

Теоретическая механика

Часть 1

Кинематика

Глава 3. Движение твёрдой среды

§ 10. Плоскопараллельное движение твердой среды. Определение и примеры

Пусть твердая среда Σ движется относительно неподвижной декартовой системы отсчета $S = (O, E_1, E_2, E_3)$, $v_A = \dot{r}_{OA}$ – скорость точки $A \in \Sigma$ в S .

Определение. Движение среды Σ относительно системы S называется *плоскопараллельным*, если существует такое двумерное подпространство L_0 в \mathbb{R}^3 , что $(\forall A \in \Sigma)(\forall t \in (\alpha, \beta))[v_A(t) \in L_0]$.

Подпространство L_0 называется *пространством скоростей* среды Σ .

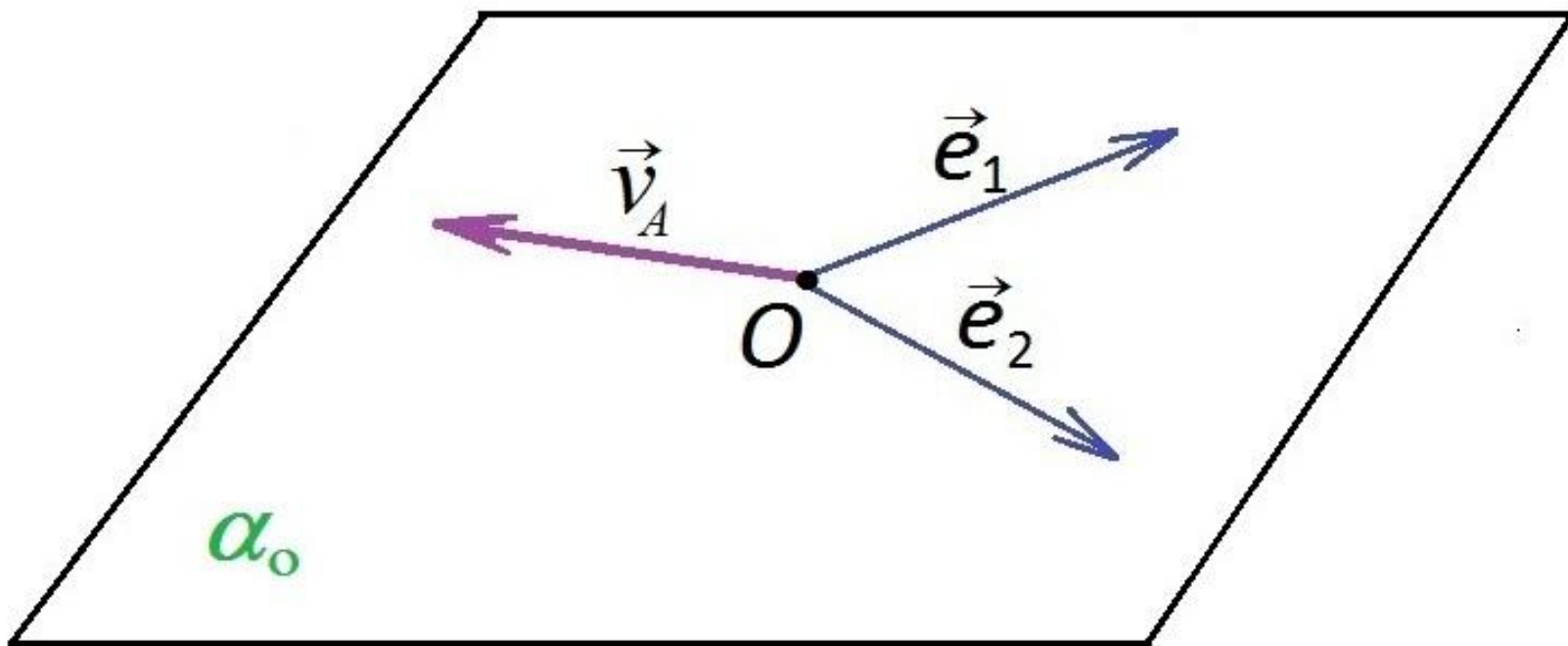
Двумерность подпространства L_0 означает, что в L_0 существуют линейно независимые векторы e_1 и e_2 , такие, что $L_0 = \mathcal{L}in(e_1, e_2)$ – линейная оболочка векторов e_1 и e_2 (то есть векторы e_1 и e_2 образуют базис в L_0). Тогда для всякой точки $A \in \Sigma$ в каждый момент времени t найдутся такие числа $\lambda(t)$ и $\mu(t)$, что скорость $v_A(t) = \lambda(t)e_1 + \mu(t)e_2$.

