Структура систем.
Случайные величины.
Метод Монте-Карло

Лекция 2

План лекции

- Основные понятия теории систем (Система, элемент, подсистема, структура)
- Случайность в сложных системах
- Распределения случайных величин
- Метод Монте-Карло

В настоящее время нет единства в определении понятия "система"

D1. Система есть нечто целое:

S=A(1,0). Это определение выражает факт существования и целостность. Двоичное суждение A(1,0) отображает наличие или отсутствие этих качеств.

D2. Система есть организованное множество (Темников Ф. Е.):

S=(орг, M), где орг - оператор организации; M - множество.

D3. Система есть множество вещей, свойств и отношений (Уемов А. И.):

S=({т},{n},{r}), где т - вещи, n - свойства, r - отношения.

D4. Система есть множество элементов, образующих структуру и обеспечивающих определенное поведение в условиях окружающей среды:

S=(*, ST, BE, E), где * - элементы, ST - структура, BE - поведение, E - среда.

D5. Система есть множество входов, множество выходов, множество состояний, характеризуемых оператором переходов и оператором выходов:

S=(X, Y, Z, H, G), где X - входы, Y - выходы, Z - состояния, H - оператор переходов, G - оператор выходов. Это определение учитывает все основные компоненты, рассматриваемые в автоматике.

Основные понятия теории систем (оглавление)

Система, элемент, подсистема, структура

Иерархия

Связь

Состояние, поведение, внешняя среда

Модель

Равновесие, устойчивость

Развитие, цель

Классификация информационных систем

Система, элемент, подсистема, структура

В качестве "рабочего" определения понятия системы в литературе по теории систем часто рассматривается следующее: **система - множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определенную целостность, единство.**

Элемент. Под элементом принято понимать простейшую неделимую часть системы. Таким образом, элемент - это предел деления системы с точек зрения решения конкретной задачи и поставленной цели.

Подсистема. Система может быть разделена на элементы не сразу, а последовательным расчленением на подсистемы, которые представляют собой компоненты более крупные, чем элементы, и в то же время более детальные, чем система в целом.
Названием "подсистема" подчеркивается, что такая часть должна обладать свойствами системы (в частности, свойством целостности).

Структура - это совокупность элементов и связей между ними. Структура может быть представлена графически, в виде теоретико-множественных описаний, матриц, графов и других языков моделирования структур.

Перейдем к примеру на следующем слайде

Примеры

Оглавление

Система - городской наземный транспорт

Подсистемы.

1. Организация движения автобусов.
2. Организация движения трамваев.
3. Организация движения троллейбусов.

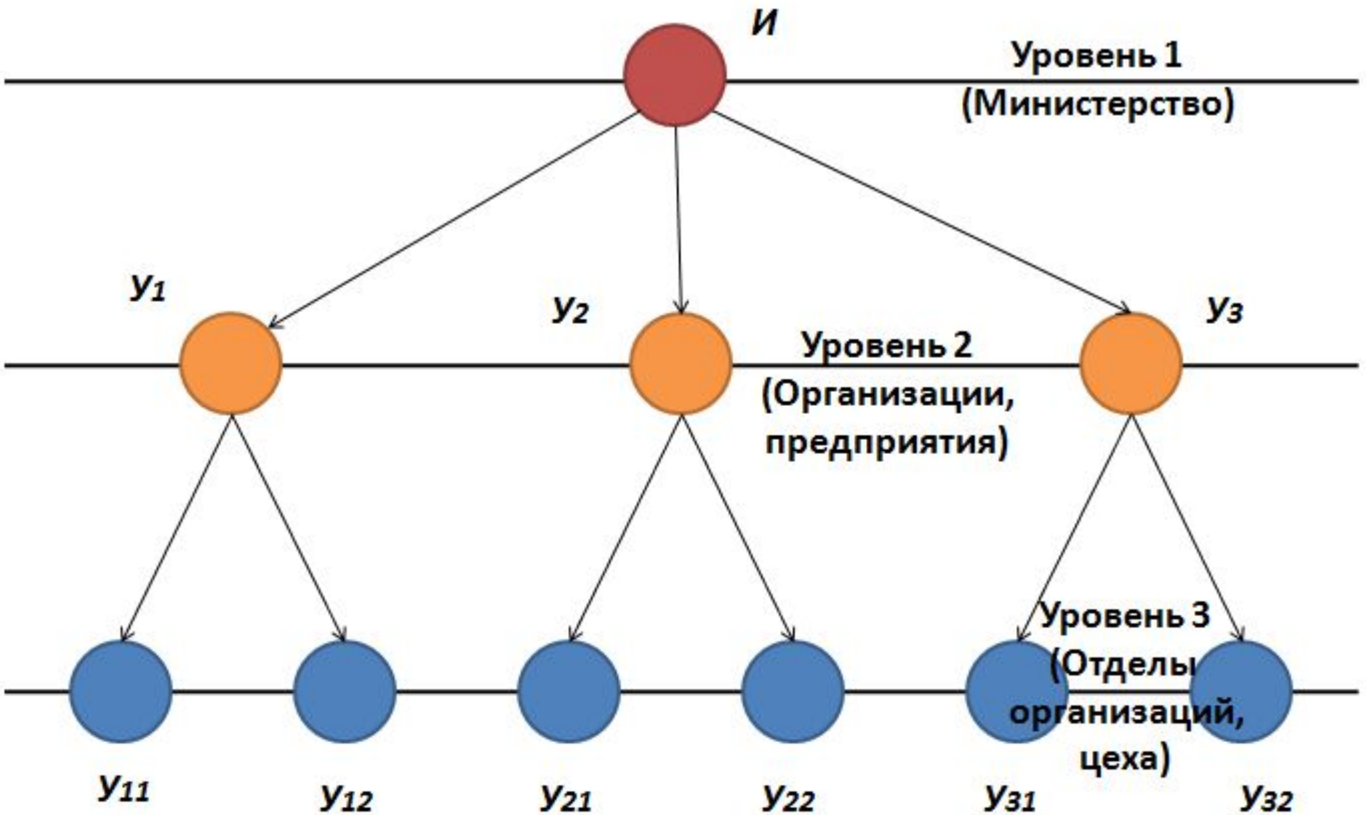
Элементы. Автобусы, трамваи, троллейбусы.

Структура – улицы города и схема движения городского транспорта

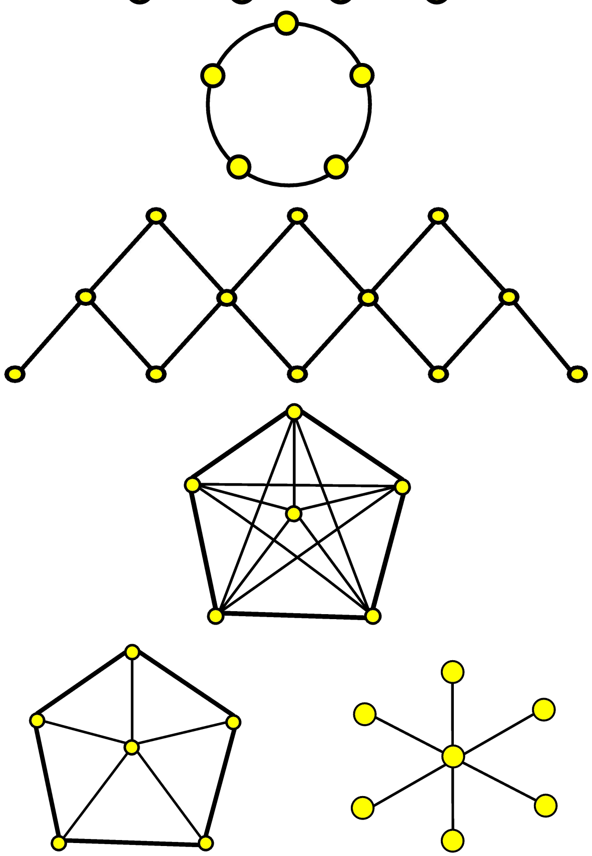
Иерархия

Оглавление

Структуру часто представляют в виде иерархии. **Иерархия** - это упорядоченность компонентов по степени важности (многоступенчатость, служебная лестница).

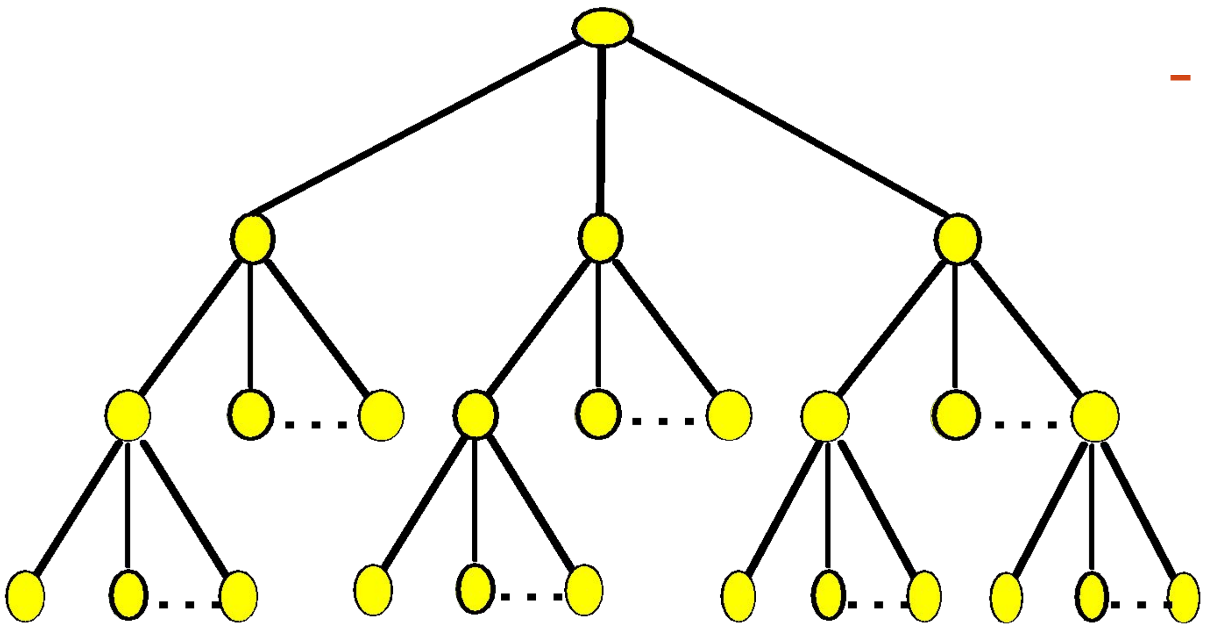


Типы структур систем

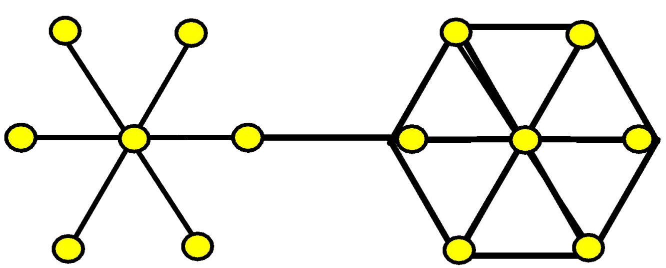


- линейная
- кольцевая
- сотовая
- многосвязная (полный граф)
- колесо, звездная (частный случай многосвязной)

Типы структур систем

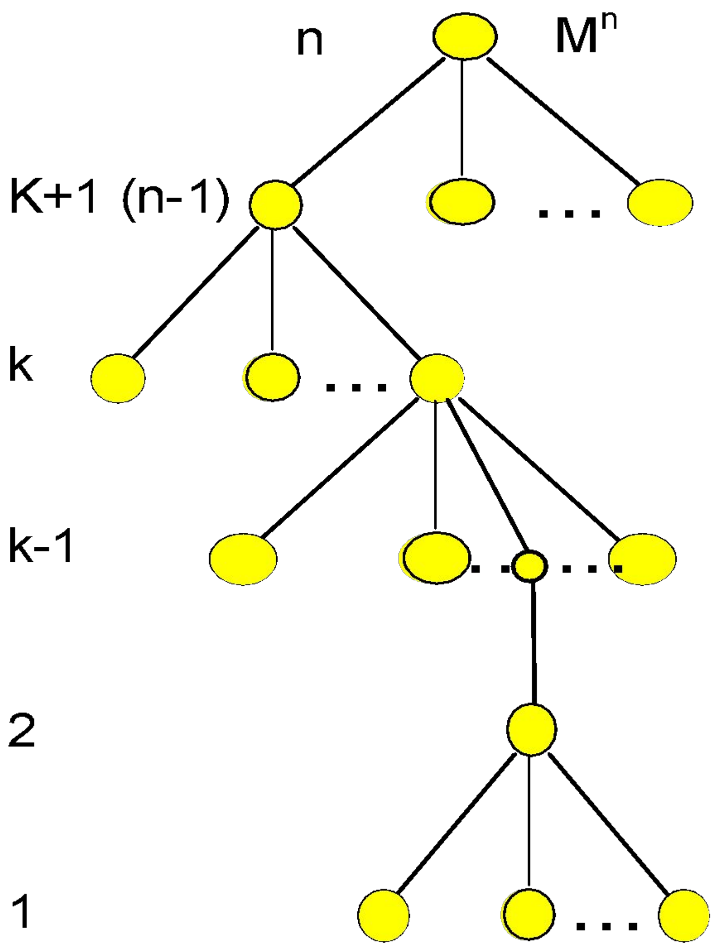


- Иерархическая многоуровневая (ИМС)



- Смешанные

Иерархическая многоуровневая система - ИМС



ИМС соответствует частный случай графа типа ***дерево***.

