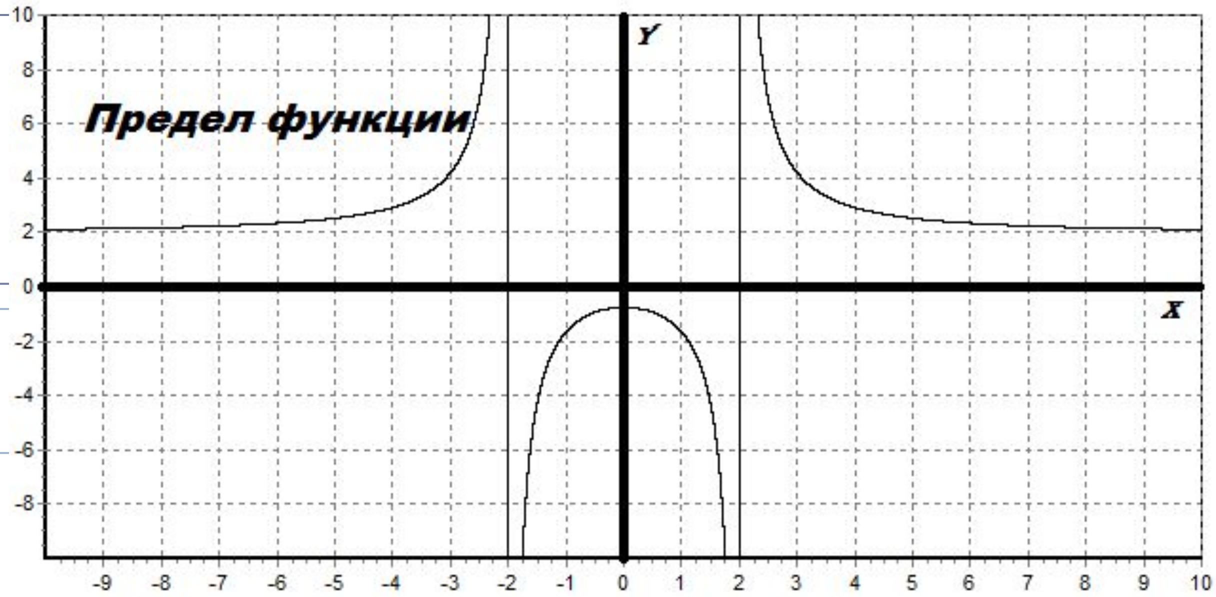
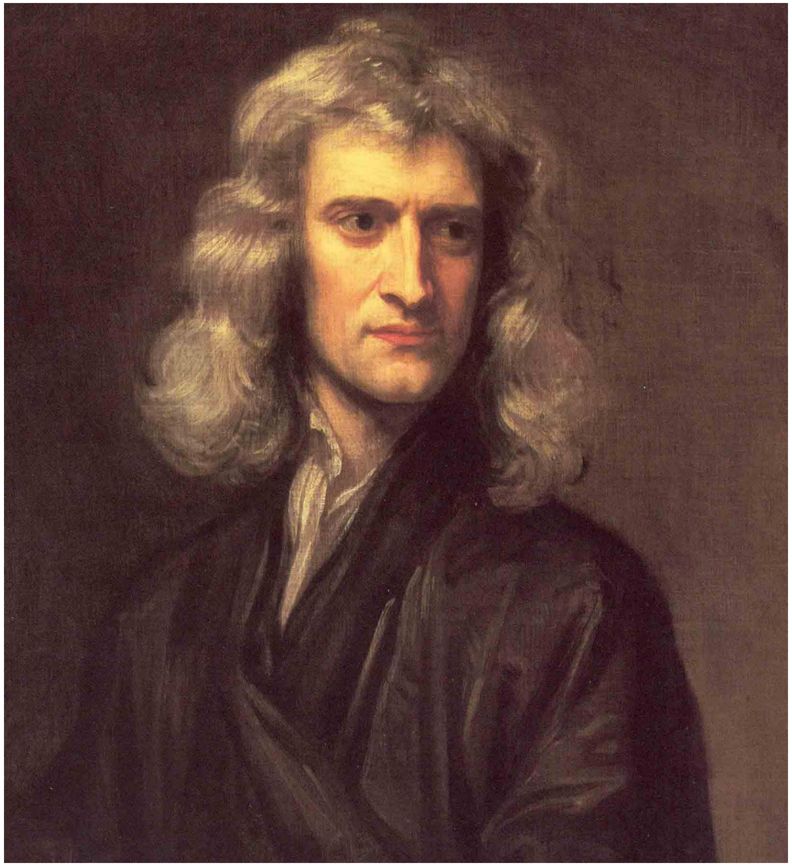
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ.



