Теоретическая механика

Часть 1

Кинематика

Глава 3. Движение твердой среды

§ 10. Плоскопараллельное движение твердой среды. Определение и примеры

Пусть твердая среда Σ движется относительно неподвижной декартовой системы отсчета $S=(O,E_1,E_2,E_3)$, $v_A=\dot{r}_{OA}$ – скорость точки $A\in\Sigma$ в S.

Определение. Движение среды Σ относительно системы S называется ***плоскопараллельным***, если существует такое двумерное подпространство L_0 в $\mathbb{R}^3$, что $(\forall A\in\Sigma)(\forall t\in(\alpha,\beta))[v_A(t)\in L_0]$.

Подпространство L_0 называется ***пространством скоростей*** среды Σ.

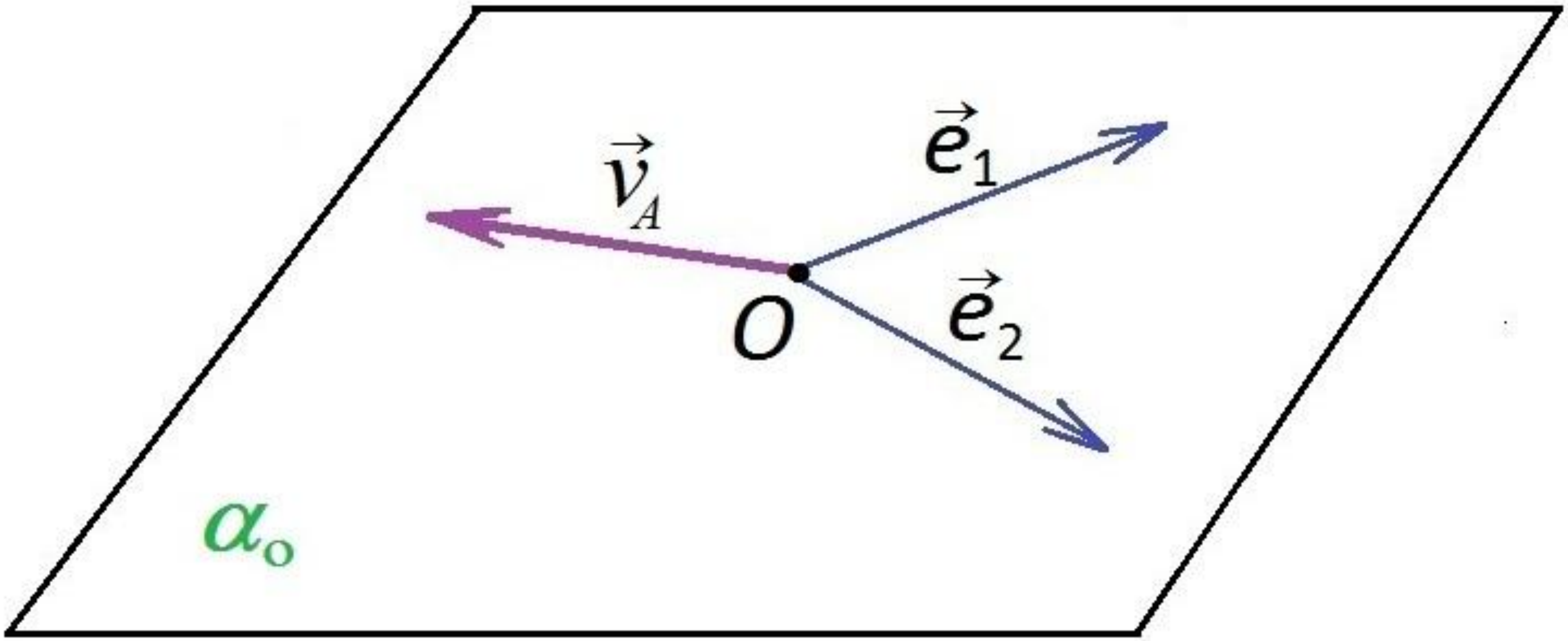
Двумерность подпространства L_0 означает, что в L_0 существуют линейно независимые векторы e_1 и e_2, такие, что $L_0 = \mathcal{L}in(e_1, e_2)$ – линейная оболочка векторов e_1 и e_2 (то есть векторы e_1 и e_2 образуют базис в L_0). Тогда для всякой точки $A \in \Sigma$ в каждый момент времени t найдутся такие числа $\lambda(t)$ и $\mu(t)$, что скорость $v_A(t) = \lambda(t)e_1 + \mu(t)e_2$.

Соответствующие геометрические векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ также линейно независимы, а следовательно, неколлинеарны.