Системе (ИМС) в целом ставится в соответствие множество элементов M^n (центр системы).

Далее M^n разбивается на подмножества (подсистемы)

$M_i^{n-1}, i \in I^n$, где I^n, множество подсистем на n-ом уровне декомпозиции, причем *при* $i_1 \neq i_2$

$$\bigcup_{i \in I^n} M_i^{n-1} = M^n, M_{i1}^{n-1} \cap M_{i2}^{n-1} = \varnothing$$

Сумма подсистем сводится к общей системе, и подсистемы не пересекаются

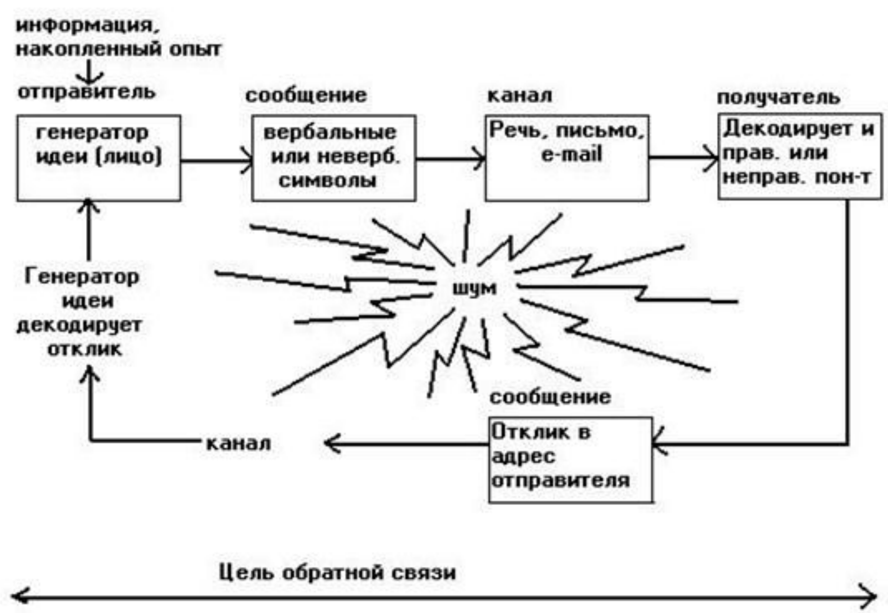
Свойства идеальных иерархий

- ***Пирамидальность*** – на самом верхнем (*n*- ом) уровне находится только один элемент.
- ***Ветвистость*** – элемент *k*-го уровня связан только с одним элементом *k+1 (высшего)* уровня, но с несколькими *k-1 (низшего)* уровня.
- ***Многоуровневость*** – число уровней более двух.
- ***Субординация внутренних связей*** – элементы *k*-го уровня связана только с элементами *k+1* и *k-1 уровней*.
- ***Субординация внешних связей*** – связи элементов *k* уровня контролируются элементами *k+1 (высшего)* уровня.

Связь

Оглавление

Связь. Понятие "связь" входит в любое определение системы наряду с понятием "элемент" и обеспечивает возникновение и сохранение структуры и целостных свойств системы.
Это понятие характеризует одновременно и строение (статику), и функционирование (динамику) системы.
Важную роль в системах играет понятие **"обратной связи". Обратная связь** является основой саморегулирования и развития систем, приспособления их к изменяющимся условиям существования.



Состояние, поведение, внешняя среда

Оглавление

Состояние. Понятием "состояние" обычно характеризуют мгновенную фотографию, "срез" системы, остановку в ее развитии.

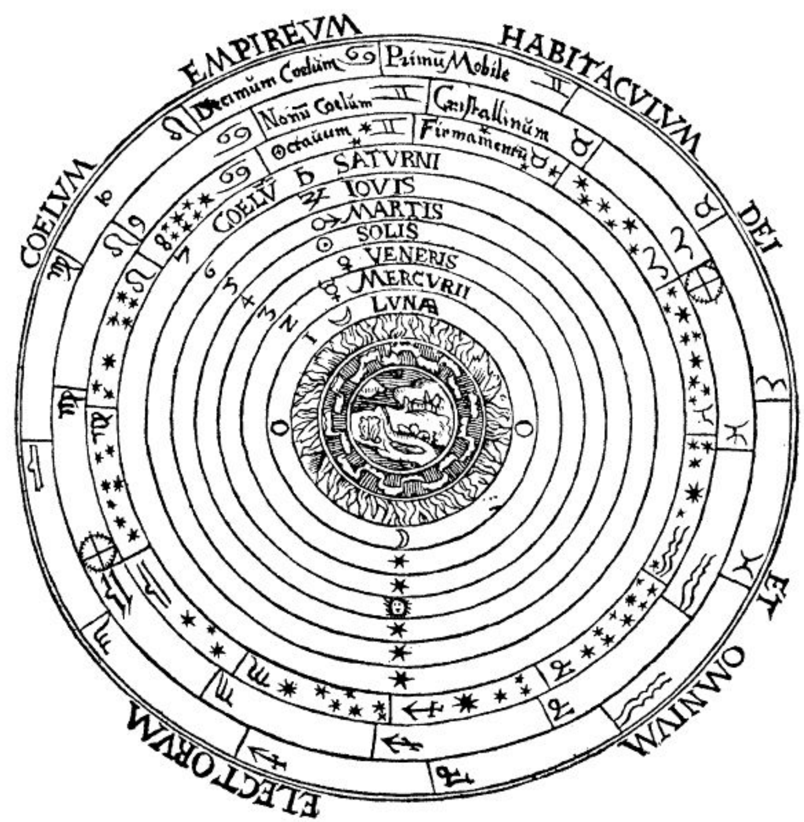
Поведение. Если система способна переходить из одного состояния в другое (например, $z1 \Rightarrow z2 \Rightarrow z3$), то говорят, что она обладает поведением. Этим понятием пользуются, когда неизвестны закономерности переходов из одного состояния в другое.

Внешняя среда. Под внешней средой понимается множество элементов, которые не входят в систему, но изменение их состояния вызывает изменение поведения системы.

Модель

Модель. Под моделью системы понимается описание системы, отображающее определенную группу ее свойств.

Schema huius præmissæ diuisionis Sphærarum.



Равновесие, устойчивость

Оглавление

Равновесие - это способность системы в отсутствие внешних возмущающих воздействий (или при постоянных воздействиях) сохранить свое состояние сколь угодно долго

Устойчивость.

Под устойчивостью понимается способность системы возвращаться в состояние равновесия после того, как она была из этого состояния выведена под влиянием внешних возмущающих воздействий.

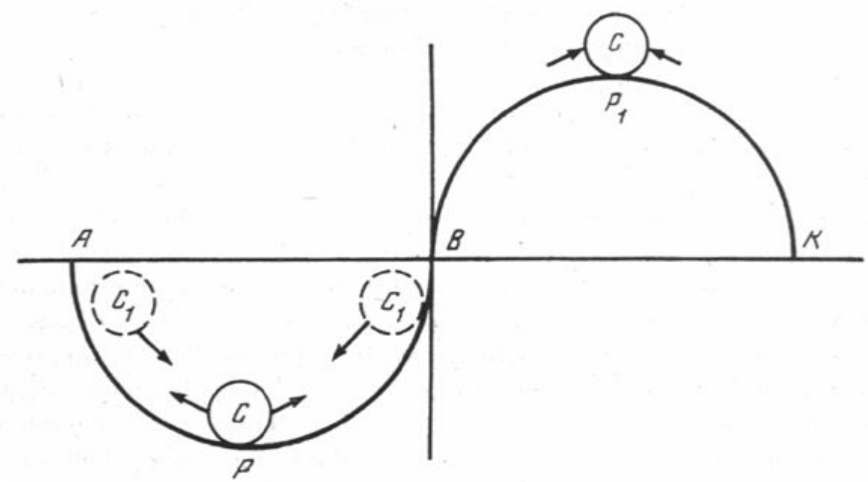


Рис. 1. Модель идеальных состояний равновесия в альтернативных экономических системах

Развитие, цель

Оглавление

Развитие. Исследованию процесса развития, соотношения процессов развития и устойчивости, изучению механизмов, лежащих в их основе, уделяют в кибернетике и теории систем большое внимание.
Понятие развития помогает объяснить сложные термодинамические и информационные процессы в природе и обществе.

Цель. Применение понятия "цель" и связанных с ним понятий целенаправленности, целеустремленности, целесообразности сдерживается трудностью их однозначного толкования в конкретных условиях.
Например: энергетическая программа, продовольственная программа, жилищная программа, программа перехода к рыночной экономике.
Понятие цель лежит в основе развития системы.

Классификация информационных систем

- по виду отображаемого объекта—технические, биологические, экономические и др.;
- по виду научного направления — математические, физические и т. п.;
- по виду формализованного аппарата представления системы — детерминированные и стохастические;
- по типу целеустремленности — открытые и закрытые;
- по сложности структуры и поведения—простые и сложные;
- по степени организованности — хорошо организованные, плохо организованные (диффузные), самоорганизующиеся системы

Случайные события и величины

Случайность в системах

Случайные события

Случайным событием это всякое явление, которое в результате испытания может произойти или не произойти.

Случайным событием называется такое **событие**, появление которого нельзя предсказать заранее..

Физики очень не любят случайности. Если случайностей слишком много, это значит, что ничего предсказать невозможно. Предметы начнут внезапно взлетать в воздух. В некоторые дни солнце может взойти, а в другие – нет. **В таком случае мир будет пугающим местом.**

Жизнь – это случайность во времени и пространстве

Жизнь в космосе – это большая редкость: лишь небольшая часть материи существует в ее живой форме. Жизнь стремительна и с точки зрения времени. Недавние научные исследования показали, что наше существование – это всего лишь случайность, один бросок космических костей.

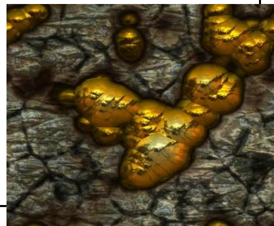
Доля живой материи во Вселенной чрезвычайно мала – около одной

Случайные события

Достоверное событие обязательно произойдет приданном комплексе условий. Например, если в сосуде находится вода, давление атмосферы нормальное, а температура воздуха 30С, то событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии».

Случайное событие при данном комплексе условий может произойти, а может и не произойти. Например, при бросании монеты выпадение герба – является случайным событием, потому что оно может произойти, а может и не произойти.

Невозможное событие не может произойти при данном комплексе условий. Например, при нагревании олова и меди вы не сможете получить золото.



Итак, имеется схема для различных событий, наступающих при неизменном комплексе условий:

достоверное – случайное – невозможное.



Ясно, что большая часть событий в мире находится между достоверностью и невозможностью (интуитивное понимание!).

По мере развития теории вероятностей, а также областей её приложения, развивались и представления об основном понятии этой теории – вероятности.

Факторы случайности при использовании ИМ

Тип системы	Факторы случайности
Производственная система	Время обработки, безотказной работы и ремонта станка
Военная система	Время прибытия и полезная нагрузка ракет и самолетов, исход боя, дистанция промахов для оружия
Система связи	Время между поступлениями сообщений, типы сообщений, длина сообщений
Транспортная система	Время погрузки судна, интервалы времени между прибытиями пассажиров в метро

Случайная величина

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от различных факторов, которые не могут быть заранее учтены.

Например, число родившихся мальчиков среди **100** новорожденных есть случайная величина, которая имеет возможные значения: **0,1,2,3…100.**

Все процессы, происходящие в природе, делятся на

непрерывные и дискретные.

Примерами **непрерывных** процессов являются различные природные объекты и их свойства: температура, давление и влажность воздуха, объекты технологических производственных процессов: давление и температура теплоносителя в ядерном реакторе. В определенный момент времени непрерывная случайная величина может быть выражена в численной форме, но в последствии это значение будет непрерывно изменяться.