Соответствующие геометрические векторы \vec{e}_1 и \vec{e}_2 также линейно независимы, а следовательно, неколлинеарны.

Рассмотрим плоскость α_0 в абсолютном пространстве, проходящую через точку O и параллельную векторам \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . Тогда геометрический вектор скорости точки $A \in \Sigma$

$$\vec{v}_A(t) = \lambda(t)\vec{e}_1 + \mu(t)\vec{e}_2,$$

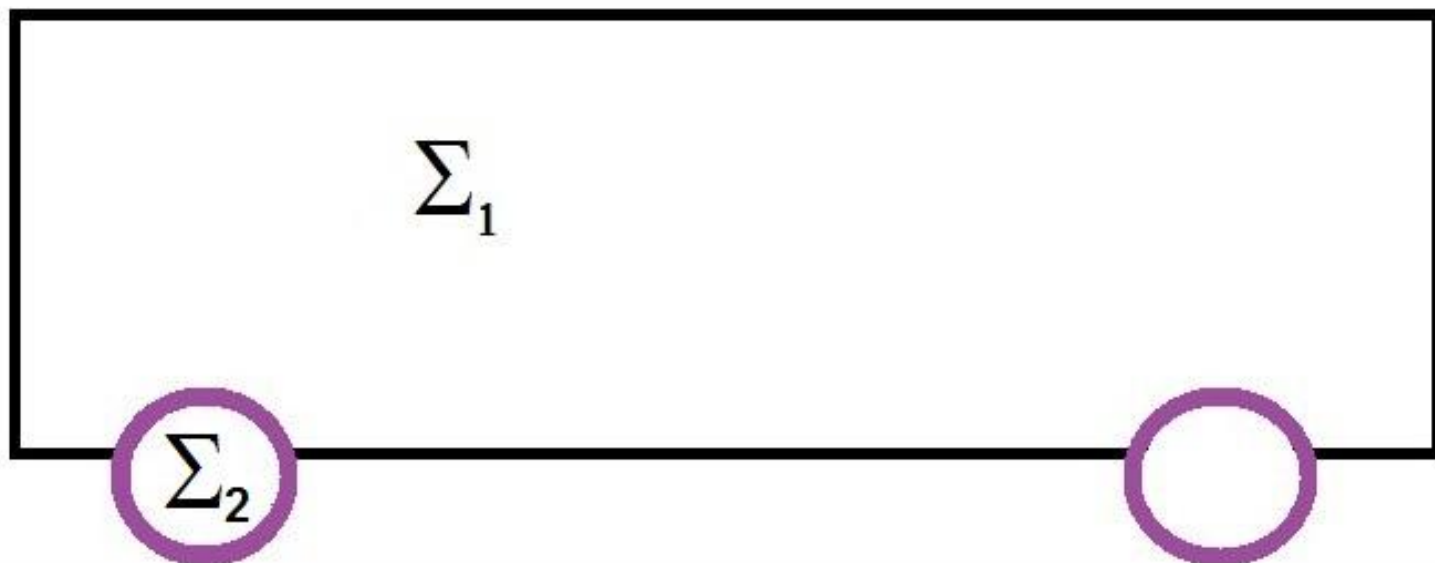
то есть вектор $\vec{v}_A(t)$ также параллелен плоскости α_0 (см. рисунок).



Плоскость α_0 называют *плоскостью скоростей* среды Σ .

Примеры. 1. **Железнодорожный вагон движется по прямолинейному участку пути.** В данном случае мы имеем плоскопараллельное движение разных твердых сред (см. рисунок), связанных, соответственно, с корпусом вагона (среда Σ_1) и с его колесами (среда Σ_2), так как скорости всех точек корпуса вагона и его колес «лежат» в вертикальной плоскости α_0 , параллельной рельсам и перпендикулярной поверхности земли (на данном плоском участке). При этом корпус вагона совершает движение еще более частного вида — *прямолинейное*, при котором скорости всех его точек коллинеарны фиксированной прямой (рельсам).

