ПРОВЕРКА

СТАТИСТИЧЕСКИХ

ГИПОТЕЗ

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу.

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу, которая противоречит нулевой.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение.

Сложной называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза.

Ошибка второго рода -в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Вероятность совершить ошибку первого рода принято обозначать через α; её называют ***уровнем значимости***.

Статистический критерий проверки нулевой гипотезы. Наблюдаемое значение критерия

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину.

Статистическим критерием (или просто критерием) называют случайную величину *K*, которая служит для проверки нулевой гипотезы.

Наблюдаемым значением $K_{набл}$ называют значение критерия, вычисленное по выборкам.

Теоретическим значением называют значение критерия, вычисленное согласно нулевой гипотезе.

Критическая область. Область принятия гипотезы. Критические точки.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез :

Если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области – гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы – гипотезу не отвергают.

Критическими точками (границами) называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством К > $k_{кр}$, где $k_{кр}$ > 0. *Левосторонней* называют критическую область, определяемую неравенством К < $k_{кр}$, где $k_{кр}$ < 0. *Односторонней* называют правостороннюю или левостороннюю критическую область. *Двусторонней* называют критическую область, определяемую неравенствами $K < k_1$, $K > k_2$, где $k_2 > k_1$.

Дополнительные сведения о выборе критической области. Мощность критерия

Мощностью критерия называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза.

Другими словами, мощность критерия есть вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза.

Замечание 1. Поскольку вероятность события «ошибка второго рода допущена» равна β, то вероятность противоположного события «ошибка второго рода не допущена» равна $1 - \beta$, т.е. мощности критерия.

Отсюда следует, что мощность критерия есть вероятность того, что не будет допущена ошибка второго рода.

Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерий согласия Пирсона.

Если закон распределения неизвестен, но есть основания предположить, что он имеет определённый вид (назовём его А), то проверяют нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону А.

Критерием согласия называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

Критерий Пирсона основан на сравнении эмпирических (наблюдаемых) и теоретических (вычисленных в предположении о виде распределения) частот.

Пусть по выборке объёма n получено эмпирическое распределение:

варианты…… x_i x_1 x_2 x_3 …

эмп.частоты... n_i n_1 n_2 n_3 … ....

Допустим, что в предположении нормального распределения генеральной совокупности вычислены теоретические частоты n_i' .

При уровне значимости α требуется проверить нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена нормально.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$$

Доказано, что при $n \to \infty$ закон распределения случайной величины независимо от того, какому закону распределения подчинена генеральная совокупность, стремится к закону распределения χ^2 с k степенями свободы.

Число степеней свободы находят по равенству $k = m - 1 - r$, где m – число групп выборки; r – число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки.

В частности, если предполагаемое распределение – нормальное, то оценивают два параметра, поэтому $r = 2$ и число степеней свободы $k = m - 1 - r = m - 1 - 2 = m - 3.$

Правило. Для того, чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу H_0: генеральная совокупность распределена нормально, надо сначала вычислить теоретические частоты, а затем наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{набл} = \frac{\sum (n_i - n_i')^2}{n_i}$$

По таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы k = m – 3 найти критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$

Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ - нулевая гипотеза отвергается.

Гипотеза о нормальном распределении случайной величины – рост случайно выбранного человека Экономический факультет, 2009год

Исходные данные

Выборка роста студентов и критерий значимости ά=0,01

Шаг первый - оценки параметров распределения по выборке

n=93

среднее=171,8710

s=8,833

Шаг второй

Определяем наименьшее 156 см и наибольшее 195 см значения вариант

Шаг третий

Определяем m -число интервалов (не менее 4). Возьмем $m=7$

Шаг 4

Определяем длину конечных промежутков (195-156)/7=5,57; для удобства возьмем расстояние между точками 5,75.

Шаг 5

Используя найденную длину, определяем концы промежутков

-∞

159,75

165,50

171,25

177,00

182,75

188,50

∞

Шаг 6 и далее

Оформим в виде таблицы

Исходная таблица

i	Z_{i-1}	Z_i	n_i	$\boxed{\frac{z_i - \bar{x}}{s}}$	$\boxed{\Phi_0\left(\frac{z_i - \bar{x}}{s}\right)}$	p_i	$\boxed{n_i' = p_i \cdot n}$
1	**-∞**	**159,75**					
2	**159,75**	**165,50**					
3	**165,50**	**171,25**					
4	**171,25**	**177,00**					
5	**177,00**	**182,75**					
6	**182,75**	**188,50**					
7	**188,50**	**∞**					