Случайная величина

Дискретными являются сигналы тревоги, языковые сообщения в виде звука и письма, жесты и т.п. Например, такие величины как количество человек в студенческой группе, число солнечных дней в году, высота горы, уровень интеллекта являются дискретными величинами, потому что имеют конкретный количественный признак, который некоторое время не изменяется.

Дискретная величина ИЗМЕНЯЕТСЯ СКАЧКОМ.

Пример дискретной величины из задачи о поведении потребителя

Номер магазина (X) -значение	**1**	**2**	**3**
Вероятность посещения (P)	**0.5**	**0.3**	**0.2**

Распределения случайных величин

- Непрерывные случайные величины
- Дискретные случайные величины
- Методы подбора распределений для эксперимента

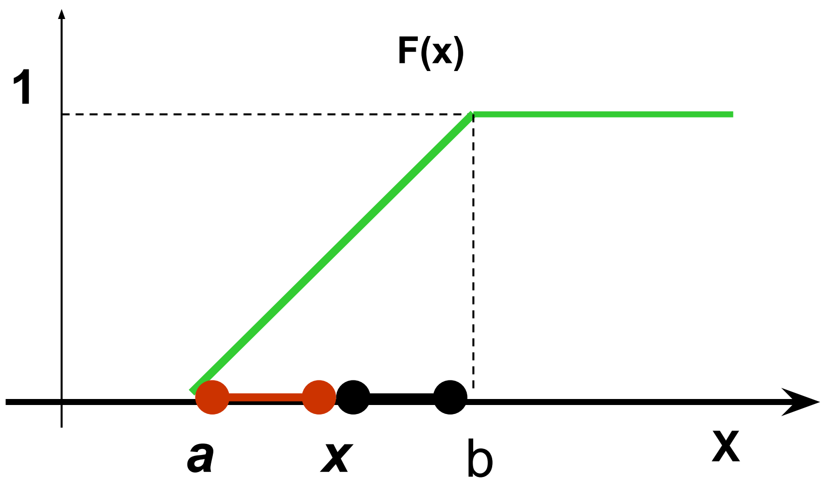
Непрерывные распределения

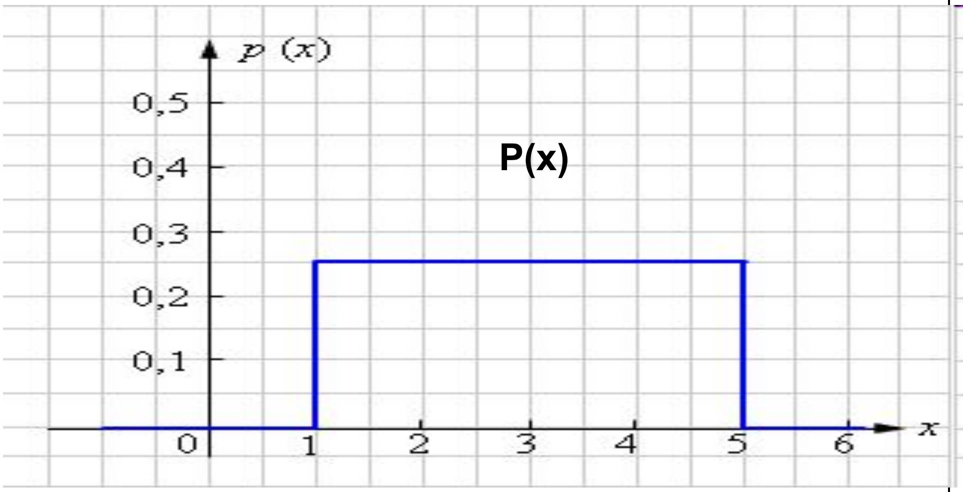
1) Равномерное
2) Экспоненциальное
3) Гамма-распределение
4) Вейбулла
5) Нормальное
6) Логнормальное
6) Бета-распределение
7) Распределение Пирсона
8) Логистическое распределение
9) Распределение Джонсона
10) Треугольное

Непрерывные функций распределения

1. Функция равномерного распределения

Используется как «первая» модель величины, которая случайно изменяется между a и b, но о которой больше почти ничего не известно



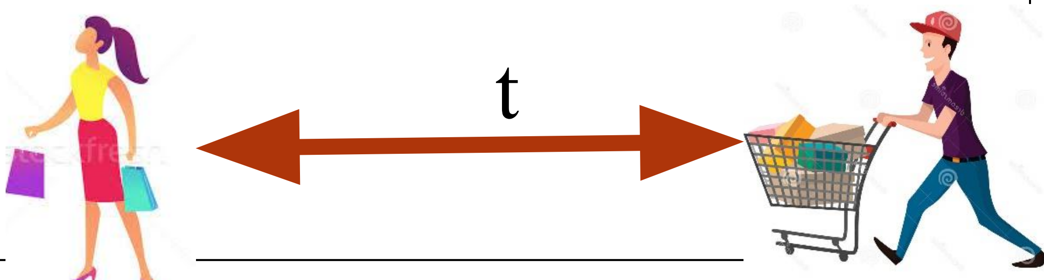


$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{если } a \le x \le b,\\ 0, & \textbf{\textit{если } } \boldsymbol{x<a} \textbf{\textit{ или }} \boldsymbol{x>b.}\end{cases}$$

Экспоненциальное распределение

Это распределение применяется для представления промежутка времени между случайными событиями, например, времени между прибытиями заявок в модели СМО. Для магазина, например, время между появлениями двух последовательных покупателей будет случайной величиной с экспоненциальным распределением.

- время поступления заказа на предприятие;
- посещение покупателями магазина-супермаркета;
- телефонные разговоры;
- срок службы деталей и узлов в компьютере.



Экспоненциальное распределение

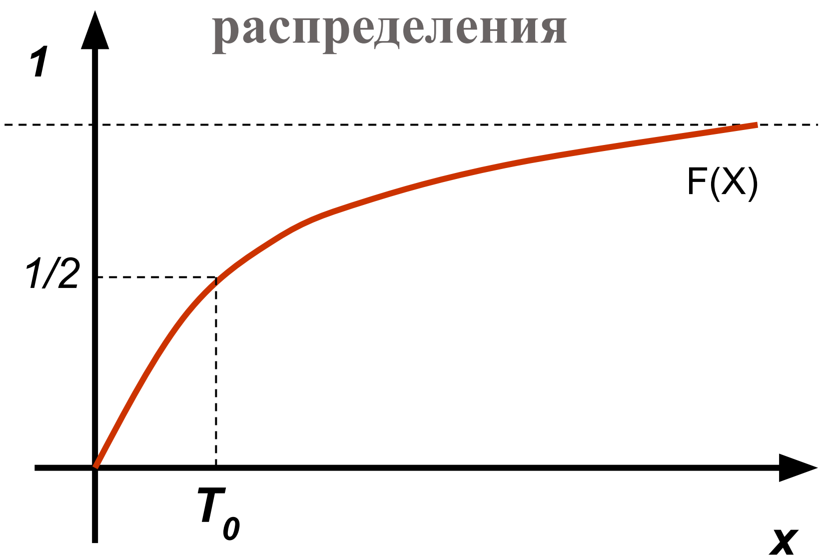
Экспоненциальное распределение используется в тех случаях, когда интервал времени между поступлениями требований в систему, происходит с постоянной интенсивностью. **E=2,7**

Функция экспоненциального распределения имеет вид:

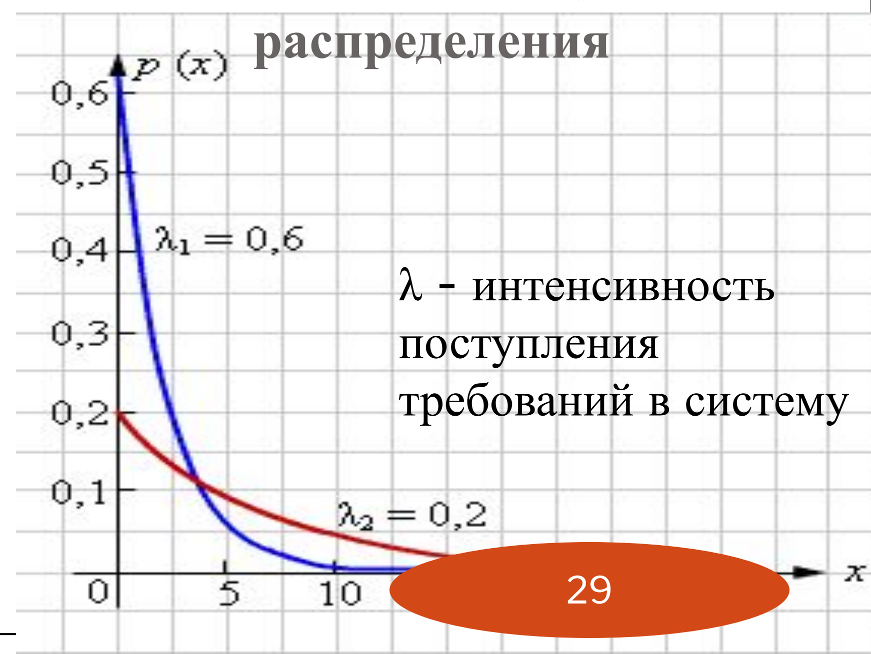
$$F(x) = \begin{cases} 0, \ \text{если x} < 0, \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x}, \text{если x} \geq 0. \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} 0, \ \text{если\_x} < 0, \\ \lambda e^{-\lambda \cdot x}, \text{если\_x} \geq 0 \end{cases}$$

Функция экспоненциального распределения



Плотность экспоненциального распределения



λ - интенсивность поступления требований в систему

Экспоненциальное распределение

Пример 1. Пусть есть магазин, в который время от времени заходят покупатели. При определённых допущениях время между появлениями двух последовательных покупателей будет случайной величиной с экспоненциальным распределением.

Среднее время ожидания нового покупателя равно **$1/\lambda$.** сам параметр λ тогда может быть интерпретирован, как среднее число новых покупателей за единицу времени (заявок/в час).

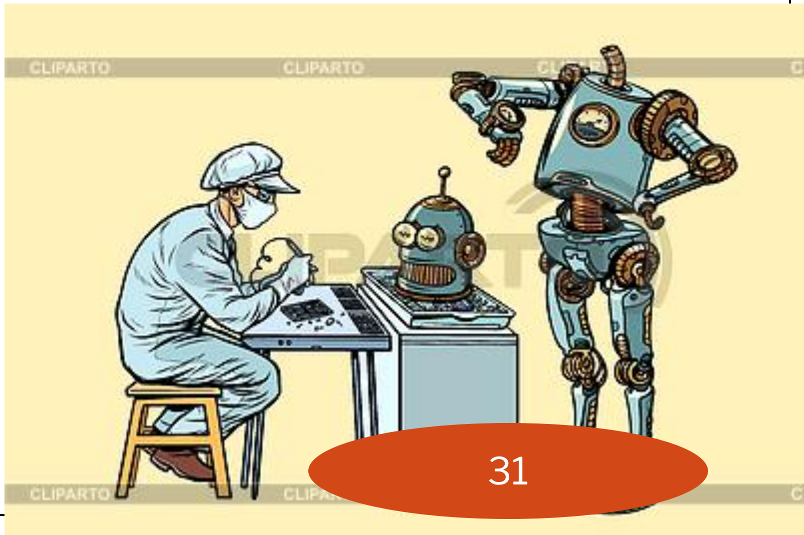
Пример 2. Пусть автобусы приходят на остановку случайно, но с некоторой фиксированной средней интенсивностью λ. тогда количество времени, уже затраченное пассажиром на ожидание автобуса, не влияет на время, которое ему ещё придётся прождать.

Экспоненциальное распределение

Моделирует время между двумя последовательными появлениями одного и того же события. Например, время между появлениями двух покупателей в магазине, метеоритов в небе, автобусов на остановке и даже период полураспада радиоактивных частиц будет случайной величиной с экспоненциальным распределением.

