Логарифмические уравнения (часть 2)

Решения №№98 (1-3), 98(1,2)

№98

1) $\lg(x+4)-\lg(x-3)=\lg 8$

$\lg\frac{x+4}{x-3}=\lg 8$; $\frac{x+4}{x-3}=8$

$x+4=8x-24$; $-7x=-28 \Rightarrow x=4.$

Проверка: $\begin{cases} 4+4=8>0 \\ 4-3=1>0 \end{cases}$ Ответ: $x=4$

2) $\lg(x+2)-\lg 5=\lg(x-6)$

$\lg\frac{x+2}{5}=\lg(x-6)$; $\frac{x+2}{5}=x-6$

$x+2=5x-30$; $-4x=-32$; $x=8$.

ОДЗ: $\begin{cases} x+2>0 \\ x-6>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-2 \\ x>6 \end{cases} \Rightarrow x>6$

$x=8\in$ ОДЗ Ответ: $x=8$

3) $\lg(x-2)+\lg x=\lg 8$; $\lg[(x-2)x]=\lg 8$

$(x-2)x=8$; $x^2-2x-8=0$ $D=36$

$x_1=4$ $x_2=-2$ ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0 \\ x>0 \end{cases}$

$\Rightarrow x>2$

$\Rightarrow x_2=-2$ – постор. корень

Ответ: $x=4$

№ 99

1) $\lg^2 x + \lg x^2 = \lg^2 2 - 1$;

$\lg^2 x + 2\lg x - (\lg^2 2 - 1) = 0$.

Пусть $\lg x = t \Rightarrow t^2 + 2t \underbrace{-(\lg^2 2 - 1)}_{c} = 0$

$D = 4 - 4(-(\lg^2 2 - 1)) =$

$= 4 + 4\lg^2 2 - 4 = 4\lg^2 2$

$\sqrt{D} = 2\lg 2$ $\quad t = \dfrac{-2 \pm 2\lg 2}{2}$

$t_1 = -1 + \lg 2$

$\lg x = -1 + \lg 2$

$\lg x - \lg 2 = -1$

$\lg \dfrac{x}{2} = -1$;

$10^{-1} = \dfrac{x}{2}$

$x = 2 \cdot 10^{-1} = \dfrac{2}{10}$

$x = 0,2$

$t_2 = -1 - \lg 2$

$\lg x = -1 - \lg 2$

$\lg x + \lg 2 = -1$

$\lg(2x) = -1$;

$10^{-1} = 2x$

$x = \dfrac{10^{-1}}{2}$

$x = \dfrac{1}{10 \cdot 2}$

$x = 0,05$

Другой вариант решения №99(1)

$$\lg^2 x + \lg x^2 = \lg^2 2 - 1 \quad [x>0]$$

$$\lg^2 x + 2\lg x + 1 = \lg^2 2$$

$$(\lg x + 1)^2 = \lg^2 2$$

$\lg x + 1 = \lg 2$ или $-(\lg x + 1) = \lg 2$

$$\lg x + \lg 10 = \lg 2 \qquad -(\lg 10x) = \lg 2$$

$$\lg 10x = \lg 2 \qquad \lg 10x = -\lg 2$$

$$10x = 2 \qquad \lg 10x = \lg \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{5} \qquad 10x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{20}$$

2) $\log_2^2 x - 6\log_2 x = -8$ Пусть $\log_2 x = t$

$t^2 - 6t + 8 = 0$ $D = 4$ $t_1 = 4$ $t_2 = 2$

$\log_2 x = 4$ $\log_2 x = 2$

ОДЗ: $x > 0$

$x = 16$ $x = 4$

Ответ: $x = 16$, $x = 4$

Ещё один способ решения логарифмических уравнений:

$x^{\lg x} = 100x$

Решение: Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10 и решая затем полученное квадратное уравнение, находим

$\lg x^{\lg x} = \lg 100x;$

$\lg x * \lg x = \lg 100 + \lg x;$ [**$x > 0$**]

$(\lg x)^2 - \lg x - 2 = 0$. Пусть $\lg x = t$, тогда $t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = -1$ или $t_2 = 2 \Rightarrow$

$\lg x = -1$ или $\lg x = 2$

$x = 0{,}1$ $x = 100$ **Ответ:** 0,1; 100

Зависимость между логарифмами чисел при разных основаниях

1°. Формула перехода от логарифмов по основанию ***a*** *к логарифмам по основанию* ***c***

$$\log_{\square} \square = \frac{\log_c \square}{\log_c \square} \qquad (1)$$

2°. Зависимость между основаниями ***a*** *и* ***b*** *выражается формулой*

$$\frac{1}{\log_{\square} \square} = \log_{\square} \square \qquad (2)$$

3°. Имеет место соотношение

$$\log_{\square^{\square}} \square = \frac{1}{\square} \log_{\square} \square \qquad (3)$$

Решение уравнений по формулам (1)-(3)

Пример 1: = 6

(3)

○ 1) Здесь $x>0$. Используя формулу (4.9), преобразуем левую часть уравнения к основанию 3:

$$\log_{\sqrt{3}} x = \log_{3^{1/2}} x = 2\log_3 x, \quad \log_{1/3} x = \log_{3^{-1}} x = -\log_3 x.$$

Таким образом,

$$(\log_3 x + 2\log_3 x - \log_3 x = 6) \Leftrightarrow (2\log_3 x = 6) \Leftrightarrow (x = 3^3) \Leftrightarrow (x = 27).$$

Пример 2: [illegible]$_x$[illegible] [illegible] + [illegible]$_x$ [illegible] = 3

Решение:

[illegible] = [illegible] / [illegible] (1)

Здесь $\underline{x > 0}$. По формуле (1) преобразуем левую часть уравнения к основанию 2:

$$\log_{x^2} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 x^2} = \frac{4}{2\log_2 x} = \frac{2}{\log_2 x}$$

$$\log_{2x} 64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 2x} = \frac{6}{\underbrace{\log_2 2}_{1} + \log_2 x}$$

Тогда $\frac{2}{\log_2 x} + \frac{6}{1+\log_2 x} = 3$. Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{2(1+\log_2 x) + 6\log_2 x - 3\log_2 x - 3\log_2^2 x}{\log_2 x \cdot (1+\log_2 x)} = 0$$

$$\begin{cases} 2 + 5\log_2 x - 3\log_2^2 x = 0 \\ \log_2 x \cdot (1+\log_2 x) \neq 0 \end{cases}$$ Пусть $\log_2 x = t$

$\log_2 x \neq 0$, т.е $x \neq 1$

$\log_2 x \neq -1$, т.е $x \neq \frac{1}{2}$

$3t^2 - 5t - 2 = 0$ $D = 25 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49$

$t_1 = 2$ или $t_2 = -\frac{1}{3}$

$\log_2 x = 2$ $\log_2 x = -\frac{1}{3}$

$x = 4$ $x = 2^{-1/3}$

Домашнее задание