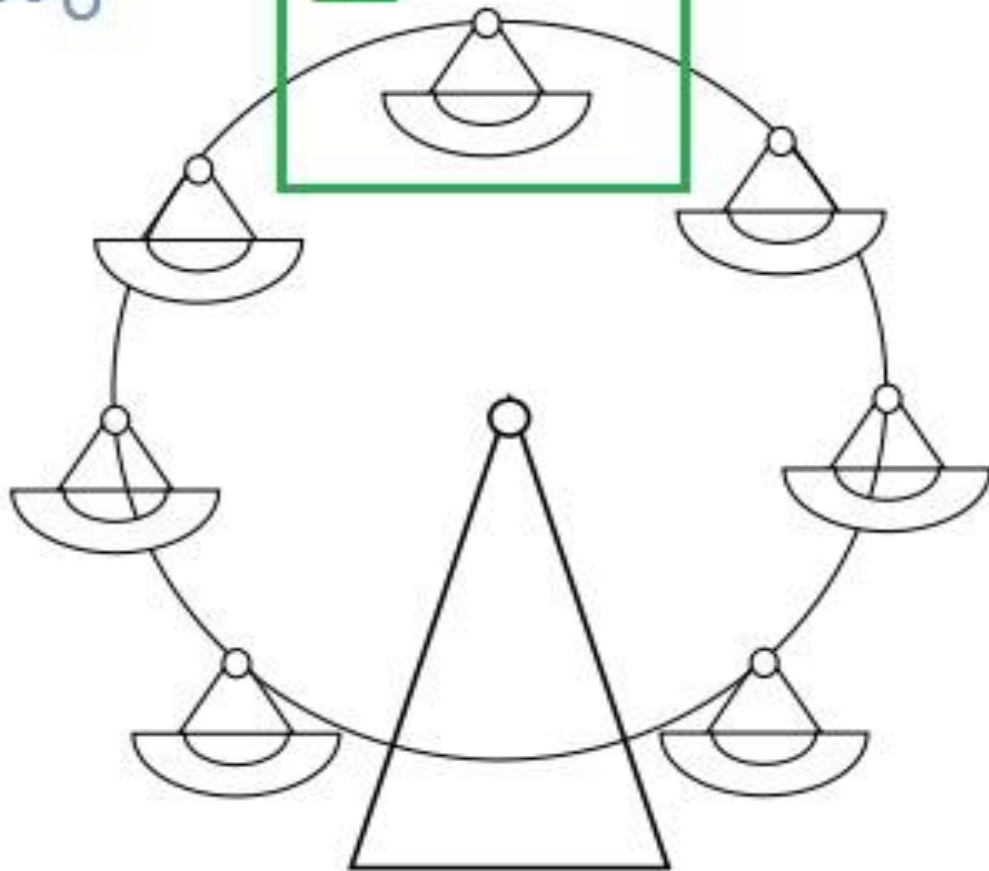
α_0



2. Движение твердой среды Σ , связанной с кабинкой «колеса обзора», является плоскопараллельным.

Плоскость скоростей α_0 – это плоскость окружности колеса (см. рисунок).

α_0



§ 11. Критерий плоскопараллельного движения твердой среды

Пусть L_0 – двумерное подпространство в \mathbb{R}^3 ,
 $r_0 \in \mathbb{R}^3$.

Множество $L_0 + r_0 = \{q + r_0 \mid q \in L_0\}$ назовем
арифметической плоскостью, *параллельной*
подпространству L_0 .