Время безотказной работы элемента часто имеет показательное распределение с функцией распределения:

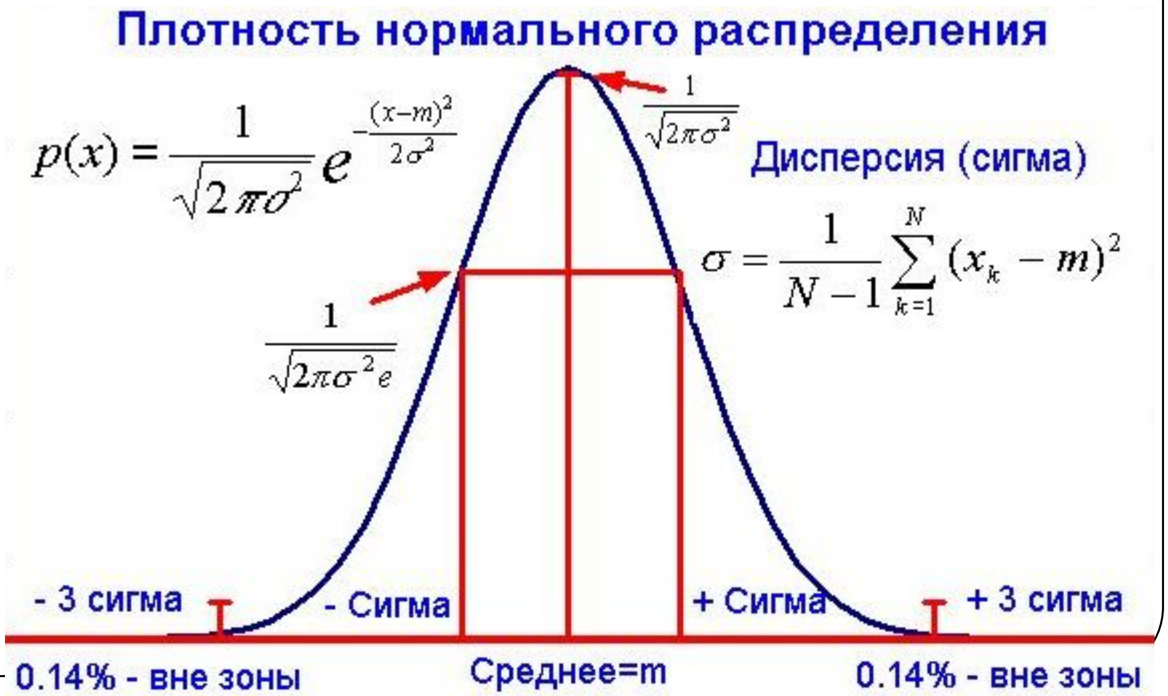
$$p(t) = \lambda e^{-\lambda \cdot t}$$



Нормальное распределение (К. Гаусса)

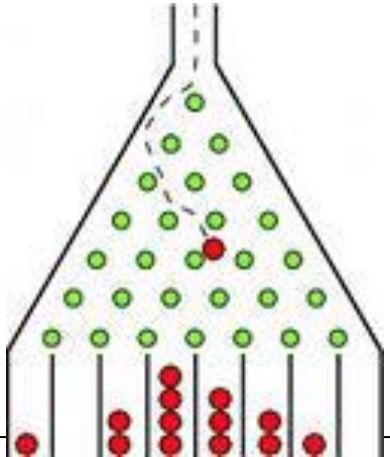
Нормальное распределение возникает обычно в явлениях, подверженных действию большого числа “малых” случайных воздействий. Большинство событий в реальной жизни подчиняются этому распределению.

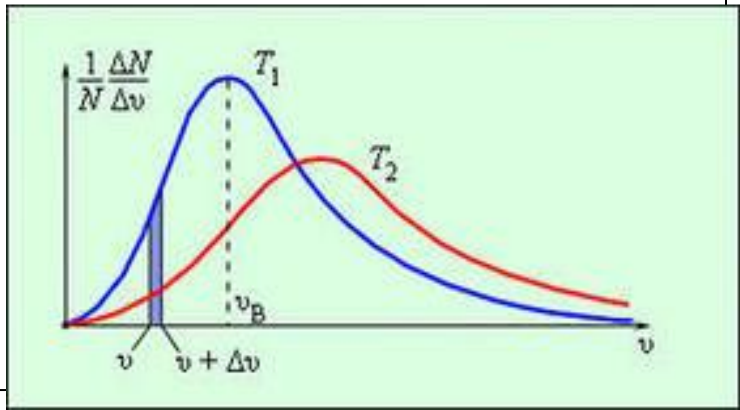
Если исследовать генеральную совокупность студентов, измеряя их рост, вес или коэффициент интеллекта, то скорее всего мы получим нормальное распределение. То есть, людей со средним ростом, весом и уровнем интеллекта намного больше, чем всех остальных.



Нормальное распределение

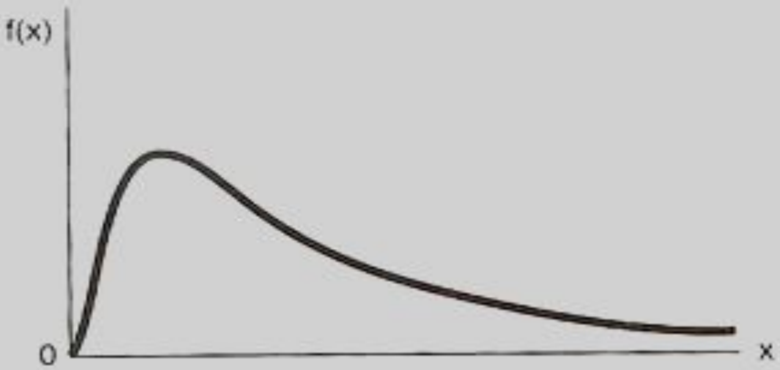
Примерами распределения гаусса являются: распределение частиц крупы по вертикальным ячейкам доски Гальтона, распределение молекул идеального газа по компонентам скоростей, распределение частиц по потенциальным энергиям в поле силы тяжести, распределение атмосферного давления по высоте при неизменной температуре.





Lognormal(μ, σ) **LOGNORMAL(LogMean,LogStd)or LOGN(LogMean,LogStd)or RL(ParamSet)**

Probability Density Function



Denote the user-specified input parameters as LogMean = μ_l and LogStd = σ_l. Then let $\mu = \ln(\mu_l^2 / \sqrt{\sigma_l^2 + \mu_l^2})$ and $\sigma = \sqrt{\ln\left[(\sigma_l^2 + \mu_l^2)/\mu_l^2\right]}$. The probability density function can then be written as

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln(x)-\mu)^2/(2\sigma^2)} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Parameters Mean LogMean ($\mu_l > 0$) and standard deviation LogStd ($\sigma_l > 0$) of the lognormal random variable. Both LogMean and LogStd must be specified as strictly positive real numbers.

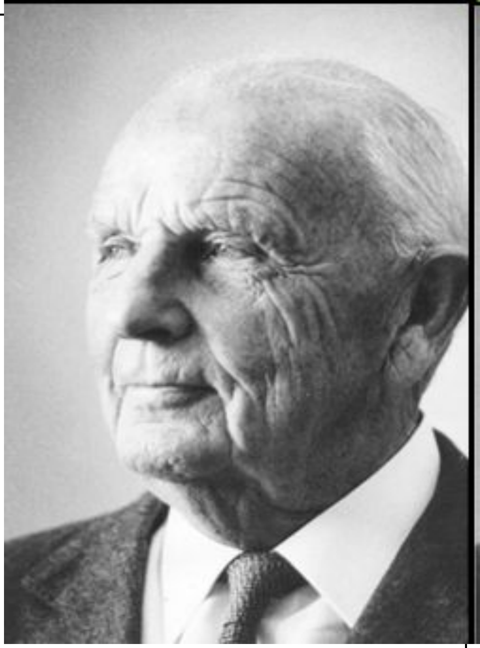
Range $[0, +\infty)$

Расширение области применения нормального закона достигается посредством логарифмически нормального закона для случайных величин, логарифмы которых распределены нормально.

Mean LogMean = $\mu_l = e^{\mu+\sigma^2/2}$

Variance $(\text{LogStd})^2 = \sigma_l^2 = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$

Распределение Вейбулла



$$p(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 0 \\ \alpha \cdot \beta \cdot x^{\beta-1} e^{-\alpha \cdot x^{\beta}}, \text{ если } x \geq 0 \; (\alpha > 0, \beta > 0) \end{cases}$$

Семейство распределений Вейбулла двухпараметрическим и описывает

Положительные случайные величины.

Считается, что распределению Вейбулла подчиняются времена безотказной работы многих технических устройств.

Если β=1, то распределение Вейбулла превращается в экспоненциальное распределение,

А если β=2 - в так называемое распределение Релея.

- Время выполнения какой-либо задачи

Распределение Вейбулла

Опыт эксплуатации очень многих электронных приборов и значительного количества электромеханической аппаратуры показывает, что для них характерны три вида зависимостей интенсивности отказов от времени соответствующих трем периодам жизни этих устройств. Определяет время работы устройства до первой поломки.

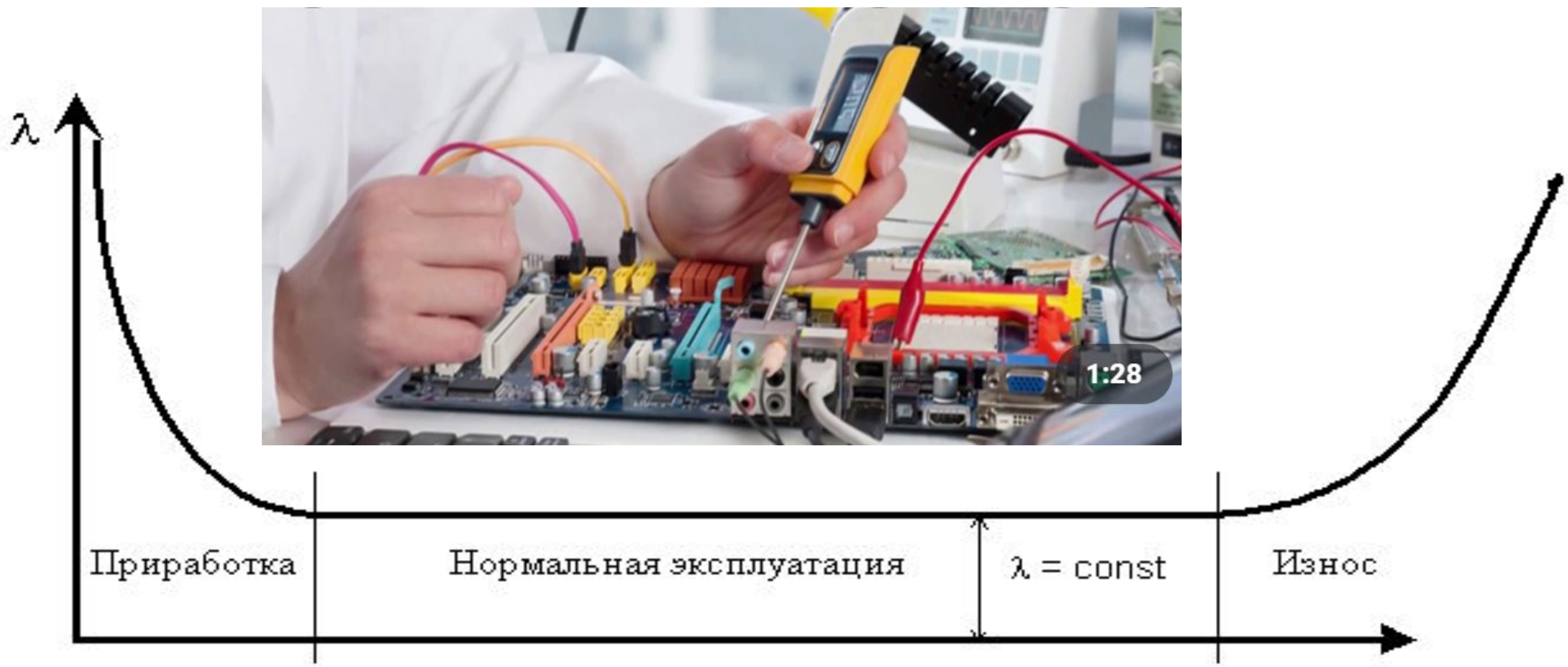
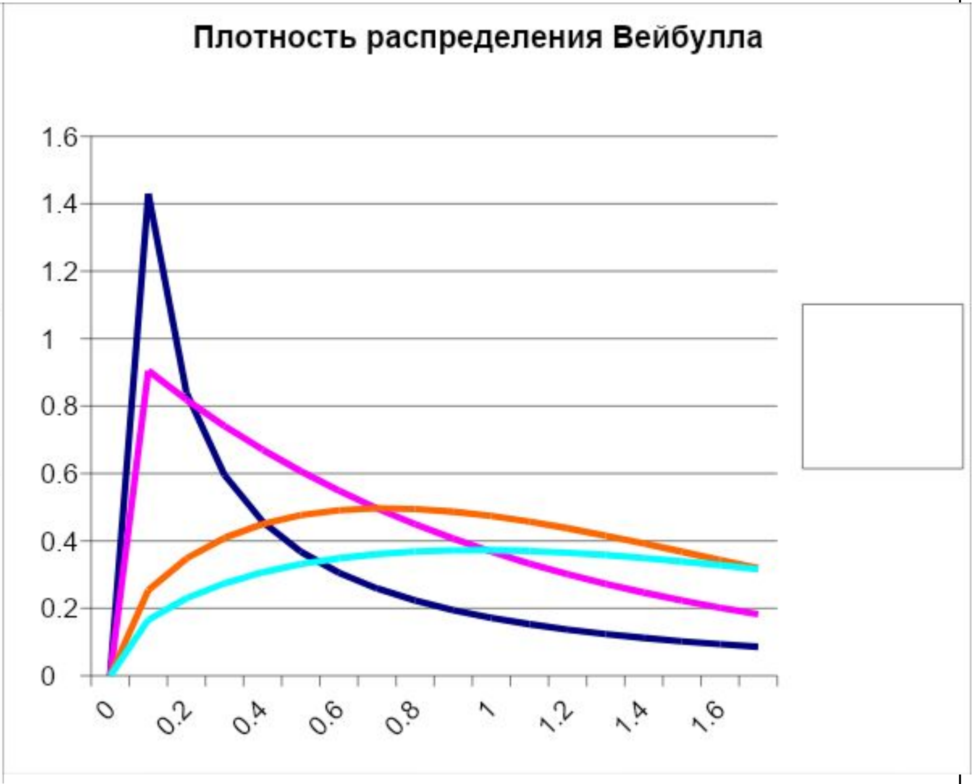


