Дифференциальные уравнения

Основные понятия

Дифференциальные уравнения.

- **Задача о первообразной.**
- Найти функцию $y(x)$ такую, что

$$\boxed{y' = f(x)}$$

- **Решение.**

$$y(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$$

Дифференциальные уравнения.

- **Задача о движении.**
- Материальная точка движется вдоль оси OX
- со скоростью **V(t)**. Найти закон движения **x(t)**.
- **Решение.**
- Скорость движения - $x'(t)$
- Поэтому

$$\boxed{x' = V(t)}$$

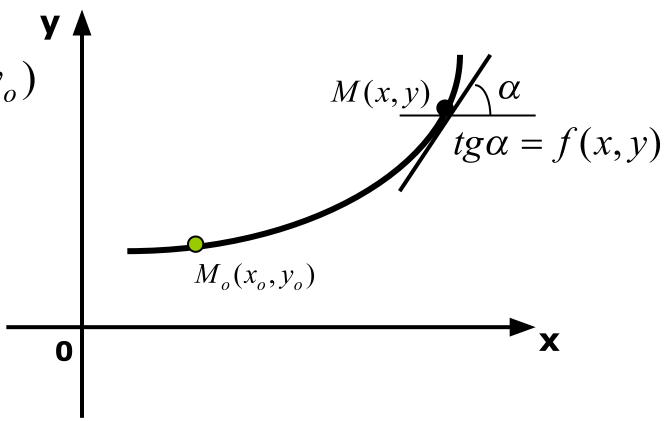
- Тогда $$x(t) = \int V(t)dt = F(t) + C$$
- где $F(t)$ - первообразная.
  - Пусть $t = t_o\ ,\ x = x_o$

$$\Rightarrow x_o = F(t_o) + C,$$

$$\textit{то есть}\ \ C = x_o - F(t_o)$$

$$\Rightarrow\ \ x(t) = F(t) - F(t_o) + x_o$$

- **Задача о касательной.**
- Найти кривую $y(x)$, проходящую через точку $M_o(x_o, y_o)$
- такую, что в **каждой точке кривой** $M(x, y)$
- угловой коэффициент касательной равен $f(x, y)$



- **Решение.**
- Угловой коэффициент касательной
- в точке $M(x, y)$ равен $y'(x)$
- Следовательно

$$\boxed{y' = f(x, y)}$$

Дифференциальные уравнения.

- **Определение 1.**
- **Дифференциальным уравнением порядка n**
- называется уравнение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

Определение 3.

Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

называется уравнением, **разрешенным относительно старшей производной.**

- **Определение 2.**
- **Порядком** дифференциального уравнения
- называется порядок **старшей** производной,
- входящей в уравнение.

- **Определение 4.**
- **Решением** дифференциального уравнения (1) называется функция $y = \varphi(x)$, которая удовлетворяет уравнению, то есть

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

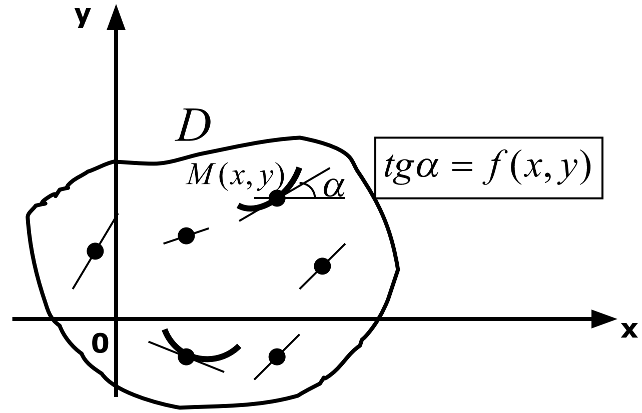
- при $x \in (a, b)$

В частности: при n=1

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

Дифференциальные уравнения.

