

Дифференциальные уравнения



Основные понятия

Дифференциальные уравнения.

□ **Задача о первообразной.**

- Найти функцию $y(x)$ такую, что

$$y' = f(x)$$

□ **Решение.**

$$y(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$$

Дифференциальные уравнения.

□ **Задача о движении.**

- Материальная точка движется вдоль оси OX
- со скоростью $\mathbf{V(t)}$. Найти закон движения $\mathbf{x(t)}$.

□ **Решение.**

- Скорость движения - $x'(t)$
- Поэтому

$$\boxed{x' = V(t)}$$

- Тогда $x(t) = \int V(t)dt = F(t) + C$
- где $F(t)$ - первообразная.

- Пусть $t = t_o, x = x_o$

$$\Rightarrow x_o = F(t_o) + C,$$

$$\text{то есть } C = x_o - F(t_o)$$

$$\Rightarrow x(t) = F(t) - F(t_o) + x_o$$

Дифференциальные уравнения.

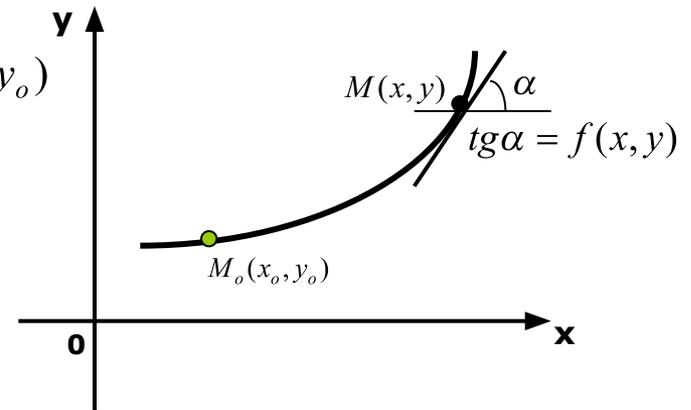
□ **Задача о касательной.**

- Найти кривую $y(x)$, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$
- такую, что в **каждой точке кривой** $M(x, y)$
- угловой коэффициент касательной равен $f(x, y)$

□ **Решение.**

- Угловой коэффициент касательной
- в точке $M(x, y)$ равен $y'(x)$
- Следовательно

$$y' = f(x, y)$$



Дифференциальные уравнения.

- ▣ **Определение 1.**
- ▣ **Дифференциальным уравнением порядка n**
- ▣ называется уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$



- Определение 3.**
- Уравнение вида**

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

называется уравнением,
**разрешенным относительно
старшей производной.**

- ▣ **Определение 2.**
- ▣ **Порядком** дифференциального уравнения
- ▣ называется порядок **старшей** производной,
- ▣ входящей в уравнение.

- ▣ **Определение 4.**
- ▣ **Решением** дифференциального уравнения (1)
- называется функция $y = \varphi(x)$, которая
- удовлетворяет уравнению, то есть

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

- ▣ при $x \in (a, b)$

В частности: при $n=1$

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

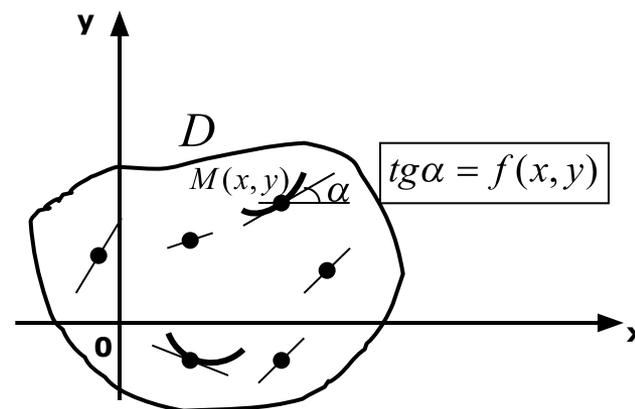
Дифференциальные уравнения.

□ Геометрический смысл уравнения $y' = f(x, y)$ (2)

- Функция $f(x, y)$ определена в области D .