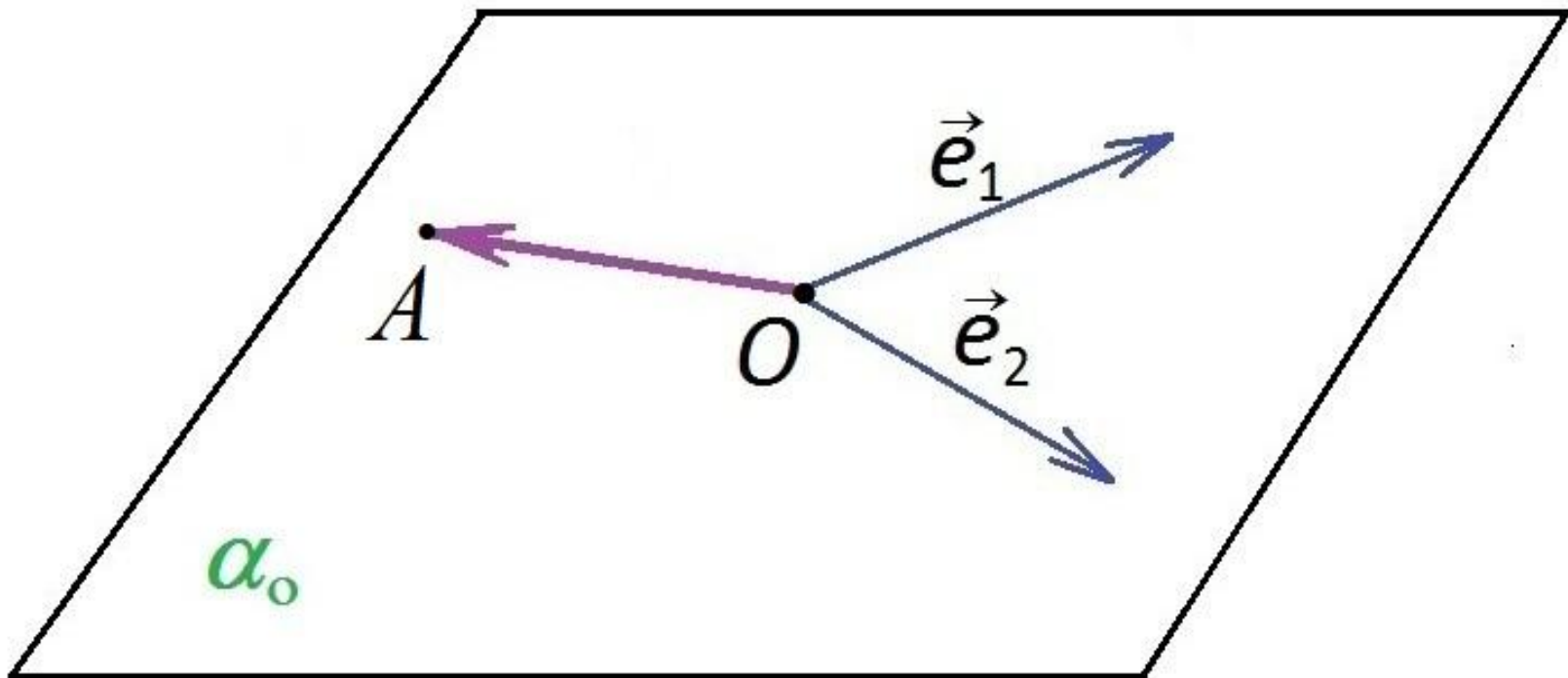
Пусть e_1 и e_2 – базисные векторы подпространства
 L_0 .

Рассмотрим неподвижную декартову систему отсчета $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ в абсолютном пространстве E^3 и плоскость α_0 в E^3 , проходящую через точку O и параллельную векторам \vec{e}_1 и \vec{e}_2 (\vec{e}_1 и \vec{e}_2 – геометрические векторы, координатные представления которых в системе S равны, соответственно, e_1 и e_2).

Пусть r_{OA} – координатный вектор точки $A \in E^3$ в системе S . Заметим, что $A \in \alpha_0 \Leftrightarrow r_{OA} \in L_0$.

Действительно,

$$\begin{aligned}
 A \in \alpha_0 &\Leftrightarrow \text{векторы } \overrightarrow{OA}, \vec{e}_1 \text{ и } \vec{e}_2 \text{ компланарны} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \in \mathcal{L}in(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \Leftrightarrow r_{OA} \in \mathcal{L}in(e_1, e_2) = L_0.
 \end{aligned}$$