Рассмотрим плоскость α_0 в абсолютном пространстве, проходящую через точку O и параллельную векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Тогда геометрический вектор скорости точки $A \in \Sigma$

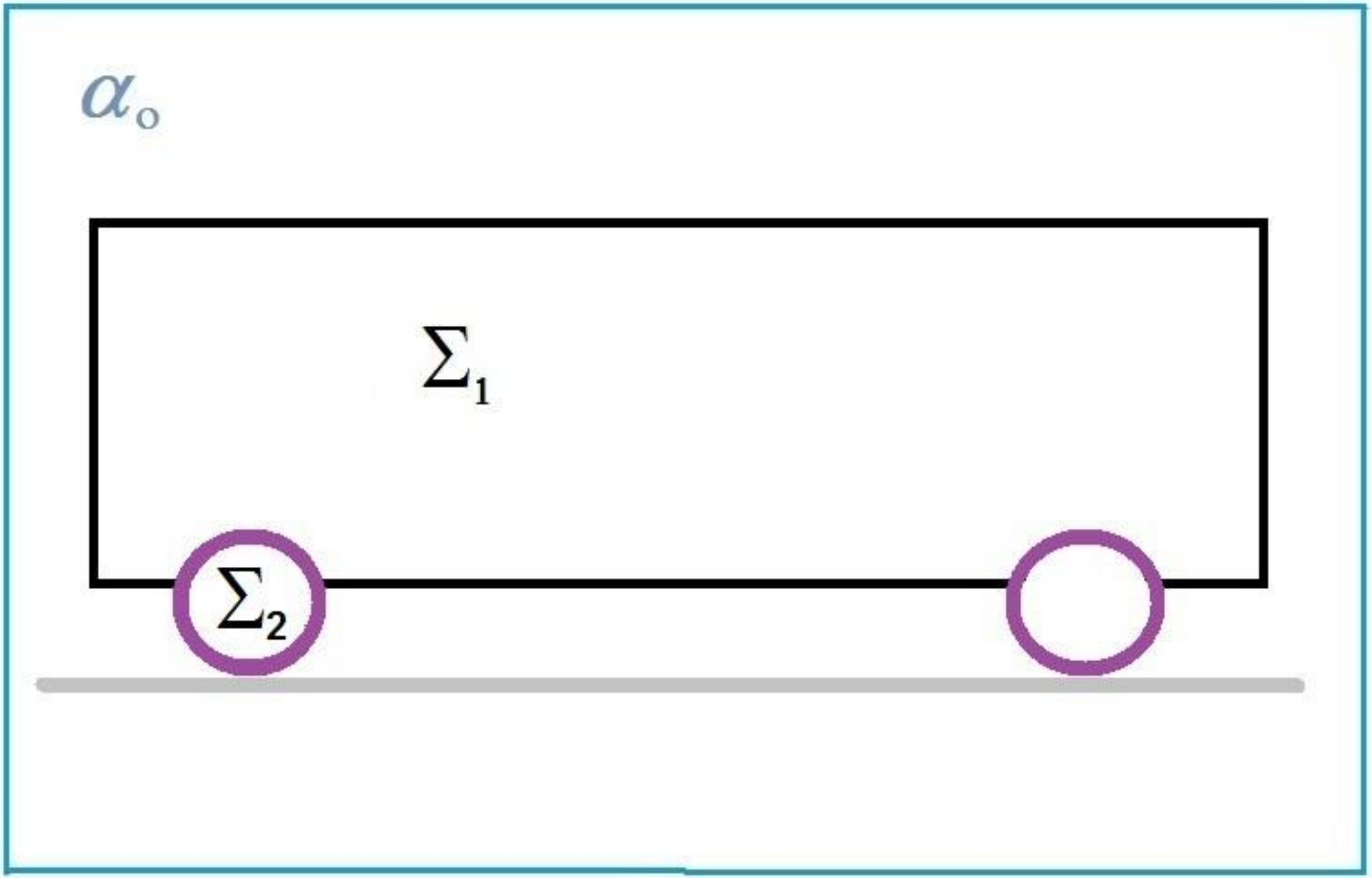
$$\vec{v}_A(t) = \lambda(t)\vec{e}_1 + \mu(t)\vec{e}_2,$$

то есть вектор $\vec{v}_A(t)$ также параллелен плоскости α_0 (см. рисунок).



Плоскость α_0 называют ***плоскостью скоростей*** среды Σ.