- **Геометрический смысл уравнения** $\boxed{y' = f(x,y)}$ **(2)**
  - Функция $f(x,y)$ определена в области D.
- **Определение 5.**
- Пусть в каждой точке $M(x,y) \in D$ проведен
- отрезок с угловым коэффициентом $k = f(x,y)$
- Говорят, что уравнение (2) задает
- **поле направлений в области** D **.**



- **График** решения дифференциального уравнения называется **интегральной кривой.**

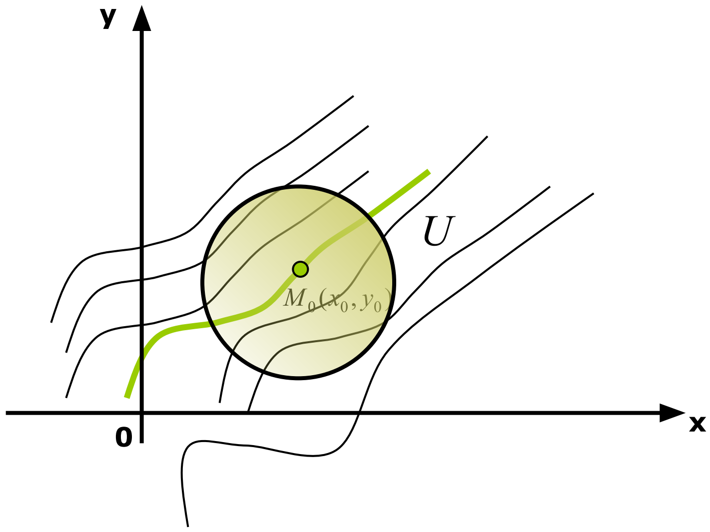
Интегральные кривые в каждой точке $M(x,y) \in D$ имеют касательную, совпадающую с **полем направлений** в этой точке.

Дифференциальные уравнения.

- **Задача Коши.**
- Найти решение уравнения $y' = f(x,y)$
- удовлетворяющее **начальному условию:**

$$y = y_0 \quad при \quad x = x_0$$

  - Другая запись: $y(x_0) = y_0 \quad или \quad y\big|_{x=x_0} = y_0$



  - **Геометрический смысл задачи Коши.**
  - Найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$

Дифференциальные уравнения.

Теорема ($\exists$! **).**

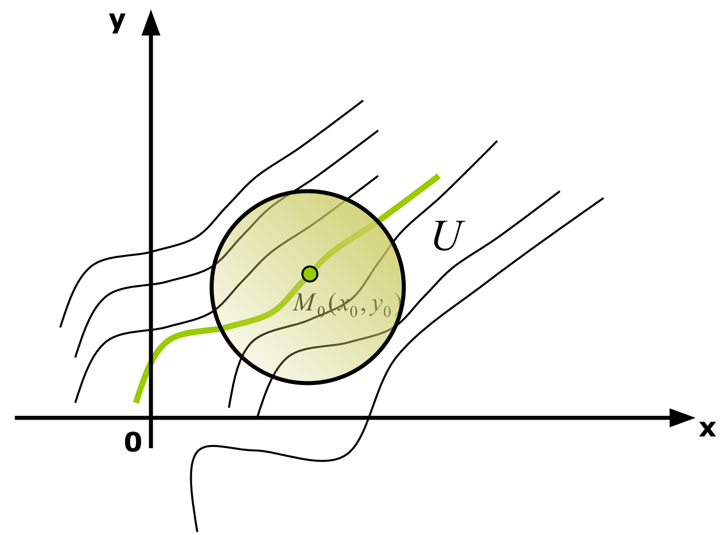
Пусть:

1. $y' = f(x, y)$

$y(x_0) = y_0$

2. $f(x, y)$ *и* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *– непрерывные*

в окрестности U *точки* (x_0, y_0)



Тогда**:** **1. Существует единственное** решение $y = y(x)$ данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$

2. $y = y(x)$ **-** определена в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

3. $y(x)$ *и* $y'(x)$ **-** непрерывные в окрестности.

Дифференциальные уравнения.

