

После преобразований поворота и параллельного переноса уравнение (34) в параболическом случае приводится к виду

$$BY^2+2DX+C=0 \qquad (K_2)$$

689| 1) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0 \; (*)$

Найдем $J_1=9+16=25$, $J_2=\begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{vmatrix}=144-144=0$

$\Rightarrow$ параболический тип.

Произведем преобразование поворота.

$$tg\varphi_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+576}}{-24}=\frac{7\pm 25}{-24}$$

$tg\varphi_1=\frac{3}{4}$, $tg\varphi_2=-\frac{4}{3}$

Возьмем φ_1: $\cos\varphi_1=\frac{4}{5}$, $\sin\varphi_1=\frac{3}{5}$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{5}(4\tilde{x}-3\tilde{y}) \\ y=\frac{1}{5}(3\tilde{x}+4\tilde{y}) \end{cases}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{9}{25}(4\tilde{x}-3\tilde{y})^2-\frac{24}{25}(4\tilde{x}-3\tilde{y})(3\tilde{x}+4\tilde{y})+$$

$$+\frac{16}{25}(3\tilde{x}+4\tilde{y})^2-\frac{20}{5}(4\tilde{x}-3\tilde{y})+\frac{110}{5}(3\tilde{x}+4\tilde{y})-50=0$$

$\Rightarrow \quad 0\cdot\tilde{x}^2 + 0\cdot\tilde{x}\cdot\tilde{y} + 625\tilde{y}^2 + 1250\tilde{x} + 2500\tilde{y} = 1250$

$\Rightarrow \quad \tilde{y}^2 + 4\tilde{y} + 2\tilde{x} = 2$

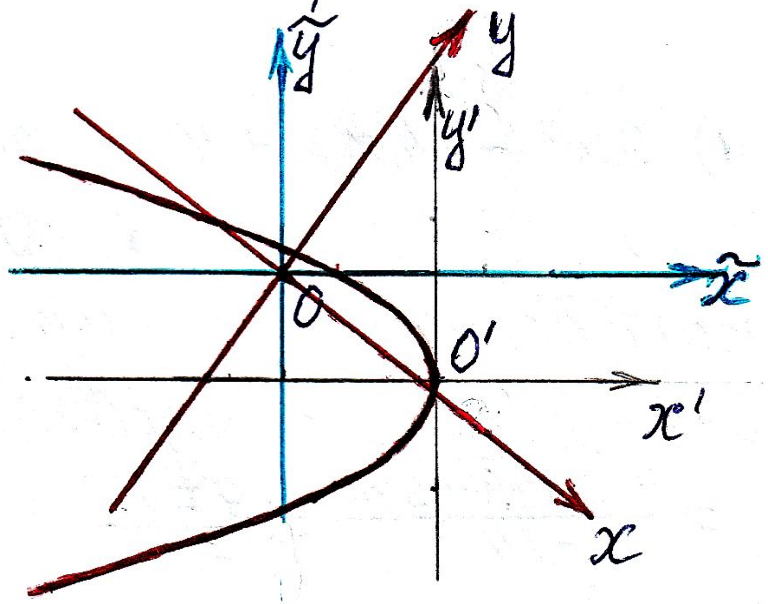
$\Rightarrow \quad (\tilde{y}^2 + 4\tilde{y} + 4) - 4 + 2\tilde{x} = 2$

$\Rightarrow \quad (\tilde{y}+2)^2 = -2(\tilde{x}-3)$

Замена $\underline{y' = \tilde{y}+2}$, $x' = \tilde{x}-3$

$\Rightarrow \boxed{(y')^2 = -2x'}$ – парабола (сопряженная) после параллельного переноса!

$$\begin{cases} \tilde{x} = x'+3 \\ \tilde{y} = y'-2 \end{cases}$$



$\underline{689}$ 3) $16x^2-24xy+9y^2-160x+120y+425=0$

$J_1=16+9=25$, $J_2=\begin{vmatrix}16 & -12\\ -12 & 9\end{vmatrix}=144-144=0$

$\Rightarrow$ параболический тип

1) Поворот

$tg\varphi_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+576}}{-24}=\dfrac{7\mp 25}{24}$

$tg\varphi_1=-\dfrac{3}{4}$, $tg\varphi_2=\dfrac{4}{3}$

Возьмем угол $\varphi_2\Rightarrow$ преобразование поворота:

$\cos\varphi_2=\dfrac{3}{5}$, $\sin\varphi_2=\dfrac{4}{5}$ $\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{5}(3\tilde{x}-4\tilde{y})\\ y=\frac{1}{5}(4\tilde{x}+3\tilde{y})\end{cases}$