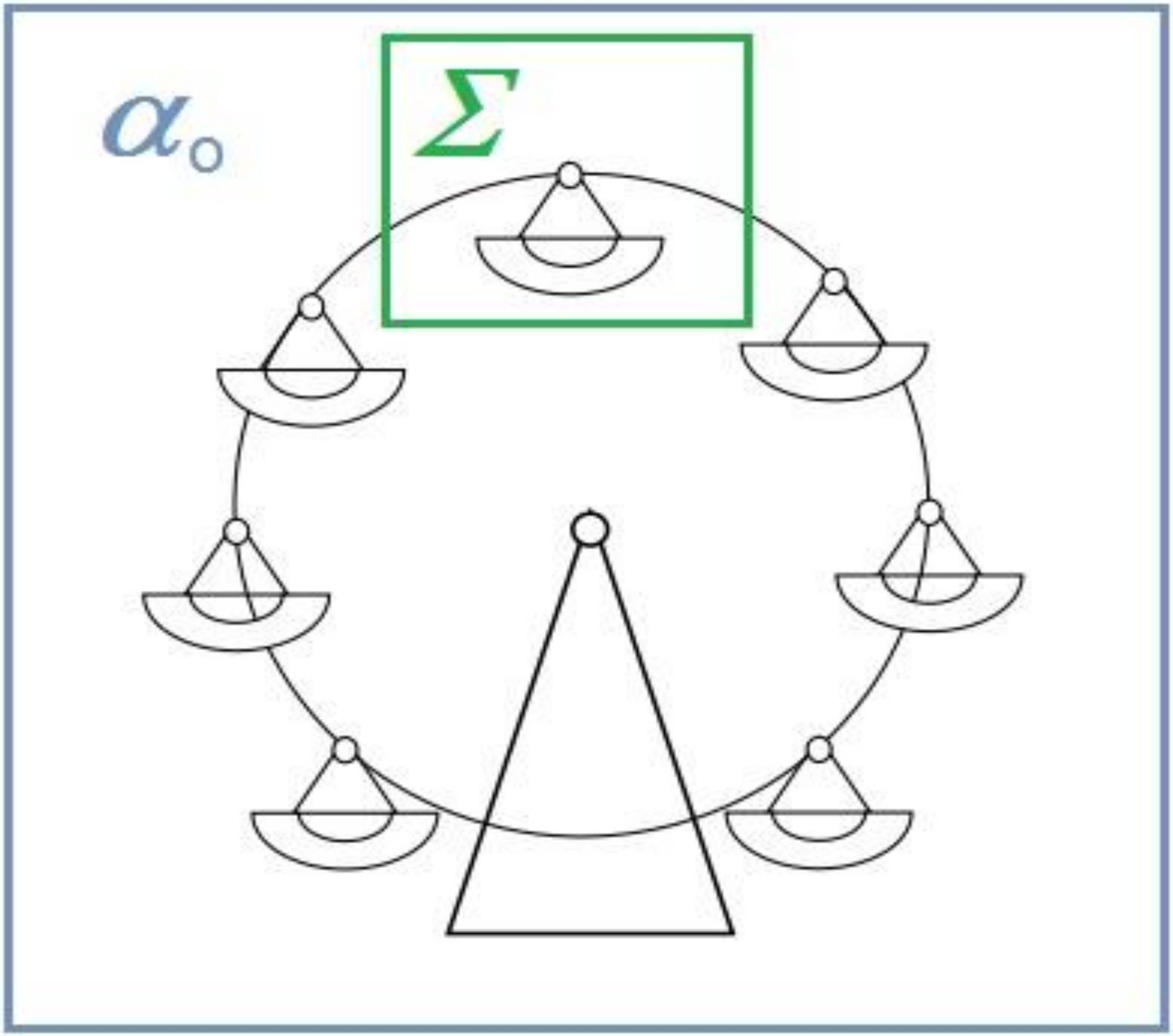
Примеры. **1. Железнодорожный вагон движется по прямолинейному участку пути.** В данном случае мы имеем плоскопараллельное движение разных твердых сред (см. рисунок), связанных, соответственно, с корпусом вагона (среда Σ_1) и с его колесами (среда Σ_2), так как скорости всех точек корпуса вагона и его колес «лежат» в вертикальной плоскости α_0, параллельной рельсам и перпендикулярной поверхности земли (на данном плоском участке). При этом корпус вагона совершает движение еще более частного вида – ***прямолинейное***, при котором скорости всех его точек коллинеарны фиксированной прямой (рельсам).



α_o
Σ_1
Σ_2

2. Движение твердой среды Σ, связанной с кабинкой «колеса обозрения», является плоскопараллельным.

Плоскость скоростей α_0 – это плоскость окружности колеса (см. рисунок).



α₀
Σ

§ 11. Критерий плоскопараллельного движения твердой среды

Пусть L_0 – двумерное подпространство в $\mathbb{R}^3$, $r_0 \in \mathbb{R}^3$.

Множество $L_0 + r_0 = \{q + r_0 \mid q \in L_0\}$ назовем ***арифметической плоскостью***, *параллельной подпространству* L_0.