История возникновения пределов

- *Интуитивно понятие о предельном переходе при вычислении площадей и объемов различных геометрических тел использовалось в работах древнегреческого математика* **Архимеда (287 до н.э. – 212 до н.э.)**.

История возникновения пределов



- Дальнейшее свое применение теория пределов получила при создании дифференциального и интегрального исчислений в 17 в. в работах английского физика, математика ***<u>Исаака Ньютона (1642-1727).</u>***

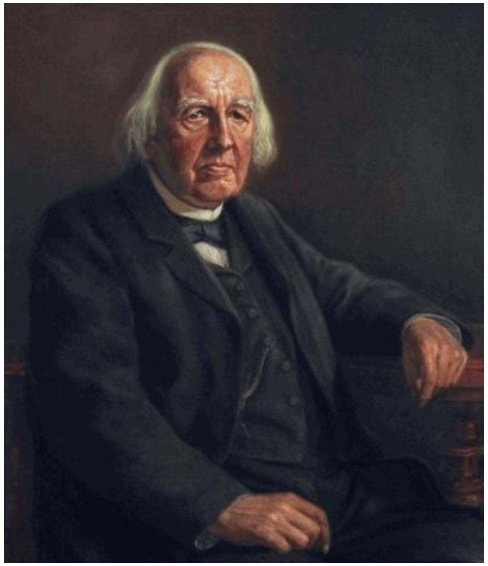
История возникновения пределов

- *Впервые определение понятия предела было введено в работе английского математика **<u>Джона Валлиса (1616-1703</u>**) «Арифметика бесконечных величин».*

История возникновения пределов

- *В 19 веке в работах великого французского математика и механика* ***<u>Огюстена Луи Коши (1789-1857)</u>*** *теория пределов была использована для строгого обоснования математического анализа.*

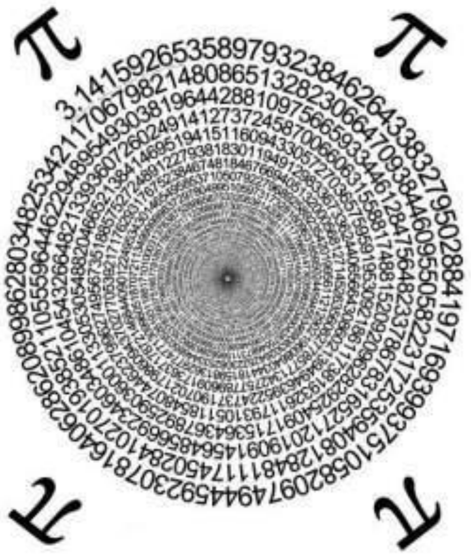
История возникновения пределов



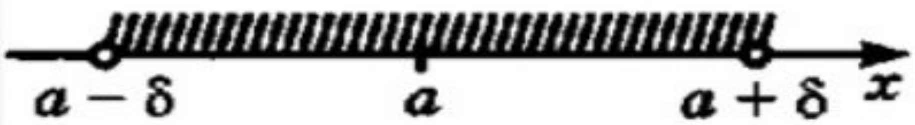
- *Дальнейшим развитием этой теории занимались немецкий математик* ***Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815-1897)*** *и чешский математик, философ и теолог* ***Бернард Больцано***

Предел функции на бесконечности.