$\Rightarrow\dfrac{16}{25}(3\tilde{x}-4\tilde{y})^2-\dfrac{24}{25}(3\tilde{x}-4\tilde{y})(4\tilde{x}+3\tilde{y})+\dfrac{9}{25}(4\tilde{x}+3\tilde{y})^2-$

$-32(3\tilde{x}-4\tilde{y})+24(4\tilde{x}+3\tilde{y})+425=0$

$0\cdot\tilde{x}^2+0\tilde{x}\tilde{y}+25\tilde{y}^2+0\cdot\tilde{x}+200\tilde{y}+425=0$

$\Rightarrow\tilde{y}^2+8\tilde{y}+17=0$

$\Rightarrow(\tilde{y}+4)^2+1=0$

Замена: $y'=\tilde{y}+4$

$\Rightarrow\boxed{(y')^2=-1}$ – две мнимые параллельные прямые.

690 3) $4x^2+12xy+9y^2-4x-6y+1=0$ (**)

$J_1=4+9=13>0$, $J_2=\begin{vmatrix}4&6\\6&9\end{vmatrix}=36-36=0$

$\Rightarrow$ параболический тип

Преобразование поворота.

$tg\varphi_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25+144}}{12}=\dfrac{5\pm13}{12}$

$tg\varphi_1=-\dfrac{2}{3}$, $tg\varphi_2=\dfrac{3}{2}$

Возьмем угол φ_1 $\Rightarrow \cos\varphi_1=\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_1}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

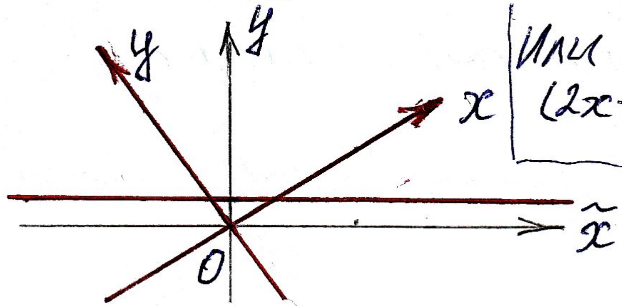
$\sin\varphi_1=\dfrac{tg\varphi_1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_1}}=-\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

Поворот: $\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{13}}(3\tilde{x}+2\tilde{y})\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{13}}(-2\tilde{x}+3\tilde{y})\end{cases}$

$$\overset{(**)}{\Rightarrow}\ \frac{4}{13}(3\tilde{x}+2\tilde{y})^2+\frac{12}{13}(3\tilde{x}+2\tilde{y})(3\tilde{y}-2\tilde{x})+$$
$$+\frac{9}{13}(3\tilde{y}-2\tilde{x})^2-\frac{4}{\sqrt{13}}(3\tilde{x}+2\tilde{y})-\frac{6}{\sqrt{13}}(3\tilde{y}-2\tilde{x})+1=0$$

$$\Rightarrow 0\cdot\tilde{x}^2+0\cdot\tilde{x}\tilde{y}+169\tilde{y}^2+0\cdot\tilde{x}-26\sqrt{13}\tilde{y}+13=0$$

$$\Rightarrow (13\tilde{y}-\sqrt{13})^2=0 \Rightarrow \boxed{\tilde{y}=\frac{1}{\sqrt{13}}}$$



Или $(4x^2+12xy+9y^2)-2(2x+3y)+1=0$

$(2x+3y)^2-2(2x+3y)+1=0$

$(2x+3y-1)^2=0$

$\boxed{2x+3y-1=0}$

693) 1) $x^2+4xy+4y^2+4x+y-15=0$

$J_1=1+4=5>0,\ J_2=\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=4-4=0\Rightarrow$

$\Rightarrow$ параболический тип

$(x^2+4xy+4y^2)+4x+y-15=0$

$(x+2y)^2+2(2x)+2(\frac{1}{2}y)-15=0$

3) $25x^2-20xy+4y^2+3x-y+11=0$

$J_1=25+4=29>0,\ J_2=\begin{vmatrix}25&-10\\-10&4\end{vmatrix}=100-100=0$

$\Rightarrow$ параболический тип.