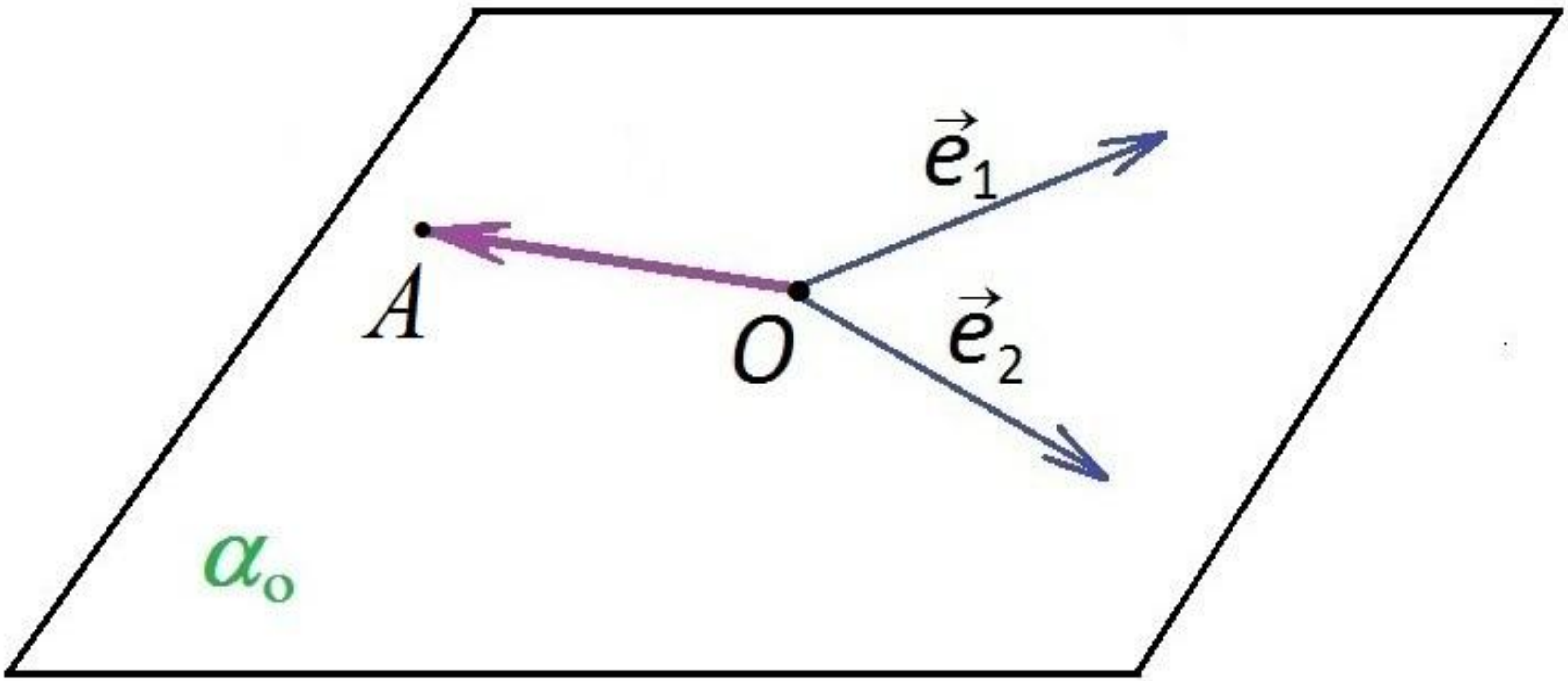
Пусть e_1 и e_2 – базисные векторы подпространства L_0.

Рассмотрим неподвижную декартову систему отсчета $S=(O,E_1,E_2,E_3)$ в абсолютном пространстве E^3 и плоскость α_0 в E^3, проходящую через точку O и параллельную векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ ($\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ – геометрические векторы, координатные представления которых в системе S равны, соответственно, e_1 и e_2).

Пусть r_{OA} – координатный вектор точки $A\in E^3$ в системе S. Заметим, что $A\in\alpha_0 \Leftrightarrow r_{OA}\in L_0$. Действительно,

$$A\in\alpha_0 \Leftrightarrow \text{векторы } \overrightarrow{OA},\ \vec{e}_1 \text{ и } \vec{e}_2 \text{ компланарны } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\in \mathcal{L}in(\vec{e}_1,\vec{e}_2) \Leftrightarrow r_{OA}\in \mathcal{L}in(e_1,e_2)=L_0.$$