□ **Определение 5.**

- Пусть в каждой точке $M(x, y) \in D$ проведен отрезок с угловым коэффициентом $k = f(x, y)$
- Говорят, что уравнение (2) задает **поле направлений в области D** .



- **График** решения дифференциального уравнения называется **интегральной кривой**.

Интегральные кривые в каждой точке $M(x, y) \in D$ имеют касательную, совпадающую с **полем направлений** в этой точке.

Дифференциальные уравнения.

□ **Задача Коши.**

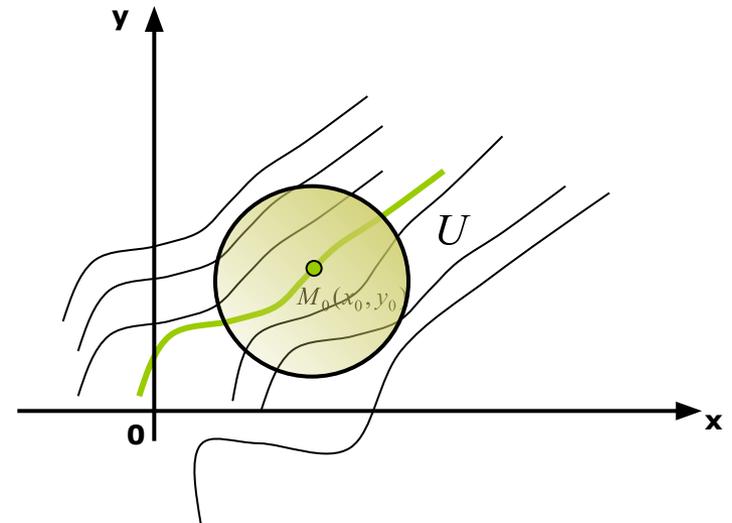
- Найти решение уравнения $y' = f(x, y)$
- удовлетворяющее **начальному условию:**

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0$$

- Другая запись: $y(x_0) = y_0$ или $y|_{x=x_0} = y_0$

■ **Геометрический смысл задачи Коши.**

- Найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$



Дифференциальные уравнения.

Теорема ($\exists!$).

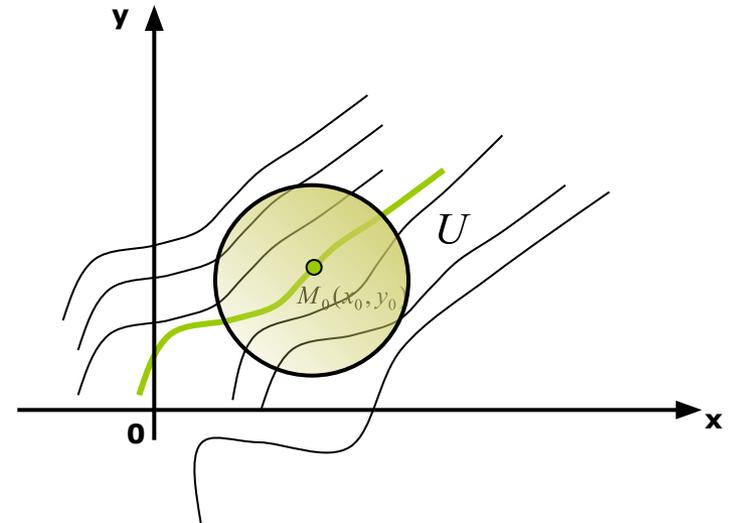
Пусть:

1. $y' = f(x, y)$

$$y(x_0) = y_0$$

2. $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ – непрерывные

в окрестности U точки (x_0, y_0)



Тогда:

1. **Существует единственное** решение $y = y(x)$ данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$
2. $y = y(x)$ - определена в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
3. $y(x)$ и $y'(x)$ – непрерывные в окрестности.

Дифференциальные уравнения.

▣ **Пример 2.**

- ▣ Найти решение уравнения

$$y' = y - x,$$

- ▣ удовлетворяющее заданному начальному условию:

$$a) y(0) = 1, \quad b) y(0) = 2$$

▣ **(Решить две задачи Коши).**

- ▣ Решение.