Подсчитываем эмпирические частоты по выборке

i	Z_{i-1}	Z_i	n_i	$\frac{z_i - \bar{x}}{s}$	$\Phi_0\left(\frac{z_i - \bar{x}}{s}\right)$	p_i	$n_i' = p_i \cdot n$
1	-∞	159,75	**3**				
2	159,75	165,50	**22**				
3	165,50	171,25	**22**				
4	171,25	177,00	**26**				
5	177,00	182,75	**7**				
6	182,75	188,50	**8**				
7	188,50	∞	**5**				

Считаем аргументы функции Лапласа

i	Z_{i-1}	Z_i	n_i	$\boxed{\frac{z_i - \bar{x}}{s}}$	$\boxed{\Phi_0\left(\frac{z_i - \bar{x}}{s}\right)}$	p_i	$\boxed{n_i' = p_i \cdot n}$
		-∞		**-∞**			
1	-∞	159,75	3	**-1,4**			
2	159,75	165,50	22	**-0,7**			
3	165,50	171,25	22	**-0,1**			
4	171,25	177,00	26	**0,58**			
5	177,00	182,75	7	**1,23**			
6	182,75	188,50	8	**1,88**			
7	188,50	∞	5	**∞**			

Считаем значения функции Лапласа

i	Z_{i-1}	Z_i	n_i	$\boxed{\dfrac{z_i - \bar{x}}{s}}$	$\boxed{\Phi_0\left(\dfrac{z_i - \bar{x}}{s}\right)}$	p_i	$\boxed{n_i' = p_i \cdot n}$
		-∞		-∞	**-0,5**		
1	-∞	159,75	3	-1,4	**-0,4192**		
2	159,75	165,50	22	-0,7	**-0,258**		
3	165,50	171,25	22	-0,1	**-0,0398**		
4	171,25	177,00	26	0,58	**0,219**		
5	177,00	182,75	7	1,23	**0,3907**		
6	182,75	188,50	8	1,88	**0,4699**		
7	188,50	∞	5	∞	**0,5**		

Считаем вероятности попадпния в интервал

i	Z_{i-1}	Z_i	n_i	$\boxed{\dfrac{z_i-\bar{x}}{s}}$	$\boxed{\Phi_0\left(\dfrac{z_i-\bar{x}}{s}\right)}$	p_i	$\boxed{n_i' = p_i \cdot n}$
		-∞		-∞	-0,5		
1	-∞	159,75	3	-1,4	-0,4192	**0,0808**	
2	159,75	165,50	22	-0,7	-0,258	**0,1612**	
3	165,50	171,25	22	-0,1	-0,0398	**0,2182**	
4	171,25	177,00	26	0,58	0,219	**0,2588**	
5	177,00	182,75	7	1,23	0,3907	**0,1717**	
6	182,75	188,50	8	1,88	0,4699	**0,0792**	
7	188,50	∞	5	∞	0,5	**0,0301**	

Считаем теоретические частоты

i	Z_{i-1}	Z_i	n_i	$\boxed{\dfrac{z_i - \bar{x}}{s}}$	$\boxed{\Phi_0\left(\dfrac{z_i - \bar{x}}{s}\right)}$	p_i	$\boxed{n_i' = p_i \cdot n}$
		-∞		-∞	-0,5		
1	-∞	159,75	*3*	-1,4	-0,4192	0,0808	**7,5144**
2	159,75	165,50	*22*	-0,7	-0,258	0,1612	**14,992**
3	165,50	171,25	*22*	-0,1	-0,0398	0,2182	**20,293**
4	171,25	177,00	*26*	0,58	0,219	0,2588	**24,068**
5	177,00	182,75	*7*	1,23	0,3907	0,1717	**15,968**
6	182,75	188,50	*8*	1,88	0,4699	0,0792	**7,3656**
7	188,50	∞	*5*	∞	0,5	0,0301	**2,7993**

Считаем

$$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$$

i	Z_{i-1}	Z_i	n_i	$\boxed{\dfrac{z_i - \overline{x}}{s}}$	$\boxed{\Phi_0\left(\dfrac{z_i - \overline{x}}{s}\right)}$	p_i	$\boxed{n'_i = p_i \cdot n}$	
		-∞		-∞	-0,5			
1	-∞	159,75	3	-1,4	-0,4192	0,0808	7,5144	**2,71**
2	159,75	165,50	22	-0,7	-0,258	0,1612	14,992	**3,28**
3	165,50	171,25	22	-0,1	-0,0398	0,2182	20,293	**0,14**
4	171,25	177,00	26	0,58	0,219	0,2588	24,068	**0,16**
5	177,00	182,75	7	1,23	0,3907	0,1717	15,968	**5,04**
6	182,75	188,50	8	1,88	0,4699	0,0792	7,3656	**0,05**
7	188,50	∞	5	∞	0,5	0,0301	2,7993	**1,73**

Находим наблюдаемое значение критерия по формуле

$$\chi^2_{\text{í àáë}} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = 13{,}1$$

Находим критическое значение

По уровню значимости ά=0,05

и числу степеней свободы

$k=m-3=7-3= 4$

$K_{кр}=9,5$

ВЫВОД

$K_{набл}>K_{кр}$ – гипотезу отвергаем с вероятностью 0,05 совершить ошибку первого рода.