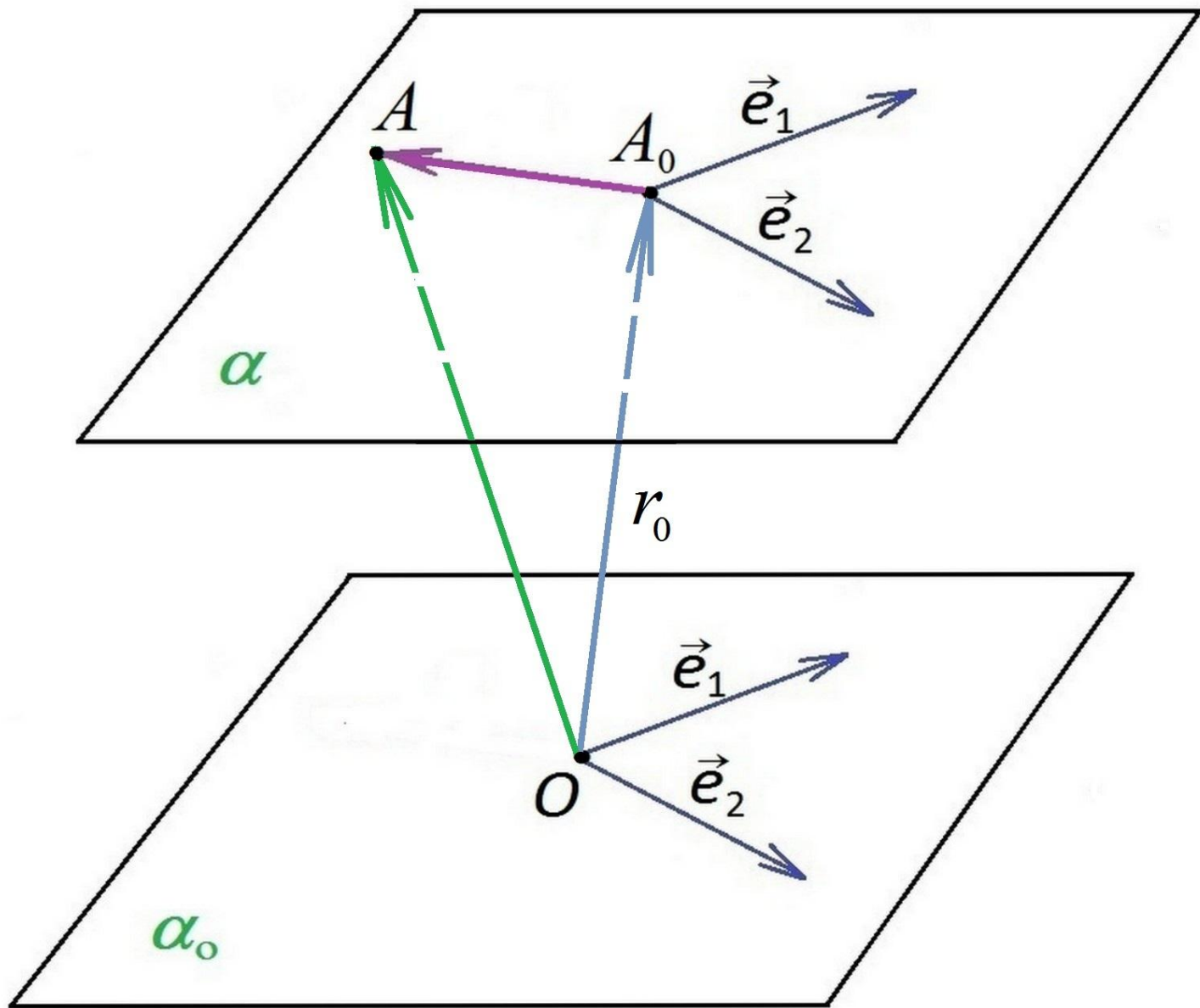
Арифметической плоскости $L_0 + r_0 \subset \mathbb{R}^3$ соответствует плоскость α в пространстве E^3 , параллельная плоскости α_0 и проходящая через точку A_0 , такую, что $r_{OA_0} = r_0$:

$$A \in \alpha \Leftrightarrow \text{векторы } \overrightarrow{A_0A}, \vec{e}_1 \text{ и } \vec{e}_2 \text{ компланарны} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_0A} \in \mathcal{Lin}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \Leftrightarrow r_{A_0A} \in \mathcal{Lin}(e_1, e_2) = L_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_{OA} - r_{OA_0} = r_{A_0A} \in L_0 \Leftrightarrow r_{OA} \in L_0 + r_{OA_0} = L_0 + r_0.$$

Итак, $A \in \alpha \Leftrightarrow r_{OA} \in L_0 + r_0$.



Пусть \mathcal{T}_A – арифметическая траектория точки A :

$$\mathcal{T}_A = \{ r_{O_A}(t) \mid t \in (t_1, t_2) \}.$$

Теорема. Движение среды Σ относительно системы S является плоскопараллельным тогда и только тогда, когда существует такое двумерное подпространство L_0 в \mathbb{R}^3 , что

$$(\forall A \in \Sigma)(\exists p_A \in \mathbb{R}^3) [\mathcal{T}_A \subset p_A + L_0].$$

Замечание. С геометрической точки зрения, теорема утверждает, что движение среды Σ относительно S является плоскопараллельным тогда и только тогда, когда существует такая плоскость α_0 , что геометрическая траектория всякой точки $A \in \Sigma$ полностью лежит в некоторой плоскости α , параллельной α_0 .

Доказательство теоремы.

Необходимость. Пусть движение среды Σ относительно системы S является плоскопараллельным, то есть существует такое двумерное подпространство L_0 в \mathbb{R}^3 , что $(\forall A \in \Sigma)(\forall t \in (t_1, t_2))[v_A(t) \in L_0]$. И пусть e_1 и e_2 – базисные векторы подпространства L_0 .