- ▣ Данное уравнение является линейным уравнением первого порядка.

- ▣ Оно интегрируется в квадратурах:

$$y = x + 1 + Ce^x$$

- ▣ Решение задачи Коши имеет вид:

$$\text{в случае } a) \quad y = x + 1, \quad \text{в случае } b) \quad y = (x + 1) + e^x,$$
$$(C = 0) \qquad \qquad \qquad (C = 1)$$

Дифференциальные уравнения.

- **Определение.**
- **Общим решением** дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$
- в области D называется функция $y = \varphi(x, C)$, зависящая от x
- и произвольной постоянной C , непрерывная, имеющая непрерывные частные производные, и удовлетворяющая условиям:
- 1) при любых значениях C , таких что точка $(x, \varphi(x, C)) \in D$,
- функция $y = \varphi(x, C)$ является решением
- дифференциального уравнения;
- 2) при любых $(x_0, y_0) \in D$ найдется такое значение $C = \tilde{C}$,
- что решение $y = \varphi(x, \tilde{C})$ удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$

- Решение, полученное из общего решения при конкретном значении C , называется **частным решением**.

Дифференциальные уравнения.

▣ **Пример.**

$$y' = \cos x \Rightarrow y = \int \cos x dx = \sin x + C \Rightarrow$$

$y = \sin x + C$ – общее решение Д.У.

$$C = 0 \Rightarrow y = \sin x$$

$$C = 1 \Rightarrow y = \sin x + 1$$

$$C = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \sin x - \frac{1}{2}$$

Частные
решения Д.У.

Дифференциальные уравнения.

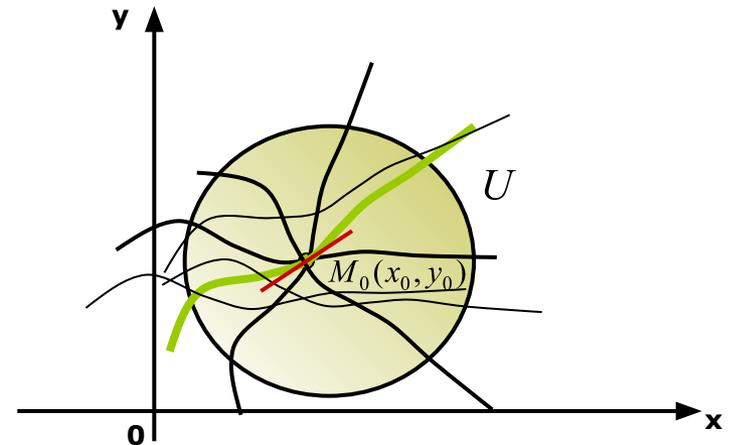
□ Задача Коши для уравнения

$$y'' = f(x, y, y') \quad (3)$$

- Найти решение уравнения (3), удовлетворяющее
- начальным условиям:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

- Геометрический смысл задачи Коши.
- Найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ с заданными угловым коэффициентом касательной: $k = y_1$



Дифференциальные уравнения.

□ Теорема ($\exists!$).

□ Пусть;

□ 1.
$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1. \end{cases}$$

□ 2. $f(x, y, y'), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y'), \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$

– непрерывные функции в окрестности U точки (x_0, y_0, y_1)



Тогда:

1. Существует единственное решение $y = y(x)$ данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям;

2. $y = y(x)$ определена в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

3. $y(x), y'(x), y''(x)$ –
– непрерывные функции.

Дифференциальные уравнения.

- ▣ **Определение.**
- ▣ **Общим решением** дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y')$
- ▣ называется функция $y(x, C_1, C_2)$, зависящая от x и двух произвольных постоянных C_1 и C_2 таких,
- ▣ что при любых значениях C_1 и C_2 функция $y(x, C_1, C_2)$ является решением данного дифференциального уравнения.

- ▣ Решение, полученное из общего решения при конкретных значениях C_1 и C_2 , называется **частным решением** дифференциального уравнения..