Рис. 3.1. Зависимость интенсивности отказов от времени

Распределение Вейбулла

Функция распределения

Плотность распределения



Параметры λ= 0,5 .. 2 и β= 0,5 .. 2

Логнормальное распределение LN(μ, σ²)

Частный случай нормального распределения, являющиеся произведением большого числа других величин

$$p(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(\ln t-\mu)^2/\left(2\sigma^2\right)}\\ 0\end{cases}$$

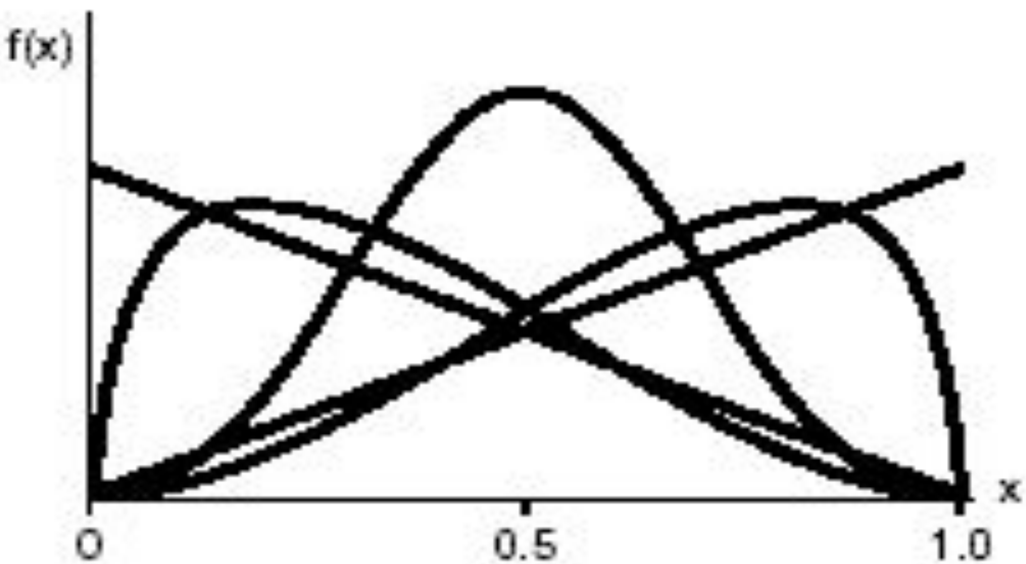
μ— параметр положения,

σ > 0 — масштабный параметр

Этому распределению с заданной степенью приближения подчиняется, например, размер фракций гравия или града. Аналогичные примеры: длительность часто повторяемого события (время выполнения операции на конвейере) или размер зарплат футболистов одного клуба. Как правило, большее количество игроков имеет среднюю зарплату, но есть игроки-звезды, которые зарабатывают значительно выше других игроков (правый хвост гисто

Бета-распределение beta(α_1,α_2)

Используется как приблизительная модель при отсутствии данных; распределение случайной доли (доли бракованных товаров в партии); время выполнения задачи в сетевом графике. Позволяет моделировать любую случайную величину, значение которой ограничено определенным интервалом. Т.е. если стоит задача понять, когда на сайте появится новый читатель, какой срок согласования документов или любые другие, то понадобится именно бета-распределение.

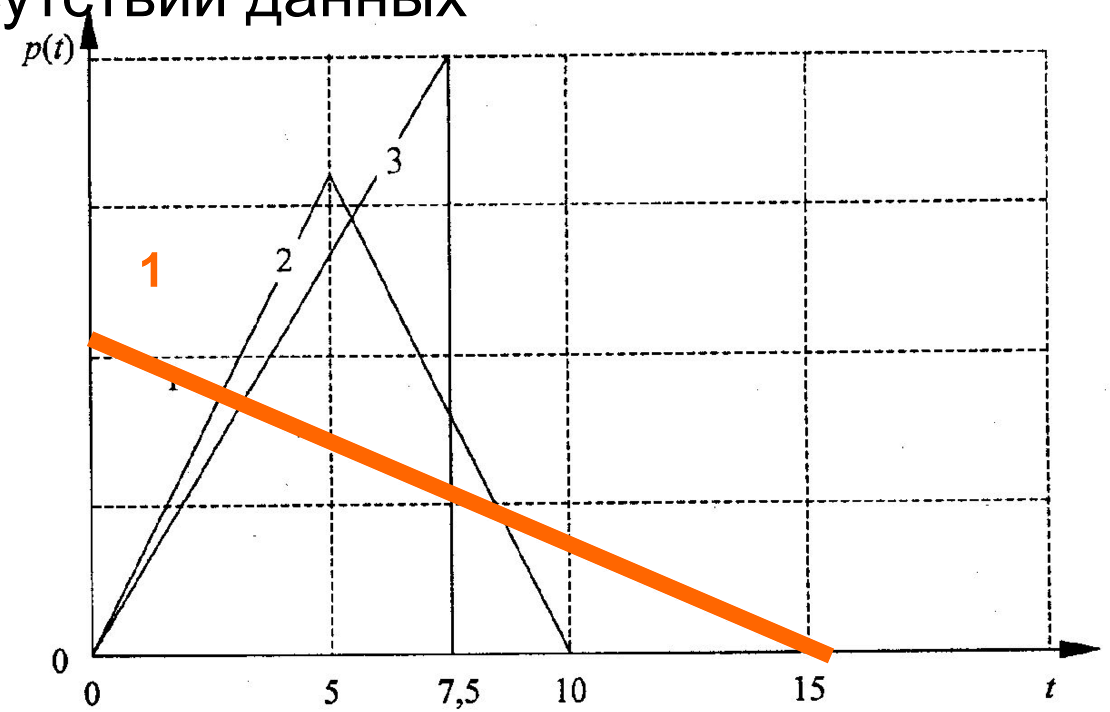


α1>0 ,α2>0 параметры формы

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha_1 - 1}(1-x)^{\alpha_2 - 1}}{B(\alpha_1, \alpha_2)} \; если \; 0 < x < 1 \\ 0 \; в \; противном \; случае \end{cases}$$

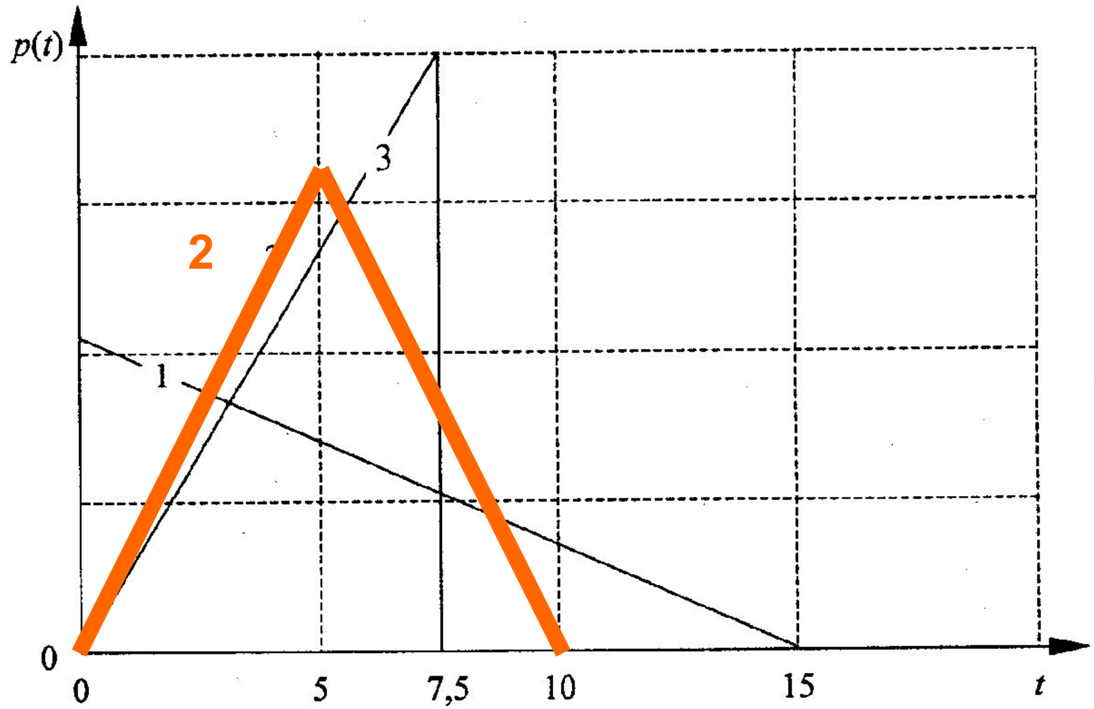
Треугольное распределение Triang(a,b,c)

• Используется как приблизительная модель в отсутствии данных



• наиболее вероятное время ответа на запрос близко к 0 с;
• минимальное вероятное время ответа не менее 0 с;
• максимальное вероятное время ответа не превышает 15 с;

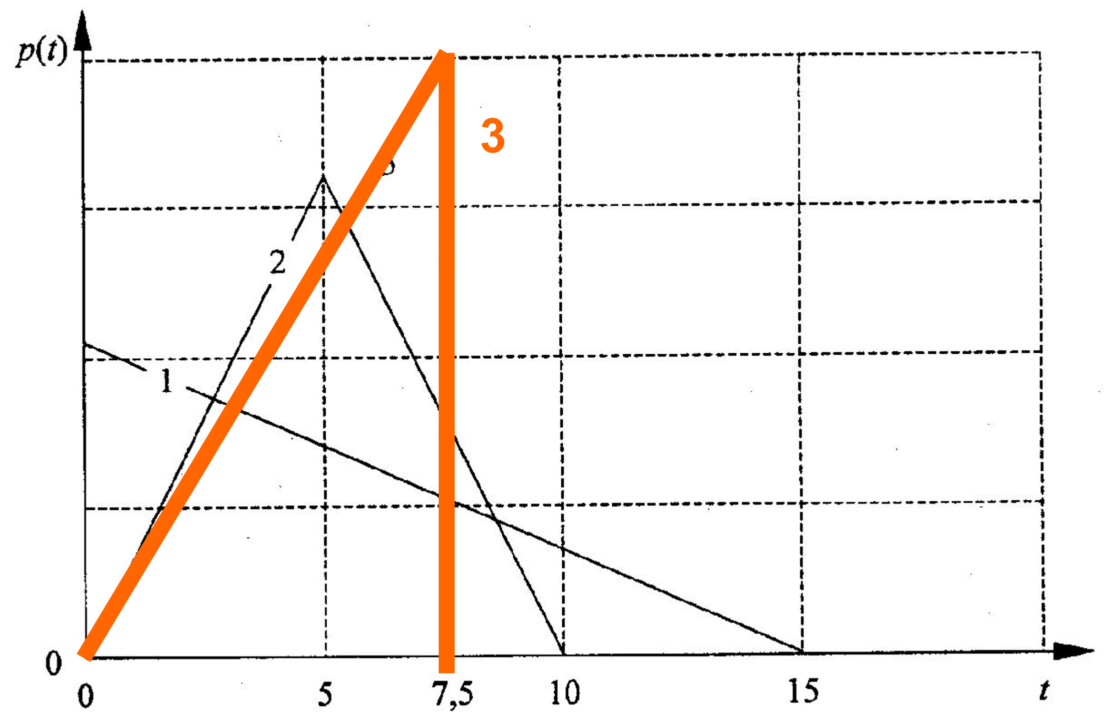
Треугольное распределение Triang(a,b,c)



- наиболее вероятное время ответа на запрос 5 с;
- минимальное вероятное время ответа не менее 0 с;
- максимальное вероятное время ответа не превышает 10 с;

Треугольное распределение Triang(a,b,c)

3.