Бесконечность — используется для характеристики безграничных, беспредельных, неисчерпаемых предметов и явлений, в нашем случае характеристика чисел. Бесконечность –сколь угодно большое(малое), безграничное число. Если рассмотреть координатную плоскость то ось абсцисс(ординат) уходит на бесконечность, если ее безгранично продолжать влево или вправо(в них или вверх).



Окрестность точки



Интервал $(a - \delta;\ a + \delta)$ называют *окрестностью точки a*, а число δ — *радиусом окрестности*. Для всех точек x δ-окрестности точки a выполняется двойное неравенство $a - \delta < x < a + \delta$ или, что то же самое, $|x - a| < \delta$.

Например, на рисунке 6 изображена окрестность точки 2 радиуса 3. Записывается эта окрестность так: $|x - 2| < 3$.

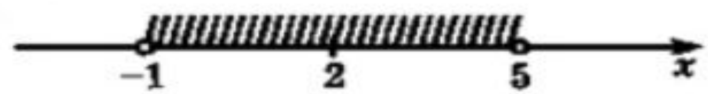


Рис. 6

Что такое проколотая окрестность?

Определение

Проколотой окрестностью точки a называется окрестность без самой точки a

Предел функции на бесконечности.

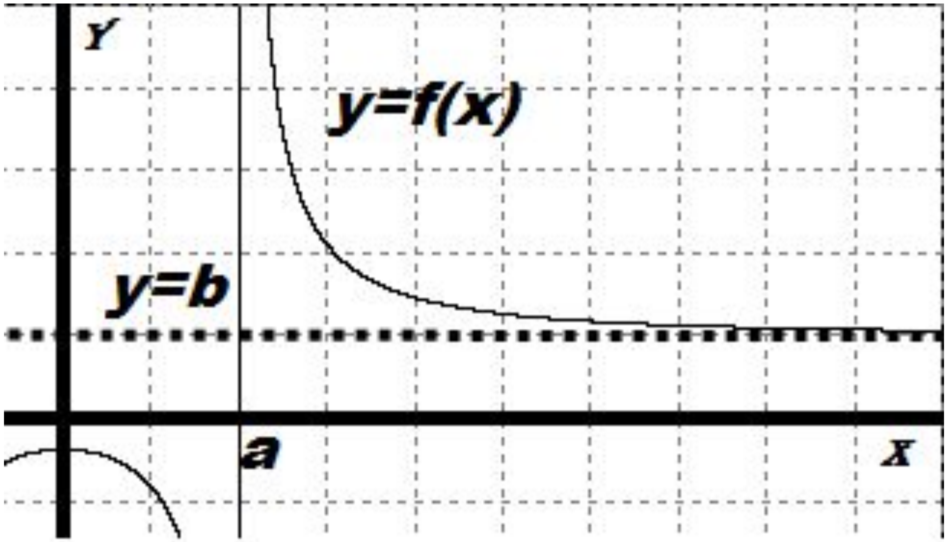
Предел функции на плюс бесконечности.

Пусть у нас есть функция y=f(x), область определения нашей функции содержит луч [a; +∞), и пусть прямая y=b является горизонтальной асимптотой графика функции y=f(x), запишем все это на математическом языке:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

Будем читать наше выражение как:

предел функции y=f(x) при x стремящимся к плюс бесконечности равен b



Предел функции на бесконечности.