$\vec{e}_1$
A
O
$\vec{e}_2$
α_o

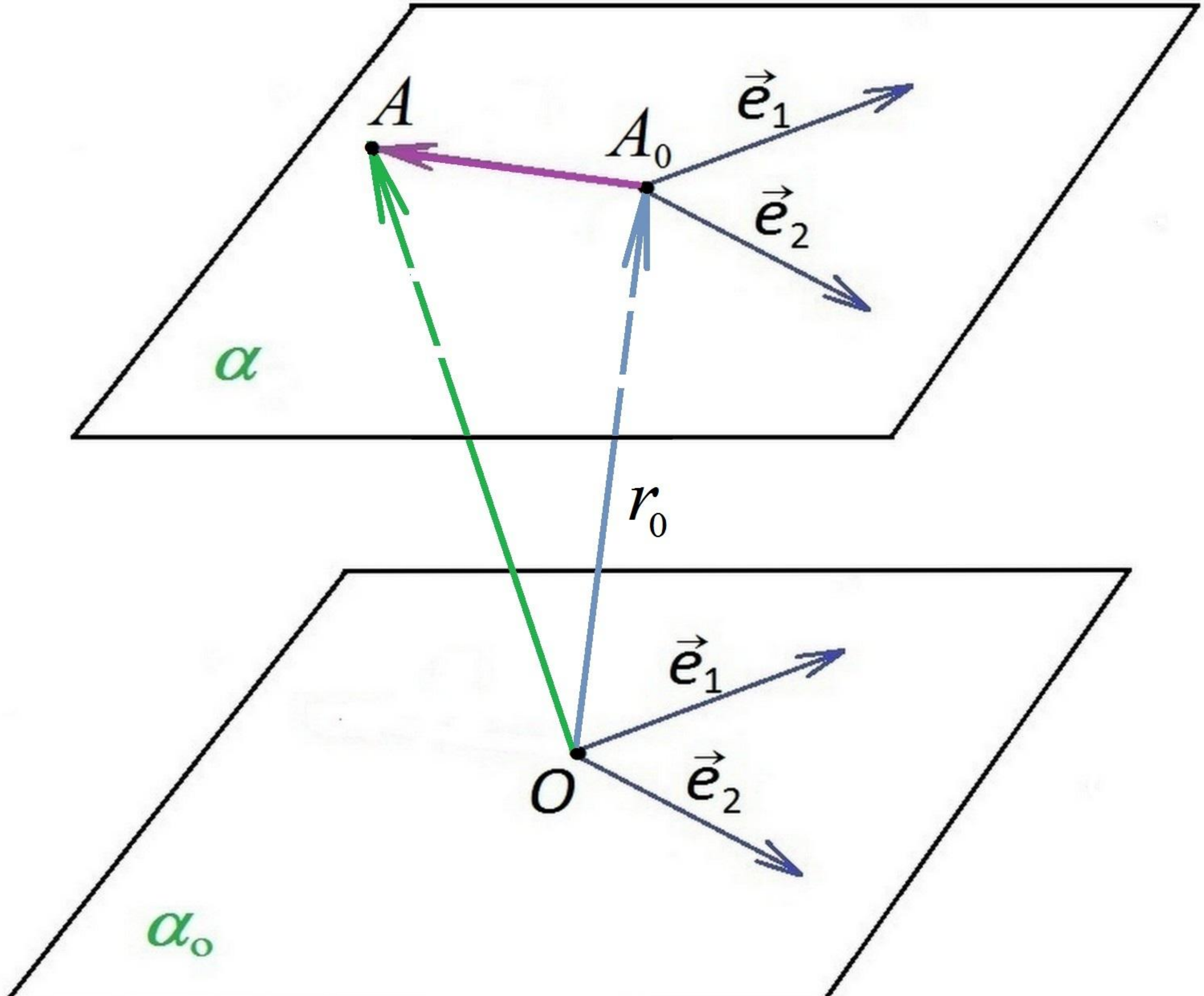
Арифметической плоскости $L_0 + r_0 \subset \mathbb{R}^3$ соответствует плоскость α в пространстве E^3, параллельная плоскости α_0 и проходящая через точку A_0, такую, что $r_{OA_0} = r_0$:

$$A \in \alpha \Leftrightarrow \text{векторы } \overrightarrow{A_0A},\ \vec{e}_1 \text{ и } \vec{e}_2 \text{ компланарны} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_0A} \in \mathcal{L}in(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \Leftrightarrow r_{A_0A} \in \mathcal{L}in(e_1, e_2) = L_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_{OA} - r_{OA_0} = r_{A_0A} \in L_0 \Leftrightarrow r_{OA} \in L_0 + r_{OA_0} = L_0 + r_0 .$$

Итак, $A \in \alpha \Leftrightarrow r_{OA} \in L_0 + r_0$.



A
A_0
$\vec{e}_1$
$\vec{e}_2$
α
r_0
$\vec{e}_1$
$\vec{e}_2$
O
α_0

Пусть $\mathcal{T}_A$ – арифметическая траектория точки A:

$$\mathcal{T}_A = \{\, r_{OA}(t) \mid t \in (t_1,\, t_2)\}.$$

Теорема. Движение среды Σ относительно системы S является плоскопараллельным тогда и только тогда, когда существует такое двумерное подпространство L_0 в $\mathbb{R}^3$, что

$$(\forall\, A \in \Sigma)(\exists\, p_A \in \mathbb{R}^3)\,[\,\mathcal{T}_A \subset p_A + L_0\,].$$

Замечание. С геометрической точки зрения, теорема утверждает, что движение среды Σ относительно S является плоскопараллельным тогда и только тогда, когда существует такая плоскость α_0, что геометрическая траектория всякой точки $A \in \Sigma$ полностью лежит в некоторой плоскости α, параллельной α_0.