- наиболее вероятное время ответа на запрос 7,5 с;
- минимальное вероятное время ответа не менее 0 с;
- максимальное вероятное время ответа не превышает 7,5 с;

Распределения дискретных случайных величин

1. Подготовка данных для ИМ
2. Дискретные законы распределения

Дискретные и непрерывные величины

все процессы, происходящие в природе, делятся на **непрерывные и дискретные.**

примерами **непрерывных** процессов являются различные природные объекты и их свойства: температура, давление и влажность воздуха, объекты технологических производственных процессов: давление и температура теплоносителя в ядерном реакторе. в определенный момент времени непрерывная случайная величина может быть выражена в численной форме, но в последствии это значение будет непрерывно изменяться.

изменяется плавно и непрерывно.

Случайная величина

Дискретными являются сигналы тревоги, языковые сообщения в виде звука и письма, жесты и т.П. Например, такие величины как количество человек в студенческой группе, число солнечных дней в году, высота горы, уровень интеллекта являются дискретными величинами, потому что имеют конкретный количественный признак, который некоторое время не изменяется.

Изменяется скачком.

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от различных факторов, которые не могут быть заранее учтены.

Эверест, высота 8850м

Дискретные распределения

1. **Распределение Бернулли**
2. **Биномиальное распределение**
3. **Распределение Пуассона**
4. **Геометрическое распределение**
5. **Равномерное распределение**
6. **Логарифмическое распределение**

Дискретные распределения

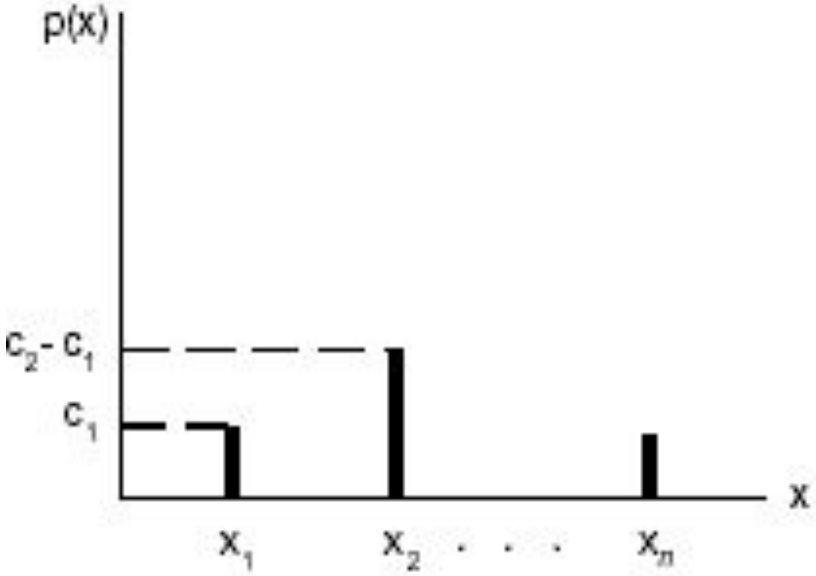
Дискретные величины могут принимать только конечное или счетное множество определенных значений.

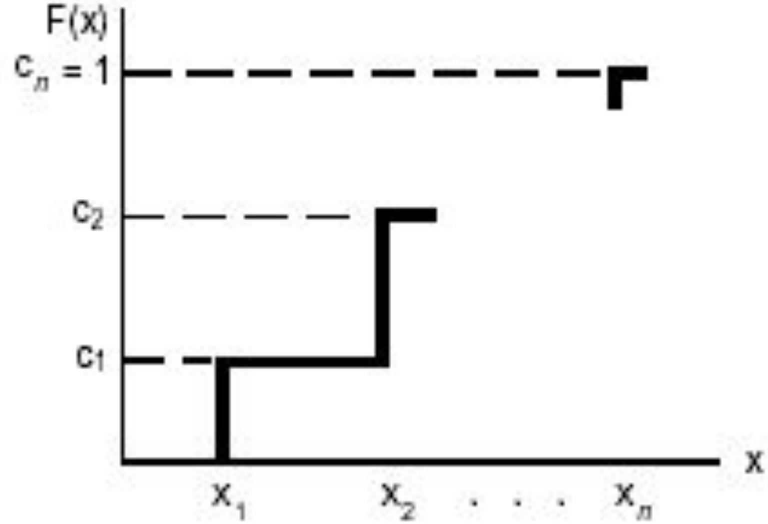
Например, число очков при бросании игральной кости; число телефонных звонков, поступающих конкретному абоненту в течение суток.

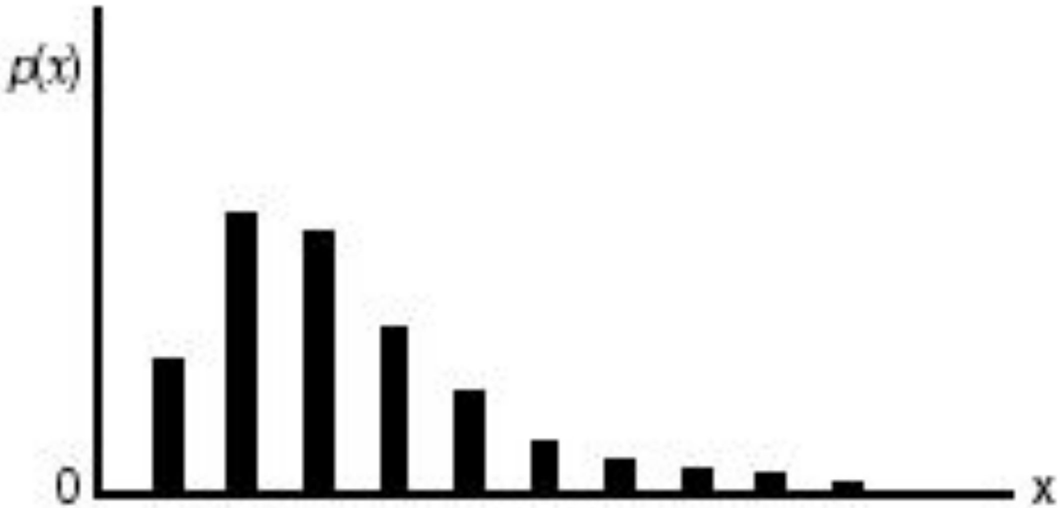
Такие величины удобнее характеризовать указанием возможных значений и их вероятностей.

Значения x_i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Вероятности p (x_i)	**0**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**
Кумулятивная вероятность	**0**	**1/6**	**2/6**	**3/6**	**4/6**	**5/6**	**1**

Примеры дискретных распределений







Дискретные распределения

- Дискретное распределение характеризуется тем, что оно сосредоточено в конечном или счетном числе точек.
- **Распределение Бернулли** – случайное событие с 2 возможными результатами; используется для генерирования других случайных дискретных величин

Биномиальное распределение – число успешных экспериментов в n независимых испытаниях бернулли, вероятность успеха каждого из которых равна p; количество «поврежденных» товаров в партии k.

Распределение Якоба Бернулли

Биномиальное распределение является распределением числа успехов **μ** в n испытаниях бернулли с вероятностью успеха ***p*** и неудачи **q = 1 - p.**

Опыт состоит в ***n***-кратном повторении одинаковых испытаний, в каждом из которых может с вероятностью ***p*** наступить некоторое событие (“успех”) или с вероятностью ***q = 1 - p*** не наступить (произошла “неудача”).

Появление или не появление некоторого наблюдаемого события в каждом испытании не будет зависеть от исходов предыдущих испытаний. Вероятность успеха и неудачи не меняются от опыта к опыту. Примером испытаний бернулли может служить подбрасывание монетки, кубика, извлечение карты из колоды, выстрелы по мишени и т.Д..

Значение, которое принимает случайная величина равны либо 0 либо 1.

P – это вероятность выпадения орла,

А **q** – вероятность выпадения решки.

P

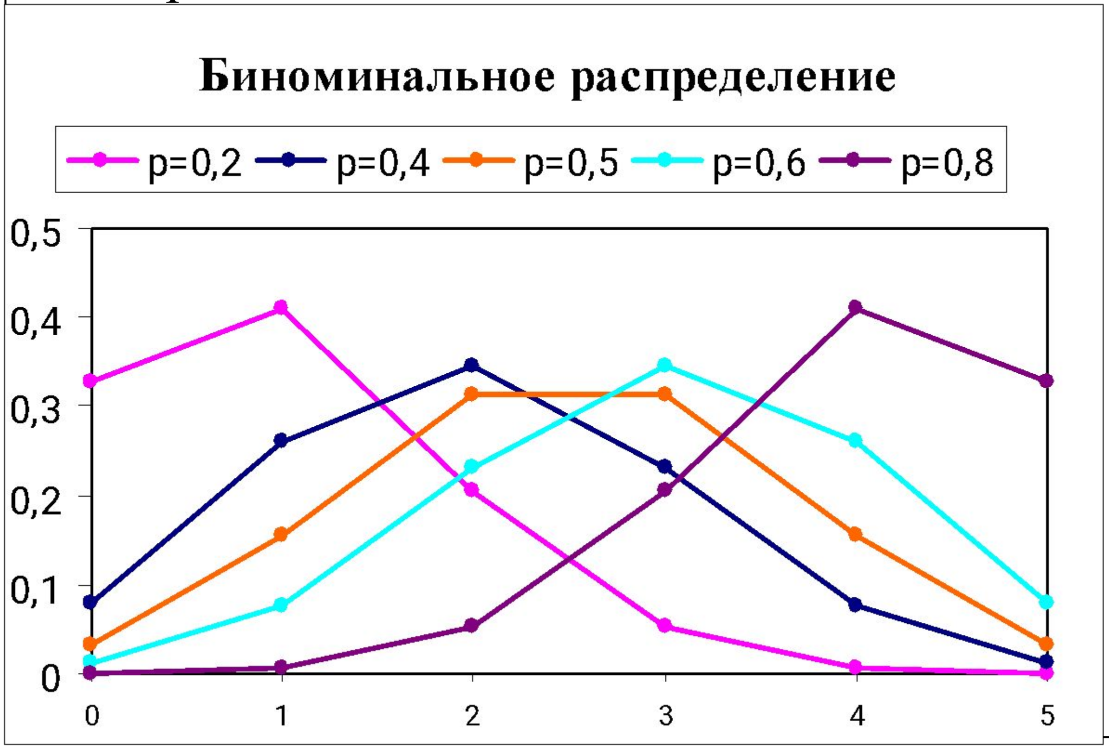
1
1
0
0
0
0
1
1
0
1
0,5

Биноминальное распределение

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Число успешных экспериментов в **n** независимых испытаниях бернулли, вероятность успеха каждого из которых равна р.

Типичный представитель схемы Бернулли **n**-кратное подбрасывание несимметричной монеты. Определение числа «поврежденных» товаров в партии.

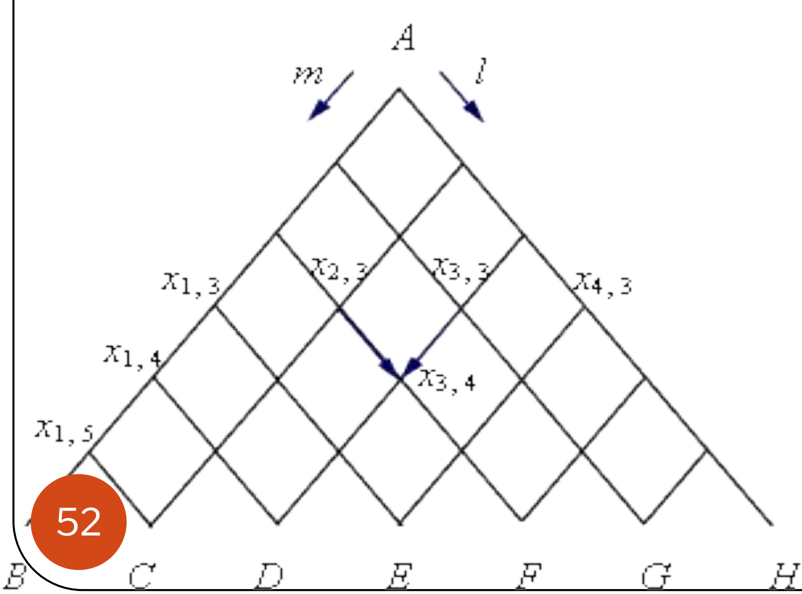


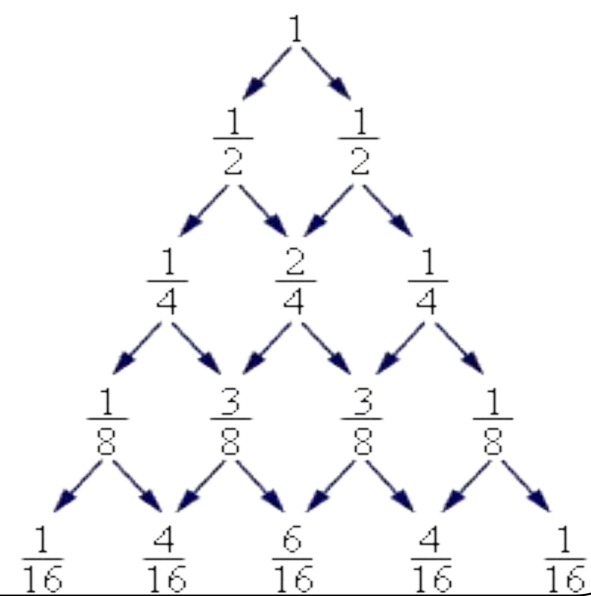
Биноминальное распределение для n=5

Основные характеристики распределения:
M(X)=np; D(X)=npq;

Биномиальное распределение связано с задачами о случайных блужданиях и перемешиваниях

Из пункта A по сети дорог идёт группа из N человек. На каждом перекрёстке, начиная с A , пришедшие туда люди с равной вероятностью поворачивают в направлении l и в направлении m . сколько человек придёт в пункты B , C , D , …, I соответственно?