Цепь Маркова

Пусть некоторая система в каждый момент времени находится в одном из k состояний: первом, втором,…, k-м.

В отдельные моменты времени в результате испытания состояние системы изменяется, т.е. система переходит из одного состояния, например, *i*, в другое, например, *j*.

События называют ***состояниями системы***, а испытания – ***изменениями*** её состояний.

Цепью Маркова называют последовательность испытаний, в каждом из которых система принимает только одно из k состояний полной группы, причём условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s-м испытании система будет находиться в состоянии j, при условии что после (s – 1)-го испытания она находилась в состоянии i, не зависит от результатов остальных, ранее произведённых испытаний.

Цепью Маркова с дискретным временем называют цепь, изменение состояний которой происходит в определённые фиксированные моменты времени.

Цепью Маркова с непрерывным временем называют цепь, изменение состояний которой происходит в любые случайные возможные моменты времени.

Однородная цепь Маркова. Переходные вероятности. Матрица перехода.

Однородной называют цепь Маркова, если условная вероятность p_{ij} (s) (перехода из состояния i в состояние j) не зависит от номера испытания.

Поэтому вместо p_{ij} (s) пишут просто p_{ij}.

Пример (случайное блуждание).

Пусть на прямой **Ох** в точке с целочисленной координатой $x = n$ находится материальная частица.

В определённые моменты времени $t_1, t_2, t_3, \ldots$ частица испытывает толчки.

Под действием толчка частица с вероятностью p смещается на единицу вправо и с вероятностью $1 - p$ - на единицу влево.

Переходной вероятностью p_{ij} называют условную вероятность того, что из состояния i (в котором система оказалась в результате некоторого испытания, безразлично какого номера) в итоге следующего испытания система перейдёт в состояние j.

Пусть число состояний конечно и равно k.

Матрицей перехода системы называют матрицу, которая содержит все переходные вероятности этой системы:

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \cdots p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} \cdots p_{2k} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{k1} & p_{k2} \cdots p_{kk} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{k} p_{i\,j} = 1 \left(i = 1, 2, ..., k \right)$$

Пример матрицы перехода системы, которая может находиться в трёх состояниях:

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Здесь p_{11} = 0,5 – вероятность перехода из состояния i = 1 в это же состояние j = 1;

p_{21} - вероятность перехода из состояния i = 2 в состояние j = 1.

Равенство Маркова

Обозначим через $p_{ij}(n)$ вероятность того, что в результате n шагов (испытаний) система перейдёт из состояния i в состояние j.

Например, $p_{25}(10)$ - вероятность перехода за 10 шагов из второго состояния в пятое.

Подчеркнём, что при $n = 1$ получим переходные вероятности $p_{ij}(1) = p_{ij}$.

Из первоначального состояния ***i*** за m шагов система перейдёт в промежуточное состояние ***r*** с вероятностью $\boldsymbol{P_{ir}(m)}$, после чего за оставшиеся $\boldsymbol{n - m}$ шагов из промежуточного состояния ***r*** она перейдёт в конечное состояние j с вероятностью $\boldsymbol{P_{rj}(n - m)}$.По формуле полной вероятности,

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(m) P_{rj}(n-m)$$

Эту формулу называют ***равенством Маркова.***

Пусть n=2, m=1 в равенстве Маркова

$$P_{ij}(n)=\sum_{r=1}^{k}P_{ir}(m)P_{rj}(n-m),$$

тогда

$$P_{ij}(2)=\sum_{r=1}^{k}P_{ir}(1)P_{rj}(2-1)$$

или

$$P_{ij}(2)=\sum_{r=1}^{k}p_{ir}\,p_{rj}$$

Таким образом, по данной формуле можно найти все вероятности $P_{ij}(2)$, следовательно, и саму матрицу $Г_2$.

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 \Gamma_1 = \Gamma_1^2.$$

В общем случае $$\Gamma_n = \Gamma_1^n.$$

Пример. Задана матрица перехода

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу перехода:

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} P_{11}(2) & P_{12}(2) \\ P_{21}(2) & P_{22}(2) \end{pmatrix}$$

Решение. Воспользуемся формулой: $Г_2 = Г_1^2$

$$Г_2 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы, окончательно получим

$$Г_2 = \begin{pmatrix} 0,34 & 0,66 \\ 0,33 & 0,67 \end{pmatrix}.$$