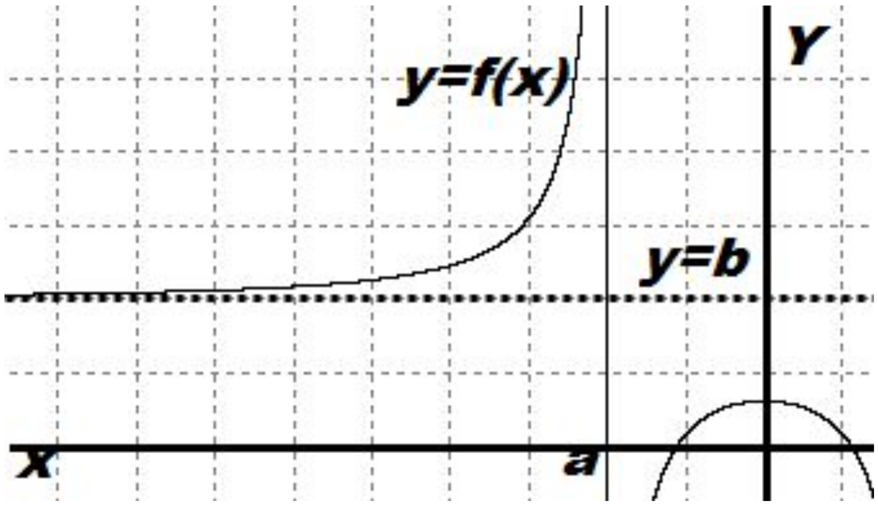
Предел функции на минус бесконечности.

Пусть у нас есть функция y=f(x), область определения нашей функции содержит луч (-∞; a], и пусть прямая y=b является горизонтальной асимптотой графика функции y=f(x), запишем все это на математическом языке:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

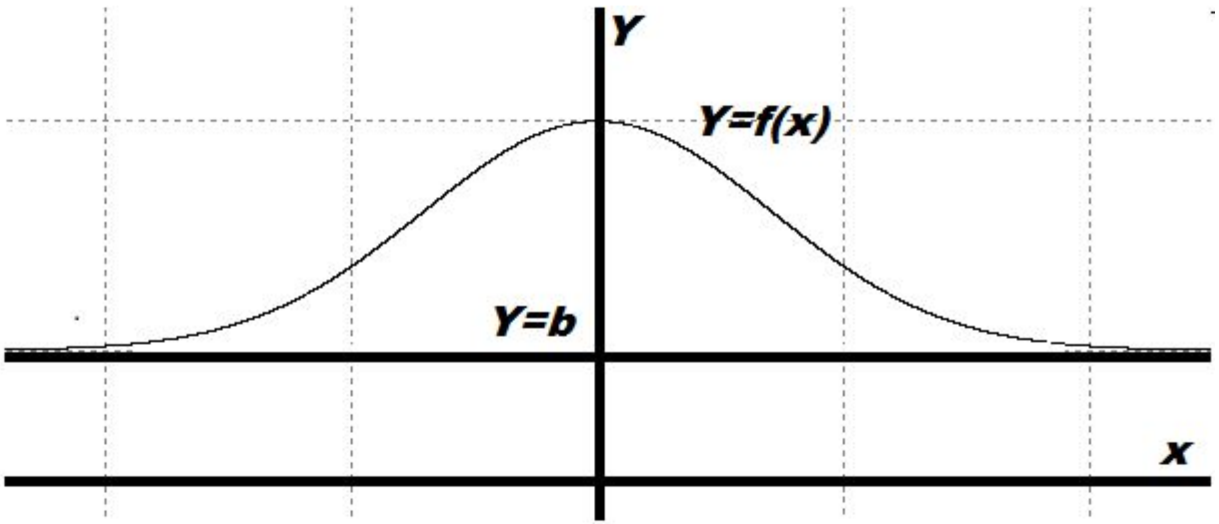
Будем читать наше выражение как:

предел функции y=f(x) при x стремящимся к минус бесконечности равен b



Предел функции на бесконечности.

Так же наши соотношения могут выполняться одновременно:



Тогда принято записывать как:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b \quad \textbf{\textit{или}} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

предел функции y=f(x) при x стремящимся к бесконечности равен b

Предел функции на бесконечности.