$(25x^2-20xy+4y^2)+3x-y+11=0$

$(5x-2y)^2+2(\frac{3}{2}x)-2(\frac{1}{2}y)+11=0$

5) $9x^2-42xy+49y^2+3x-2y-24=0$

$J_1=9+49=58>0,\ J_2=\begin{vmatrix}9&-21\\-21&49\end{vmatrix}=441-441=0$

$\Rightarrow$ параболический тип

$(9x^2-42xy+49y^2)+3x-2y-24=0$

$(3x-7y)^2+2(\frac{3}{2}x)-2\cdot y-24=0$

697 | 1) $9x^2+24xy+16y^2-120x+90y=0$

Вычислим инварианты

$I_1=9+16=25>0$, $I_2=\begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{vmatrix}=144-144=0$

$\Rightarrow$ параболический тип.

$I_3=\begin{vmatrix} 9 & 12 & -60 \\ 12 & 16 & 45 \\ -60 & 45 & 0 \end{vmatrix}=-60(12\cdot45+16\cdot60)-45(9\cdot45+$

$+12\cdot60)=-90000-50625=-140625\neq0$

$\Rightarrow$ парабола

$И_3$ (K_2): $BY^2+2DX+C=0$

$\Rightarrow I_1=B=25$, $I_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}=0$,

$I_3=\begin{vmatrix} 0 & 0 & D \\ 0 & B & 0 \\ D & 0 & C \end{vmatrix}=-B\cdot D^2=-140625$

$\Rightarrow D^2=\dfrac{-140625}{-25}=5625 \Rightarrow D=\pm75$

$(K_2) \Rightarrow Y^2=2\left(-\dfrac{D}{B}\right)X-\dfrac{C}{B}$

$\Rightarrow p=-\dfrac{D}{B}=\dfrac{75}{25}=3$ $(D=-75$, т.к. $p>0)$

Итак, $\boxed{p=3}$

697| 3) $x^2-2xy+y^2+6x-14y+29=0$

Вычислим инварианты

$I_1=1+1=2>0$, $I_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1-1=0 \Rightarrow$

параболический тип.

$I_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ -1 & 1 & -7\\ 3 & -7 & 29\end{vmatrix}=1\cdot(29-49)+1\cdot(-29+21)+3(7-3)=$

$=-20-8+12=-16<0$

Рассмотрим (K_2): $BY^2+2DX+C=0$

$I_1=B=2$, $I_2=0$, $I_3=-BD^2=-16$

$\Rightarrow B=2$, $D^2=8$ $\Rightarrow D=\pm 2\sqrt{2}$

Из (K_2) $p=-\dfrac{D}{B}=\sqrt{2}$ при $D=-2\sqrt{2}$

Итак, $\boxed{p=\sqrt{2}}$

699| 2) $4x^2-12xy+9y^2+20x-30y-11=0$

Найдем инварианты

$I_1=4+9=13>0$, $I_2=\begin{vmatrix}4 & -6\\ -6 & 9\end{vmatrix}=36-36=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ параболический тип.

$I_3=\begin{vmatrix}4 & -6 & 10\\ -6 & 9 & -15\\ 10 & -15 & -11\end{vmatrix}=4(-99-225)+6(66+150)+$

$+10(90-90)=-1296+1296+0=0$

$\Rightarrow$ вырожденная парабола.

$(4x^2-12xy+9y^2)+10(2x-3y)-11=0$

$(2x-3y)^2+10(2x-3y)-11=0$

$z=2x-3y \Rightarrow z^2+10z-11=0 \Rightarrow z_1=1, z_2=-11$

$\Rightarrow (2x-3y-1)(2x-3y+11)=0$

Две параллельные прямые.

$\boxed{l_1: 2x-3y-1=0 \text{ и } l_2: 2x-3y+11=0}$

700 | 2) $9x^2+30xy+25y^2+42x+70y+49=0$

$J_1=9+25=34>0$, $J_2=\begin{vmatrix} 9 & 15 \\ 15 & 25 \end{vmatrix}=225-225=0 \Rightarrow$

параболический тип.

$J_3=\begin{vmatrix} 9 & 15 & 21 \\ 15 & 25 & 35 \\ 21 & 35 & 49 \end{vmatrix}=9(1225-1225)-15(735-735)+$
$+21(525-525)=0+0+0=0$

$\Rightarrow$ вырожденная парабола

$(9x^2+30xy+25y^2)+14(3x+5y)+49=0$

$(3x+5y)^2+14(3x+5y)+49=0$

$z=3x+5y \Rightarrow z^2+14z+49=0 \Rightarrow (z+7)^2=0$

$\Rightarrow (3x+5y+7)^2=0 \Rightarrow \boxed{l: 3x+5y+7=0}$

2 слившиеся прямые.

Дома: К. 689(2), 690(1,2), 693(2,4), 697(2,4), 699(1,3), 700(1,3).