Закон Пуассона

По закону Пуассона распределены, например, число вызовов, поступивших на телефонную станцию в короткий промежуток времени; число метеоритов, упавших в определенном районе; вероятность аварий.

Формула Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

где (k=0, 1, 2, ..., n).

$$\lambda = n \cdot p$$

Формула Пуассона применяется тогда, когда наряду с большим значением числа испытаний ***k*** "мала" вероятность успеха ***p***.

Она относится к приближенным формулам для вычисления ***pn(k)*** при больших ***k***. Формула пуассона наиболее простая из них.

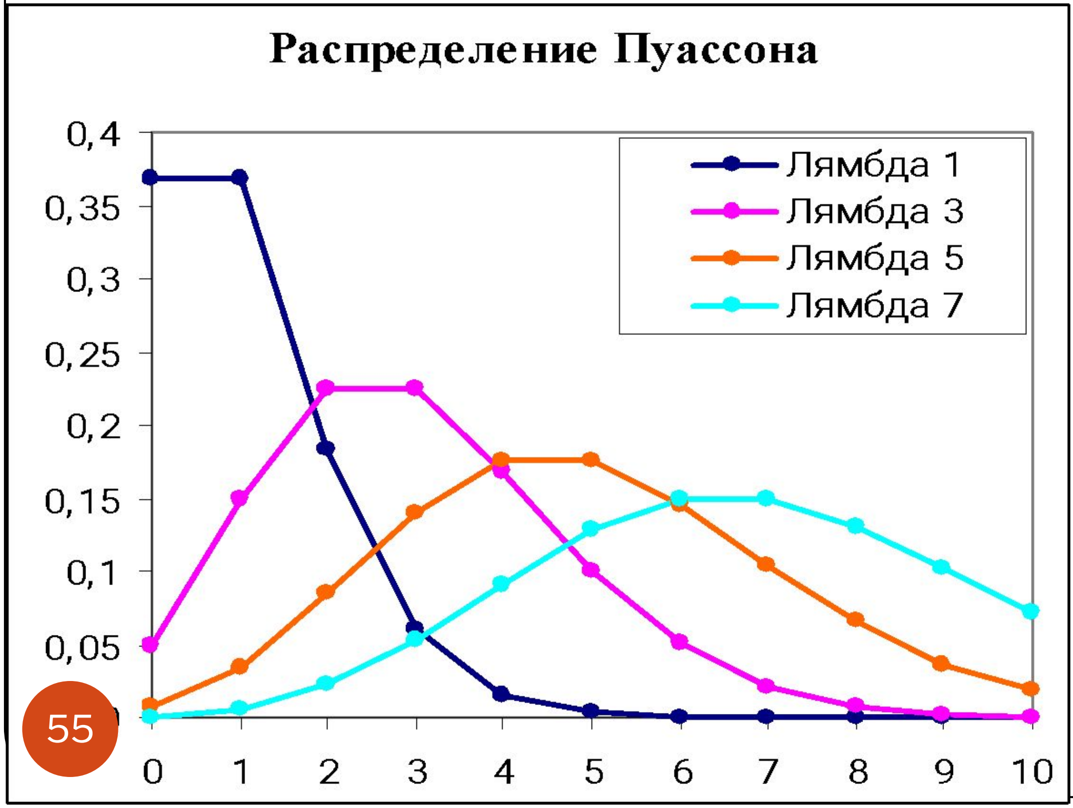
λ - Интенсивность поступления событий - постоянная

Пуассоновское распределение

Дискретная случайная величина ξ распределена по закону Пуассона, если она принимает целые неотрицательные значения с вероятностями, представленными рядом распределения, где $\lambda > 0$ параметр пуассоновского распределения. Распределение Пуассона носит также название **закона редких событий**, поскольку оно всегда появляется там, где производится большое число испытаний, в каждом из которых с малой вероятностью происходит “редкое” событие

Пуассоновское распределение

Потоком событий называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени. Например, поступление вызовов на станцию скорой помощи, прибытие самолетов в аэропорт, клиентов в пункт сервиса, покупателей в магазин и т.Д.



$$M(X) = \lambda; D(X) = \lambda$$

Геометрическое распределение

Если проводятся независимые испытания бернулли и подсчитывается количество испытаний до наступления успеха, то это число имеет геометрическое распределение

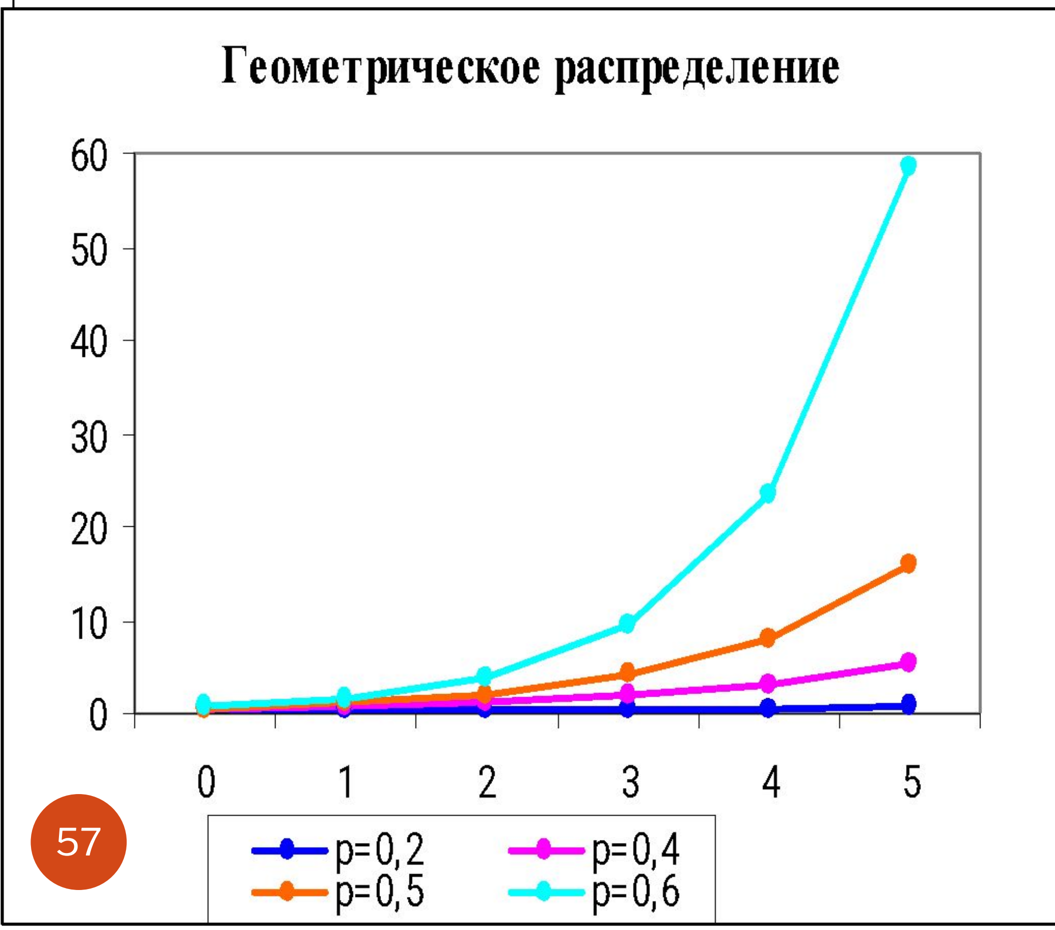
Геометрическое распределение описывает время безотказной работы (измеряемое целым числом часов) некоторого устройства

Пусть k — число испытаний, которое необходимо провести, прежде чем появится первый успех. Будем проводить испытания до тех пор, пока событие не произойдет.

Пусть ξ — дискретная случайная величина (количество произведенных испытаний), принимающая значения

1, 2, …, k, ….

Геометрическое распределение



Задача. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель p=0,6.

Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

Ре

$$p = q^{k-1} p = 0{,}4^2 * 0{,}6 = 0{,}096$$

Гипергеометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет ***гипергеометрическое распределение***, если она принимает значения 0, 1, 2, ..., $m, \dots N$ с вероятностями

$$P(X=m)=\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

Всего объектов в генеральной совокупности - **N**
Кол-во деталей с определенным свойством в сов. -**M**
Объем выборки - n
Кол-во деталей с определенным свойством - m

Из совокупности извлекается выборка из **n** объектов , а **m** - число объектов среди выбранных, обладающих данным свойством.
Гипергеометрическое распределение широко используется в практике статистического приёмочного контроля качества продукции.

Например, из партии в N=1000 деталей выбрали **n**=100 деталей, тогда **m** – это количество качественных деталей в выборке.

Равномерное распредел

Случайная величина имеет **дискретное равномерное распределение**, если она принимает конечное число значений с равными вероятностями.

Случайная величина, равная выпавшему числу на игральной кости, имеет дискретное равномерное распределение на множестве чисел: 1,2,3,4,5,6 и она принимает каждое значение с вероятностью 1/6.

Дискретное равномерное распределе

Дискретное равномерное распределение – случайное событие, имеющее несколько возможных результатов с одинаковой вероятностью успеха. Например, если надо сгенерировать производительность станков, которая может принимать значения от 1 до 6, то это задается так:

Disc(1/6, 1, 2/6, 2,3/6,3,4/6,4,5/6,5,1,6);

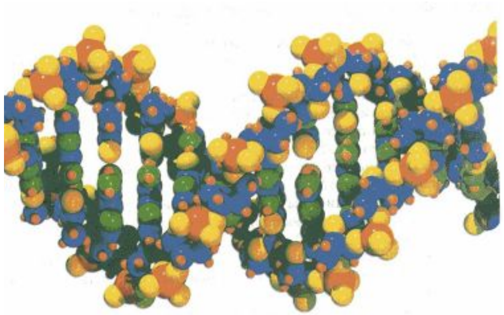
p(i),x(i)

Логарифимическое распределение

Логарифмическое распределение используется в различных приложениях, включая математическую генетику и физику.

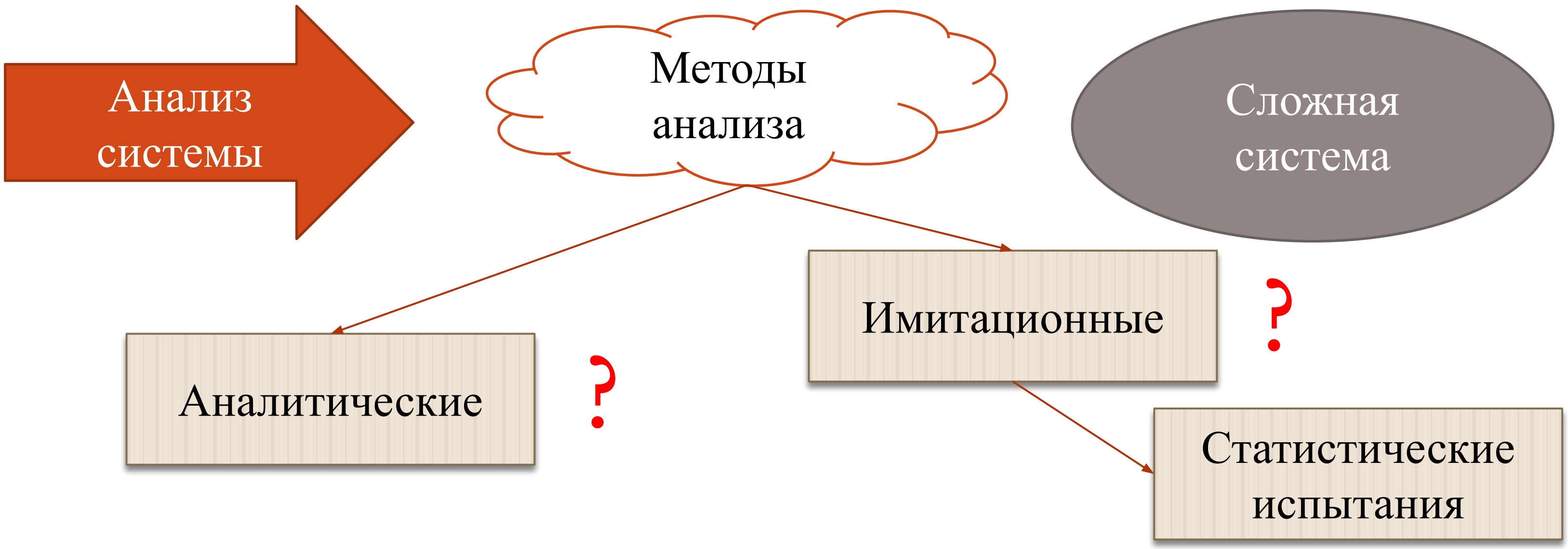
Например, строение моллюсков, нити днк, галлактики имеют форму логарифмической спирали.

$$P_n = -\frac{(1-p)^n}{n \cdot \ln p}$$



Метод Монте-Карло для моделирования систем

Моделирование систем



- Иногда для исследования системы можно построить аналитическую модель, однако это возможно далеко не всегда. Для систем со случайными событиями и величинами это невозможно!