Доказательство теоремы.

Необходимость. Пусть движение среды Σ относительно системы S является плоскопараллельным, то есть существует такое двумерное подпространство L_0 в $\mathbb{R}^3$, что $(\forall A \in \Sigma)(\forall t \in (t_1, t_2))[v_A(t) \in L_0]$. И пусть e_1 и e_2 – базисные векторы подпространства L_0.

Рассмотрим произвольную точку $A \in \Sigma$. Ее скорость $v_A(t) \in L_0$ при $\forall t$, следовательно, в каждый момент времени t найдутся такие числа $\lambda(t)$ и $\mu(t)$, что скорость $v_A(t) = \lambda(t)e_1 + \mu(t)e_2$. Тогда, в силу того, что $v_A(t) = \dot{r}_{OA}(t)$, при $\forall t$ имеем :

$$r_{OA}(t) = \int_{t_0}^{t} v_A(\tau)\,d\tau + r_{OA}(t_0) = \int_{t_0}^{t} (\lambda(\tau)e_1 + \mu(\tau)e_2)\,d\tau + r_{OA}(t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\,d\tau \cdot e_1 + \int_{t_0}^{t} \mu(\tau)\,d\tau \cdot e_2 + r_{OA}(t_0) =$$

$$= \lambda_1(t)e_1 + \mu_1(t)e_2 + p_A \in L_0 + p_A,$$

$$r_{OA}(t) = \int_{t_0}^{t} v_A(\tau)\,d\tau + r_{OA}(t_0) = \int_{t_0}^{t} (\lambda(\tau)e_1 + \mu(\tau)e_2)\,d\tau + r_{OA}(t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\,d\tau \cdot e_1 + \int_{t_0}^{t} \mu(\tau)\,d\tau \cdot e_2 + r_{OA}(t_0) =$$

$$= \lambda_1(t)e_1 + \mu_1(t)e_2 + p_A \in L_0 + p_A,$$

где $\lambda_1(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\,d\tau$, $\mu_1(t) = \int_{t_0}^{t} \mu(\tau)\,d\tau$, $p_A = r_{OA}(t_0)$.

Итак, траектория произвольной точки $A \in \Sigma$

$$\mathcal{T}_A = \{\, r_{OA}(t) \mid t \in (t_1, t_2)\,\} \subset L_0 + p_A.$$

Достаточность. Теперь предположим, что существует такое двумерное подпространство L_0 в $\mathbb{R}^3$, что $(\forall A \in \Sigma)(\exists\, p_A \in \mathbb{R}^3)\,[\mathcal{T}_A \subset p_A + L_0]$. Пусть e_1 и e_2 – базисные векторы подпространства L_0.

Тогда для любой точки $A \in \Sigma$ в каждый момент времени t вектор $r_{OA}(t) \in p_A + L_0$. Следовательно, при $\forall t$ вектор $r_{OA}(t) - p_A \in L_0$, то есть при $\forall t$ найдутся числа $\lambda_1(t)$ и $\mu_1(t)$, такие, что $r_{OA}(t) - p_A = \lambda_1(t)e_1 + \mu_1(t)e_2$. Тогда при $\forall t$ вектор скорости точки $A \in \Sigma$