- **Пример 2.**
- Найти решение уравнения

$$y' = y - x,$$

- удовлетворяющее заданному начальному условию:

$$a)\ y(0) = 1\ ,\quad b)\ y(0) = 2$$

- **(Решить две задачи Коши).**
- Решение.
- Данное уравнение является линейным уравнением первого порядка.
- Оно интегрируется в квадратурах:

$$y = x + 1 + Ce^{x}$$

- Решение задачи Коши имеет вид:

$$в\ случае\ a)\ y = x + 1,\qquad в\ случае\ b)\ y = (x+1) + e^{x},$$

$$(C = 0)\qquad\qquad (C = 1)$$

Дифференциальные уравнения.

- **Определение.**
- **Общим решением** дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$
- в области D называется функция $y = \varphi(x, C)$, зависящая от x
- и произвольной постоянной C, непрерывная, имеющая непрерывные частные производные, и удовлетворяющая условиям:
- 1) при любых значениях C , таких что точка $(x, \varphi(x, C)) \in D$,
- функция $y = \varphi(x, C)$ является решением
- дифференциального уравнения;
- 2) при любых $(x_0, y_0) \in D$ найдется такое значение $C = \widetilde{C}$,
- что решение $y = \varphi(x, \widetilde{C})$ удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$

- Решение, полученное из общего решения при конкретном значении C, называется **частным решением.**

Дифференциальные уравнения.

- **Пример.**

$$y' = \cos x \;\Rightarrow\; y = \int \cos x dx = \sin x + C \Rightarrow$$

$$y = \sin x + C \;-\; \underline{\textit{общее решение}}\ \textit{Д.У.}$$

$$\left.\begin{array}{l} C = 0 \;\Rightarrow\; y = \sin x \\ C = 1 \;\Rightarrow\; y = \sin x + 1 \\ C = -\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; y = \sin x - \dfrac{1}{2} \end{array}\right]$$

<u>Частные решения</u> Д.У.

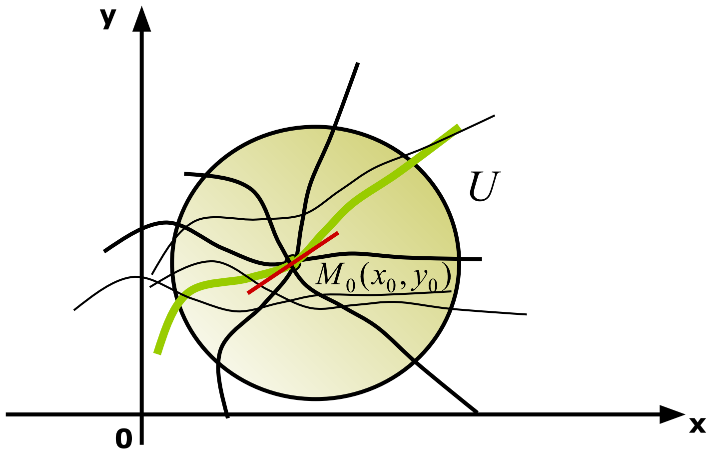
Дифференциальные уравнения.

- **Задача Коши для уравнения**

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (3)$$

- Найти решение уравнения (3), удовлетворяющее
- **начальным условиям:**

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$



- **Геометрический смысл задачи Коши.**
- Найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ с заданными угловым коэффициентом касательной: $k = y_1$

Дифференциальные уравнения.

- **Теорема ($\exists !$).**
- Пусть;
- **1.** $\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1. \end{cases}$
- **2.** $f(x, y, y')$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$

  $-$ *непрерывные функции в окрестности U точки (x_o, y_0, y_1)*

Тогда:

1. Существует единственное решение $y = y(x)$ данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям;

2. $y = y(x)$ определена в окрестности $(x_0 - \delta\ , x_0 + \delta)$

3. $y(x)\ , y'(x)\ , y''(x) -$

$-$ *непрерывные функции.*

Дифференциальные уравнения.

- **Определение.**
- **Общим решением** дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y')$
- называется функция $y(x, C_1, C_2)$, зависящая от x и двух произвольных постоянных C_1 и C_2 таких,
- что при каждых значениях C_1 и C_2 функция $y(x, C_1, C_2)$ является решением данного дифференциального уравнения.

- Решение, полученное из общего решения при конкретных значениях C_1 и C_2, называется **частным решением** дифференциального уравнения..