- Когда построение аналитической модели невозможно применяется подход называемый "методом статистических испытаний". Его более распространенное название – "метод Монте-Карло». В рамках этого метода производится моделирование фактора с использованием некоторой процедуры, дающей случайный результат.

Метод Монте-Карло

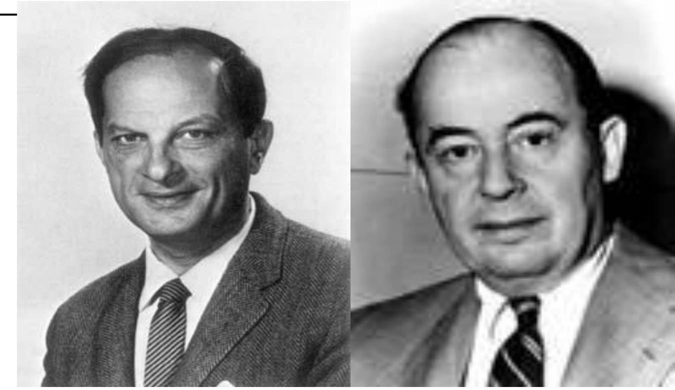
При моделировании случайных явлений методом Монте-Карло мы пользуемся самой случайностью как аппаратом исследования, заставляем ее «работать на нас».

При нехватке входных данных для модели метод восполняет этот недостаток.

Для сложных операций, в которых участвует большое число элементов (машин, людей, организаций, документов), в которых случайные факторы сложно переплетены, метод статистического моделирования, как правило, оказывается проще аналитического (а нередко бывает и единственно возможным).

В сущности, методом Монте-Карло может быть решена любая вероятностная задача, но оправданным он становится только тогда, когда **процедура розыгрыша проще, а не сложнее аналитического расчета.**

Станислав Улам; Джон фон Нейман



Метод Монте-Карло

Метод Монте-Карло - это численный метод решения имитационных задач при помощи моделирования (ГЕНЕРАЦИИ) случайных величин. Датой рождения метода Монте-Карло принято считать 1949 г., когда появилась статья под названием «The Monte Carlo method». Создателями этого метода считают американских математиков **Дж. Неймана и Ст. Улама.**

В СССР первые статьи о методе Монте-Карло были опубликованы в 1955-1956 гг. Теоретическая основа метода была известна давно. Некоторые задачи статистики рассчитывались с помощью случайных выборок, методом Монте-Карло.

До появления компьютеров моделировать случайные величины вручную было трудно. Таким образом, возникновение метода Монте-Карло как универсального численного метода стало возможным только благодаря появлению ЭВМ.

Метод Монте-Карло

Идея метода чрезвычайно проста и состоит в сл Производится «розыгрыш» случайного явления с помощью специально организованной процедуры, включающей в себя случайность и дающей случайный результат.

В действительности случайный процесс происходит каждый раз по-иному; так же и в результате статистического моделирования мы получаем каждый раз новую, отличную от других реализацию исследуемого процесса.

Множество реализаций случайного процесса можно использовать как искусственно полученный статистический материал, который может быть обработан обычными методами математической статистики. **После обработки можно рассчитать такие характеристики:** вероятности событий, атематические ожидания и дисперсии и т. д.

Генерация случайных чисел на ЭВМ

При компьютерном моделировании возникает задача генерации случайных числовых последовательностей с заданными вероятностными характеристиками.

Необходимость генерации случайных чисел связана с нехваткой входных данных эксперимента.

Каждое число – это имитация случайного значения какого-либо параметра реального процесса или системы, подверженного случайным возмущениям.

Например, при моделировании работы банка нужно получить случайные величины, соответствующие времени прихода клиентов в банк, сгенерировать количество пришедших клиентов.

t=8:15; 8:31; 9:02; 9:15; 9:24; 9:37……. N=87

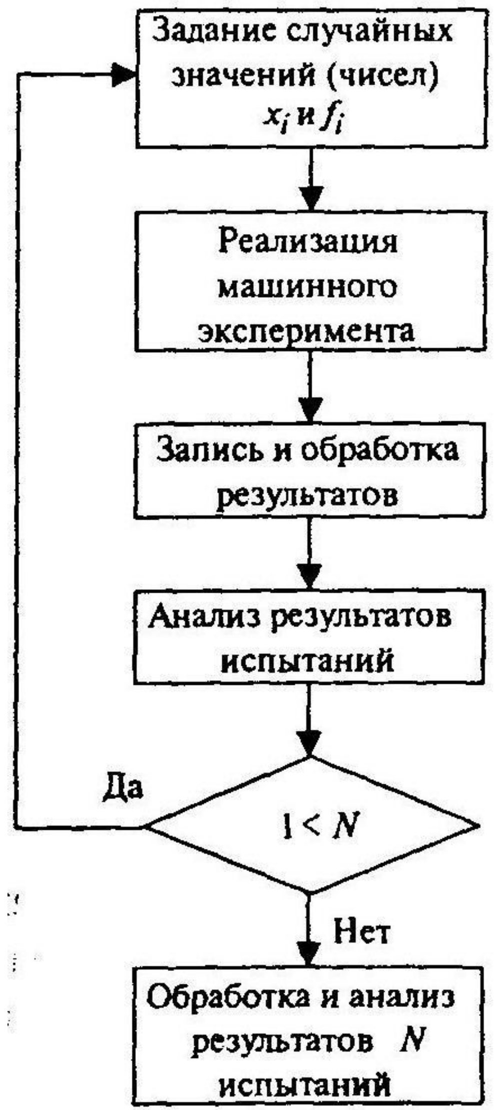
Как генерируются случайные числа?

- Вначале получают последовательность равномерно распределенных на интервале [0, 1] псевдослучайных чисел.
- Из равномерно распределенной последовательности получают последовательность псевдослучайных чисел с заданным законом распределения в заданном интервале.

Равномерным называется такое распределение, при котором каждое возможное случайное число равновероятно. Обычно, если специально не оговорен закон распределения случайных чисел, то имеют в виду равномерное распределение.

Получение равномерно распределенных псевдослучайных чисел заключается в том, что числа формируют с помощью некоторой рекуррентной формулы, где каждое следующее значение образуется из предыдущего путем применения некоторого алгоритма.

Как генерируются случайные числа?



Методы генерации равномерного распределения

Известно большое количество методов имитации равномерного распределения:

- **методы середины квадратов,**
- **вычетов,**
- **суммирования,**
- **усечения,**
- **перемешивания.**

Общими для всех этих методов являются требования:

- количество операций для получения каждого псевдослучайного числа должно быть минимальным;
- случайные числа должны быть как можно менее коррелированными, а их распределение – близким к равномерному

Метод середины квадрата

Первым алгоритм получения равномерно распределенных псевдослучайных чисел предложил Джон фон Нейман (основоположник кибернетики). **Суть метода:** случайное число возводится в квадрат, а затем из результата извлекаются средние цифры. Например:

$$x_0 = 0.2061,\_\,\textit{тогда}\,\_\,x_0^2 = 0.04\,|\,2477\,|\,21;$$

$$x_1 = 0.2477,\_\,x_1^2 = 0.06\,|\,1355\,|\,29;$$

$$x_2 = 0.1355,\_\,x_2^2 = 0.01\,|\,8360\,|\,25$$

Метод середины квадрата хорошо "перемешивает" предыдущее число. Однако он имеет недостатки:

- если какой-нибудь член последовательности окажется равным нулю, то все последующие члены также будут нулями;
- последовательности имеют тенденцию «зацикливаться», т. е. в конце концов, образуют цикл, который повторяется бесконечное число раз.

«Зацикливание" присуще всем последовательностям, построенным по рекуррентной формуле. Повторяющийся цикл называется периодом. Длина периода у различных последовательностей разная. Чем больше, тем лучше.

Области использования метода Монте-Карло

- Создание последовательности случайных величин для задач моделирования систем и процессов из области экономики:
  - генерация случайных событий в модели
  - входные данные для эксперимента
  - промежуточные параметры модели
- Определение значений интегралов функций
- Определение площадей геометрических фигур, которые описаны сложными функциями
- Определение числа ¶ **(пи)**

Точность метода Монте-Карло

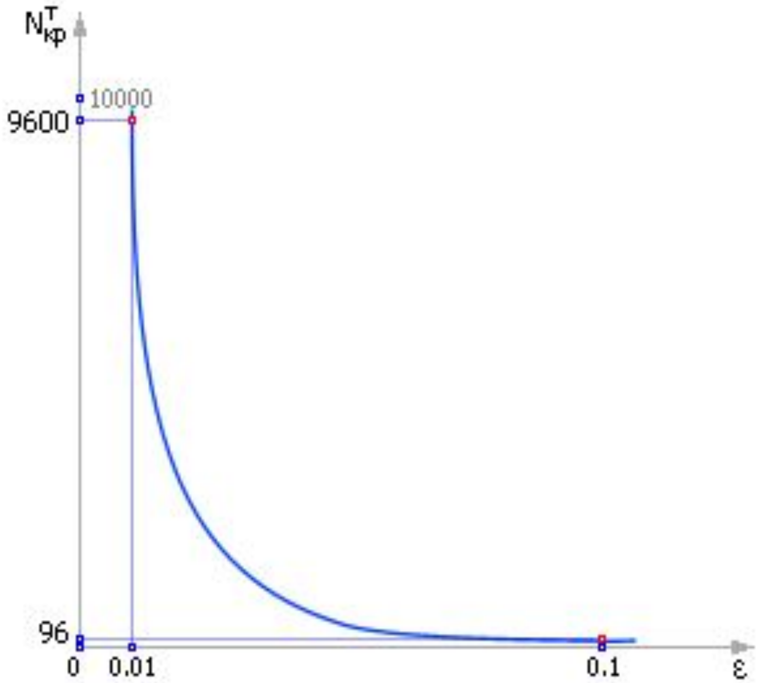
- Метод Монте-Карло чрезвычайно эффективен, прост, но необходим «хороший» генератор случайных чисел. Вторая проблема применения метода заключается в определении объема выборки, то есть количества точек, необходимых для обеспечения решения с заданной точностью.
- Эксперименты показывают: чтобы увеличить точность в 10 раз, объем выборки нужно увеличить в 100 раз; то есть точность примерно пропорциональна корню квадратному из объема выборки:
  - Точность $\varepsilon = \sqrt{N}$

Допустим в областях, где допускается уровень ошибки 5-10%

Количество экспериментов, необходимых для обеспечения точности при уровне доверия 95%

- Точность $\varepsilon = \sqrt{N}$

Точность ε	Критическое число экспериментов $N_{кр}^{т}$
0.1	96
0.01	9600
0.001	960000



Методы определения распределений

Методы расположены в порядке предпочтения!

1. **Использование системных входных данных за прошлое время**
   - Может воспроизводиться только то, что уже происходило ранее
   - Моделирование в течение определенного времени
   - Проверка адекватности (метод коррелированной проверки)
2. **Подбор эмпирического распределения**
   - Если данные непрерывны, может быть сгенерировано любое значение между точками минимума и максимума данных наблюдений
   - «Искажения» при небольшом количестве данных

Методы определения распределений

Подбор теоретических распределений

- Оптимальный способ представления набора данных
- «Сглаживание» данных
- Генерирование значений вне области данных наблюдений
- Простота изменения
- Возможность генерации сколь угодно больших значений