Рассмотрим произвольную точку $A \in \Sigma$. Ее скорость $v_A(t) \in L_0$ при $\forall t$, следовательно, в каждый момент времени t найдутся такие числа $\lambda(t)$ и $\mu(t)$, что скорость $v_A(t) = \lambda(t)e_1 + \mu(t)e_2$. Тогда, в силу того, что $v_A(t) = \dot{r}_{OA}(t)$, при $\forall t$ имеем:

$$\begin{aligned}
 r_{OA}(t) &= \int_{t_0}^t v_A(\tau) d\tau + r_{OA}(t_0) = \int_{t_0}^t (\lambda(\tau)e_1 + \mu(\tau)e_2) d\tau + r_{OA}(t_0) = \\
 &= \int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau \cdot e_1 + \int_{t_0}^t \mu(\tau) d\tau \cdot e_2 + r_{OA}(t_0) = \\
 &= \lambda_1(t)e_1 + \mu_1(t)e_2 + p_A \in L_0 + p_A,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{OA}(t) &= \int_{t_0}^t v_A(\tau) d\tau + r_{OA}(t_0) = \int_{t_0}^t (\lambda(\tau)e_1 + \mu(\tau)e_2) d\tau + r_{OA}(t_0) = \\
&= \int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau \cdot e_1 + \int_{t_0}^t \mu(\tau) d\tau \cdot e_2 + r_{OA}(t_0) = \\
&= \lambda_1(t)e_1 + \mu_1(t)e_2 + p_A \in L_0 + p_A,
\end{aligned}$$

где $\lambda_1(t) = \int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau$, $\mu_1(t) = \int_{t_0}^t \mu(\tau) d\tau$, $p_A = r_{OA}(t_0)$.

Итак, траектория произвольной точки $A \in \Sigma$

$$\mathcal{T}_A = \{ r_{OA}(t) \mid t \in (t_1, t_2) \} \subset L_0 + p_A.$$

Достаточность. Теперь предположим, что существует такое двумерное подпространство L_0 в \mathbb{R}^3 , что $(\forall A \in \Sigma)(\exists p_A \in \mathbb{R}^3) [\mathcal{T}_A \subset p_A + L_0]$. Пусть e_1 и e_2 – базисные векторы подпространства L_0 .

Тогда для любой точки $A \in \Sigma$ в каждый момент времени t вектор $r_{OA}(t) \in p_A + L_0$. Следовательно, при $\forall t$ вектор $r_{OA}(t) - p_A \in L_0$, то есть при $\forall t$ найдутся числа $\lambda_1(t)$ и $\mu_1(t)$, такие, что $r_{OA}(t) - p_A = \lambda_1(t)e_1 + \mu_1(t)e_2$.

