

Логарифмические уравнения (часть 2)

Решения №№98 (1-3), 98(1,2)

№98

$$\textcircled{1) \lg(x+4) - \lg(x-3) = \lg 8}$$
$$\lg \frac{x+4}{x-3} = \lg 8; \quad \frac{x+4}{x-3} = 8$$

$$x+4 = 8x-24; \quad -7x = -28 \Rightarrow x=4.$$

Проверка: $\begin{cases} 4+4=8 > 0 \\ 4-3=1 > 0 \end{cases}$ Ответ: $x=4$

$$\textcircled{2) \lg(x+2) - \lg 5 = \lg(x-6)}$$

$$\lg \frac{x+2}{5} = \lg(x-6); \quad \frac{x+2}{5} = x-6$$

$$x+2 = 5x-30; \quad -4x = -32; \quad x=8.$$

$$\text{OD3: } \begin{cases} x+2 > 0 \\ x-6 > 0 \end{cases} \begin{cases} x > -2 \\ x > 6 \end{cases} \Rightarrow x > 6$$

$$x=8 \in \text{OD3} \quad \text{Ombet; } \underline{x=8}$$

$$\textcircled{3) \lg(x-2) + \lg x = \lg 8; \lg[(x-2)x] = \lg 8$$

$$(x-2)x = 8; x^2 - 2x - 8 = 0 \quad D = 36$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -2 \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x-2 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x > 2$$

$\Rightarrow x_2 = -2$ - посторон. корень

Ответ: $x = 4$

N 99

$$1) \lg^2 x + \lg x^2 = \lg^2 2 - 1;$$
$$\lg^2 x + 2 \lg x - (\lg^2 2 - 1) = 0.$$

Пусть $\lg x = t \Rightarrow t^2 + 2t - \underbrace{(\lg^2 2 - 1)}_C = 0$

$$D = 4 - 4(-(\lg^2 2 - 1)) =$$
$$= 4 + 4 \lg^2 2 - 4 = 4 \lg^2 2$$
$$\sqrt{D} = 2 \lg 2 \quad t = \frac{-2 \pm 2 \lg 2}{2}$$

$$t_1 = -1 + \lg 2$$
$$\lg x = -1 + \lg 2$$
$$\lg x - \lg 2 = -1$$
$$\lg \frac{x}{2} = -1;$$
$$10^{-1} = \frac{x}{2}$$
$$x = 2 \cdot 10^{-1} = \frac{2}{10}$$
$$\underline{x = 0,2}$$

$$t_2 = -1 - \lg 2$$
$$\lg x = -1 - \lg 2$$
$$\lg x + \lg 2 = -1$$
$$\lg(2x) = -1;$$
$$10^{-1} = 2x$$
$$x = \frac{10^{-1}}{2}$$
$$x = \frac{1}{10 \cdot 2}$$
$$\underline{x = 0,05}$$

Другой вариант решения №99(1)

$$\lg^2 x + \lg x^2 = \lg^2 2 - 1 \quad [x > 0]$$

$$\lg^2 x + 2 \lg x + 1 = \lg^2 2$$

$$(\lg x + 1)^2 = \lg^2 2$$

$$\lg x + 1 = \lg 2 \quad \text{или} \quad -(\lg x + 1) = \lg 2$$

$$\lg x + \lg 10 = \lg 2$$

$$-(\lg 10^x) = \lg 2$$

$$\lg 10x = \lg 2$$

$$\lg 10x = -\lg 2$$

$$10x = 2$$

$$\lg 10x = \lg \frac{1}{2}$$

$$\underline{x = \frac{1}{5}}$$

$$10x = \frac{1}{2}$$

$$\underline{x = \frac{1}{20}}$$

2) $\log_2^2 x - 6 \log_2 x = -8$ Пусть $\log_2 x = t$
 $t^2 - 6t + 8 = 0$ $D = 4$ $t_1 = 4$ $t_2 = 2$

$\log_2 x = 4$

$x = 16$

$\log_2 x = 2$

$x = 4$

ОДЗ: $x > 0$

Ответ: $x = 16$, $x = 4$

Ещё один способ решения логарифмических уравнений:

$$\lg^2 x = 100x$$

Решение: Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10 и решая затем полученное квадратное уравнение, находим

$$\lg \lg^2 x = \lg 100x;$$

$$\lg x * \lg x = \lg 100 + \lg x; \quad [x > 0]$$

$$(\lg x)^2 - \lg x - 2 = 0. \text{ Пусть } \lg x = t, \text{ тогда } t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = -1 \text{ или } t_2 = 2 \Rightarrow$$

$$\lg x = -1 \text{ или } \lg x = 2$$

$$x = 0,1$$

$$x = 100$$

Ответ: 0,1; 100

Зависимость между логарифмами чисел при разных основаниях

1°. Формула перехода от логарифмов по основанию **a** к логарифмам по

основанию **c**

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (1)$$

2°. Зависимость между основаниями **a** и **b** выражается формулой

$$\frac{1}{\log_a b} = \log_b a \quad (2)$$

3°. Имеет место соотношение

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \log_a b \quad (3)$$

Пример 2: $\log_x 16 + \log_x 2x = 3$

Решение: $\log_x 2x = \frac{\log_2 2x}{\log_2 x} \quad (1)$

Здесь $x > 0$. По формуле (1)
преобразуем левую часть уравнения
к основанию 2:

$$\log_x 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 x^2} = \frac{4}{2 \log_2 x} = \frac{2}{\log_2 x}$$

$$\log_{2x} 64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 2x} = \frac{6}{\log_2 2 + \log_2 x}$$

Тогда $\frac{2}{\log_2 x} + \frac{6}{1 + \log_2 x} = 3$. Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{2(1 + \log_2 x) + 6 \log_2 x - 3 \log_2 x - 3 \log_2^2 x}{\log_2 x (1 + \log_2 x)} = 0$$

$$\begin{cases} 2 + 5 \log_2 x - 3 \log_2^2 x = 0 & \text{Пусть } \log_2 x = t \\ \log_2 x \cdot (1 + \log_2 x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\log_2 x \neq 0, \text{ т.е. } \underline{x \neq 1}$$

$$\log_2 x \neq -1, \text{ т.е. } \underline{x \neq \frac{1}{2}}$$

$$3t^2 - 5t - 2 = 0 \quad D = 25 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49$$

$$t_1 = 2 \text{ или } t_2 = -\frac{1}{3}$$

$$\log_2 x = 2$$

$$\underline{x = 4}$$

$$\log_2 x = -\frac{1}{3}$$

$$\underline{x = 2^{-1/3}}$$

Домашнее задание