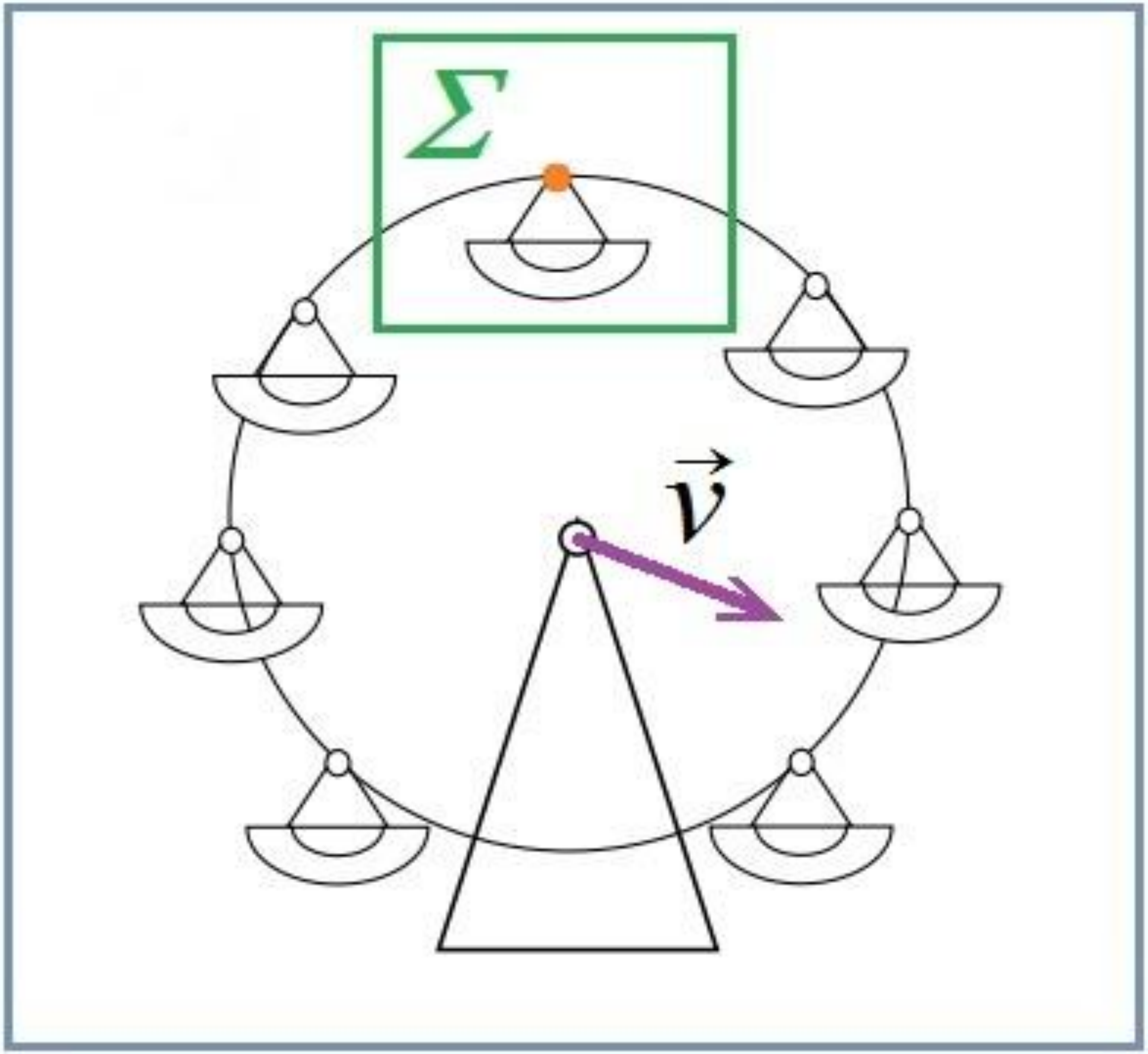
$$v_A(t) = \dot{r}_{OA}(t) = \dot{\lambda}_1(t)e_1 + \dot{\mu}_1(t)e_2 \in L_0,$$

Тогда при $\forall t$ вектор скорости точки $A \in \Sigma$

$$v_A(t) = \dot{r}_{OA}(t) = \dot{\lambda}_1(t)e_1 + \dot{\mu}_1(t)e_2 \in L_0,$$

то есть движение среды Σ относительно S является плоскопараллельным. Теорема доказана.

Пример. Колесо обозрения равномерно вращается и при этом опора колеса перемещается с постоянной скоростью в направлении, ортогональном плоскости колеса. Тогда точка подвеса кабинки движется по винтовой линии. Следовательно, движение твердой среды, связанной с кабинкой, не является плоскопараллельным.