Тогда при $\forall t$ вектор скорости точки $A \in \Sigma$

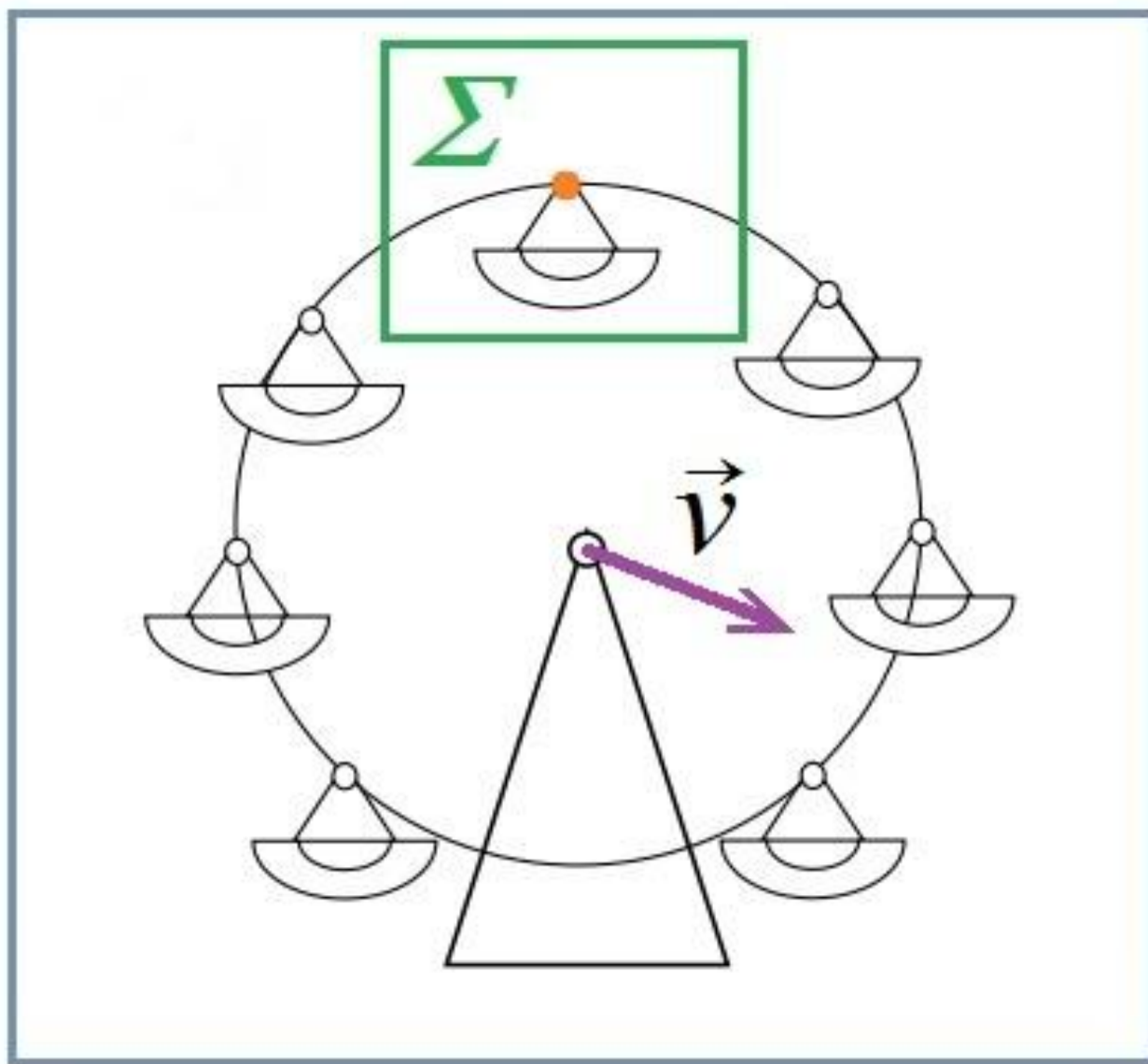
$$v_A(t) = \dot{r}_{OA}(t) = \dot{\lambda}_1(t)e_1 + \dot{\mu}_1(t)e_2 \in L_0,$$

Тогда при $\forall t$ вектор скорости точки $A \in \Sigma$

$$v_A(t) = \dot{r}_{O_A}(t) = \dot{\lambda}_1(t)e_1 + \dot{\mu}_1(t)e_2 \in L_0,$$

то есть движение среды Σ относительно S является плоскопараллельным. Теорема доказана.

Пример. Колесо обзора равномерно вращается и при этом опора колеса перемещается с постоянной скоростью в направлении, ортогональном плоскости колеса. Тогда точка подвеса кабинки движется по винтовой линии. Следовательно, движение твердой среды, связанной с кабиной, не является плоскопараллельным.