Пример.

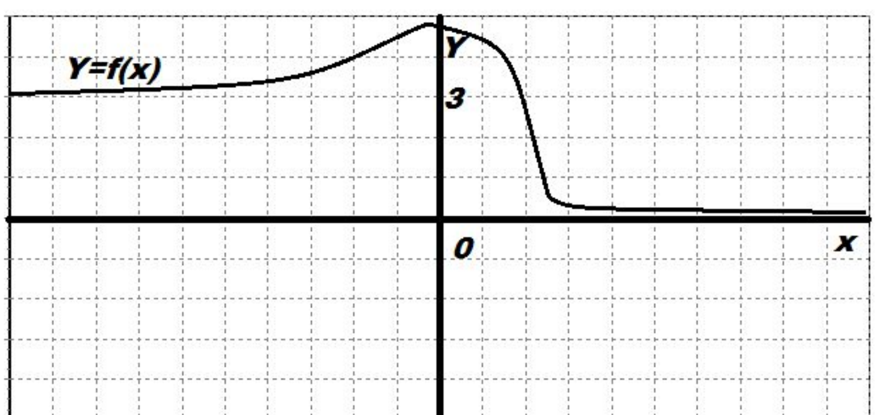
Пример. Построить график функции y=f(x), такой что:

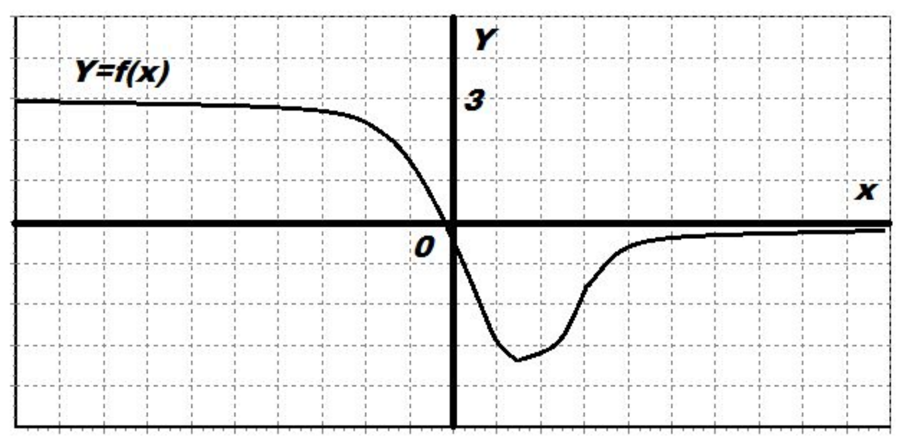
1) ***Область определения – множество действительных чисел.***
2) ***f(x)- непрерывная функция***
3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Решение:

Нам надо построить непрерывную функцию на (-∞; +∞).

Покажем пару примеров нашей функции.





Что такое предел функции в точке?

Изображен график непрерывной функции. Значение нашей функции в точке a f(a)=b.