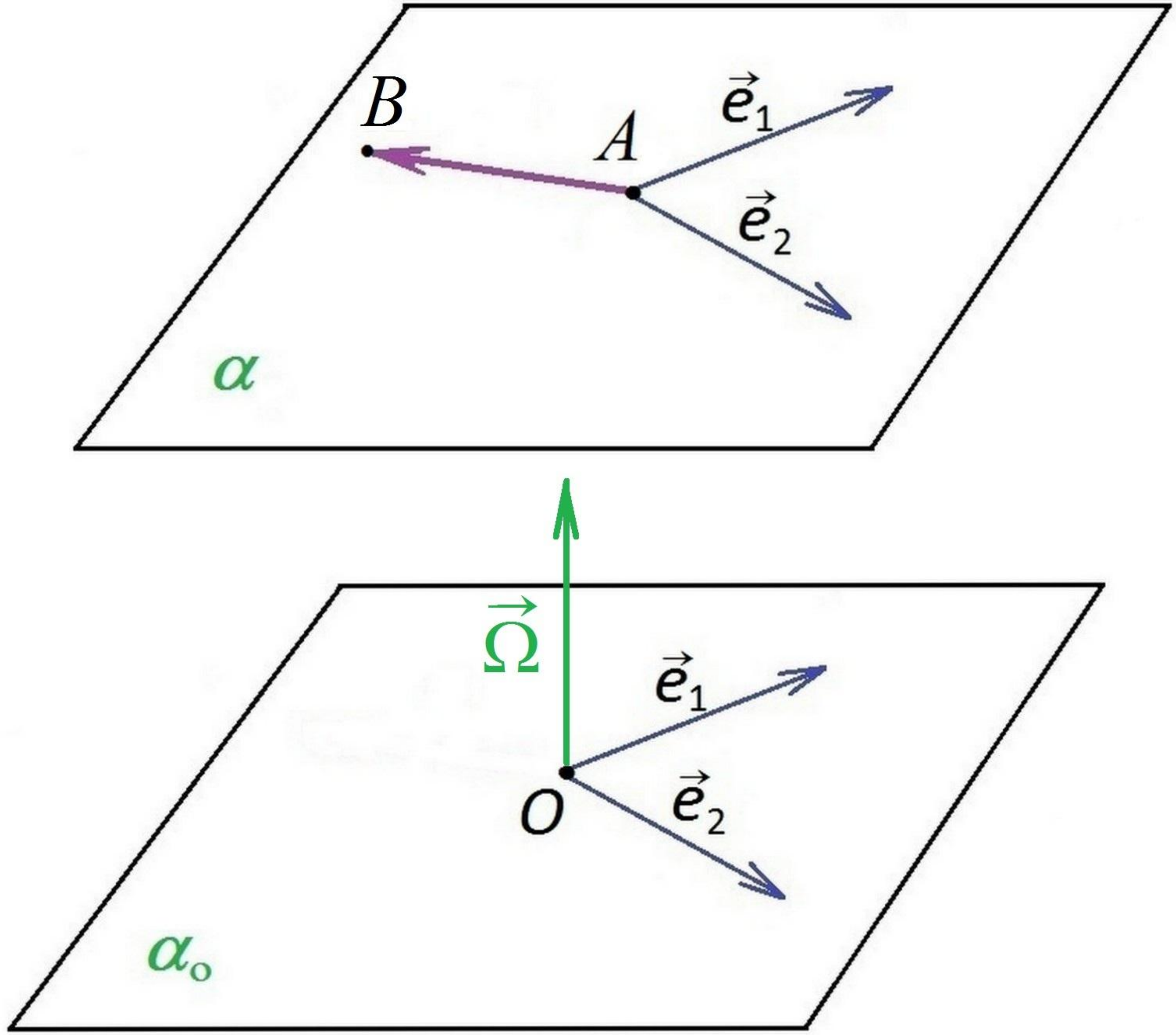

Σ
$\vec{v}$

§ 12. Вектор мгновенной угловой скорости при плоскопараллельном движении твердой среды

Пусть твердая среда Σ совершает плоскопараллельное движение относительно ДСО $S = (O, E_1, E_2, E_3)$, то есть существует такое двумерное подпространство L_0 (пространство скоростей) в $\mathbb{R}^3$, что $(\forall A \in \Sigma)(\forall t \in (t_1, t_2))[v_A(t) \in L_0]$. Рассмотрим также плоскость скоростей α_0: $(\forall A \in \Sigma)(\forall t \in (t_1, t_2))[\vec{v}_A(t) \parallel \alpha_0]$.

В силу теоремы Эйлера, в каждый момент времени t существует и единственен такой вектор $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(t)$, что для любых точек $A, B \in \Sigma$ имеет место равенство $\vec{v}_{AB} = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{AB}$. Вектор $\vec{\Omega}$ называется *вектором мгновенной угловой скорости твердой среды* Σ *по отношению к системе отсчета* S (см. § 7).

Зафиксируем произвольный момент времени $t = t_0$ и произвольную точку $A \in \Sigma$. Как доказано выше, точка $A \in \Sigma$ движется в некоторой плоскости $\alpha \parallel \alpha_0$.


B
A
$\vec{e}_1$
$\vec{e}_2$
α
$\vec{\Omega}$
$\vec{e}_1$
O
$\vec{e}_2$
α_o

Рассмотрим точку $B \in \Sigma$, также движущуюся в плоскости α, такую, что в данный момент $t = t_0$ $\overrightarrow{AB} \perp \vec{\Omega}$. Из равенства $\vec{v}_{AB} = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{AB}$ вытекает, что $\vec{v}_{AB} \perp \vec{\Omega}$ и $\vec{v}_{AB} \perp \overrightarrow{AB}$. Итак, вектор $\vec{\Omega}$ ортогонален двум неколлинеарным (ортогональным) векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$, параллельным плоскости α_0. Следовательно, в данный момент $t = t_0$ $\vec{\Omega} \perp \alpha_0$. С «арифметической» точки зрения это значит, что соответствующий арифметический (координатный) вектор $\Omega \perp L_0$.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема. При плоскопараллельном движении твердой среды вектор мгновенной угловой скорости в каждый момент времени ортогонален пространству скоростей.