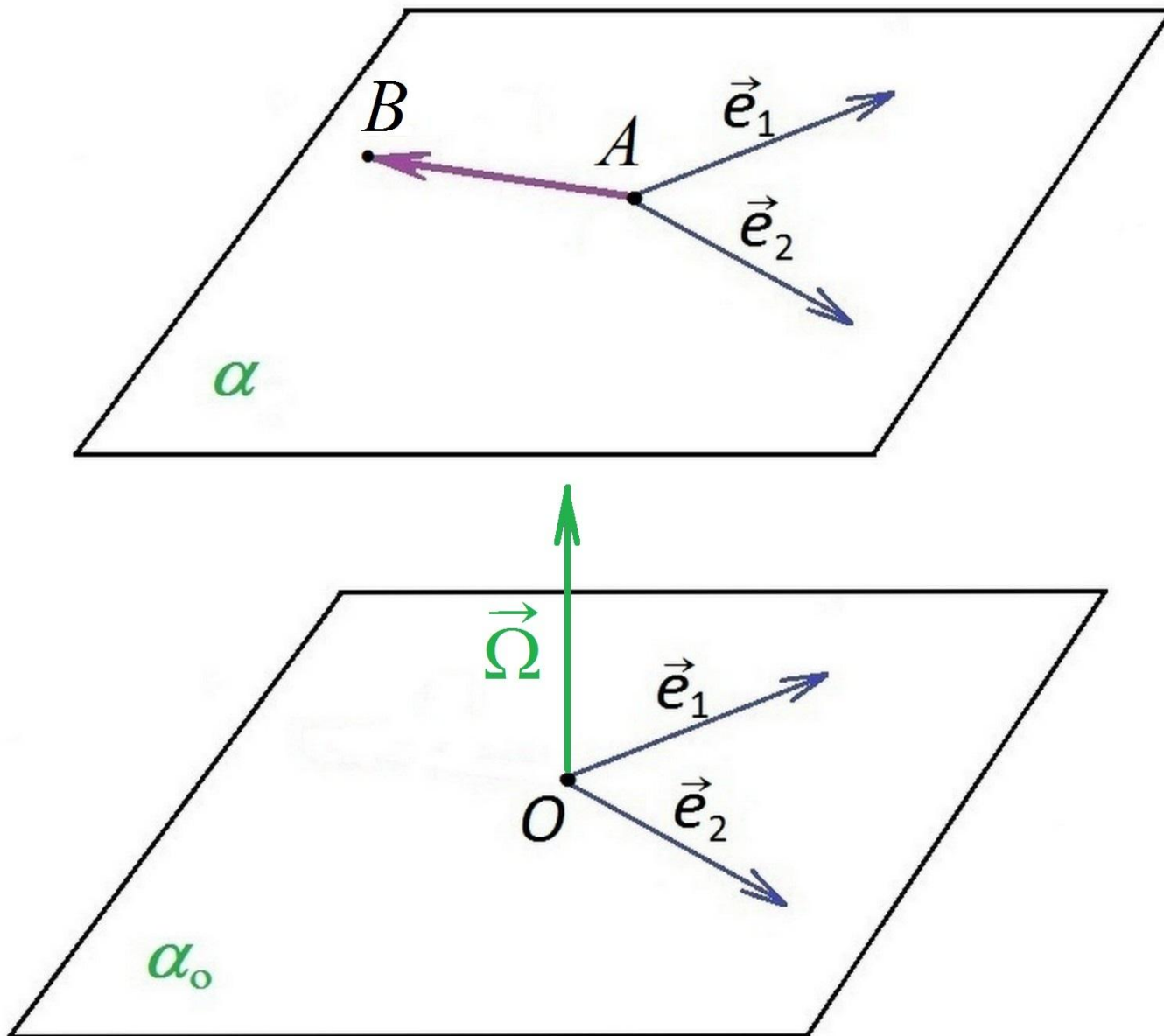


§ 12. Вектор мгновенной угловой скорости при плоскопараллельном движении твёрдой среды

Пусть твёрдая среда Σ совершает плоскопараллельное движение относительно ДСО $S = (O, E_1, E_2, E_3)$, то есть существует такое двумерное подпространство L_0 (пространство скоростей) в \mathbb{R}^3 , что $(\forall A \in \Sigma)(\forall t \in (t_1, t_2))[v_A(t) \in L_0]$. Рассмотрим также плоскость скоростей $\alpha_0: (\forall A \in \Sigma)(\forall t \in (t_1, t_2))[\vec{v}_A(t) \parallel \alpha_0]$.

В силу теоремы Эйлера, в каждый момент времени t существует и единственен такой вектор $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(t)$, что для любых точек $A, B \in \Sigma$ имеет место равенство $\vec{v}_{AB} = \vec{\Omega} \times \overline{AB}$. Вектор $\vec{\Omega}$ называется *вектором мгновенной угловой скорости твердой среды Σ по отношению к системе отсчета S* (см. § 7).

Зафиксируем произвольный момент времени $t = t_0$ и произвольную точку $A \in \Sigma$. Как доказано выше, точка $A \in \Sigma$ движется в некоторой плоскости $\alpha \parallel \alpha_0$.



Рассмотрим точку $B \in \Sigma$, также движущуюся в плоскости α , такую, что в данный момент $t = t_0$ $\overline{AB} \perp \overline{\Omega}$. Из равенства $\vec{v}_{AB} = \overline{\Omega} \times \overline{AB}$ вытекает, что $\vec{v}_{AB} \perp \overline{\Omega}$ и $\vec{v}_{AB} \perp \overline{AB}$. Итак, вектор $\overline{\Omega}$ ортогонален двум неколлинеарным (ортогональным) векторам \overline{AB} и $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$, параллельным плоскости α_0 . Следовательно, в данный момент $t = t_0$ $\overline{\Omega} \perp \alpha_0$. С «арифметической» точки зрения это значит, что соответствующий арифметический (координатный) вектор $\Omega \perp L_0$.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема. При плоскопараллельном движении твердой среды вектор мгновенной угловой скорости в каждый момент времени ортогонален пространству скоростей.