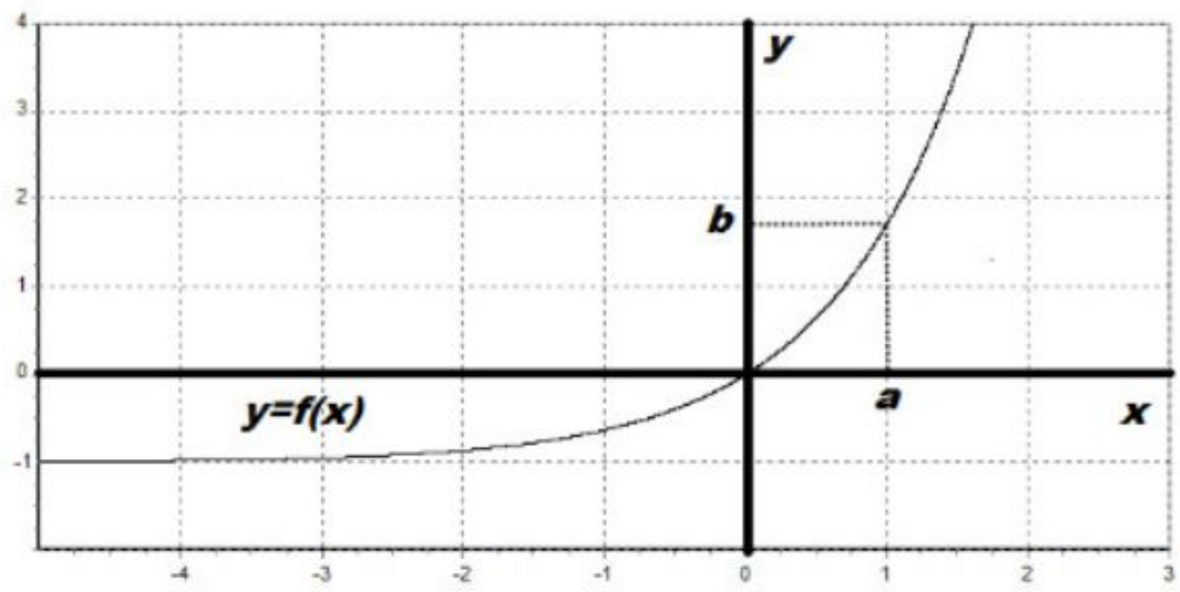


Рис1.

Что такое предел функции в точке?

Изображен график с так называемой выколотой точкой, значения нашей функции в точке а не существует, посмотрите внимательно на график, наше значение как будто взяли и выкололи.

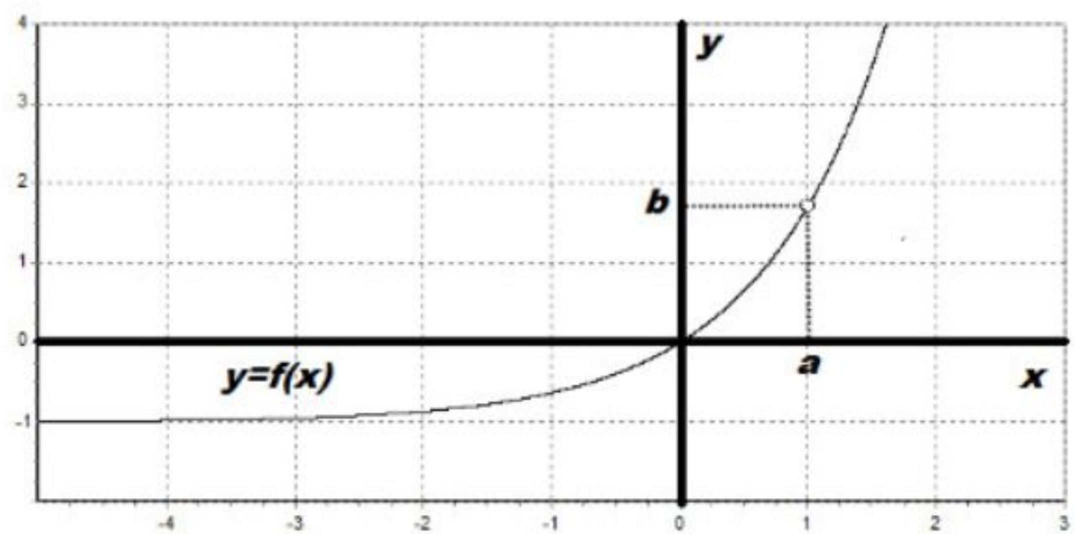


Рис2.

Что такое предел функции в точке?

Изображен график значение, которого в точке а существует, но где то отдельно от всего графика, f(a) – расположена выше нашего графика.

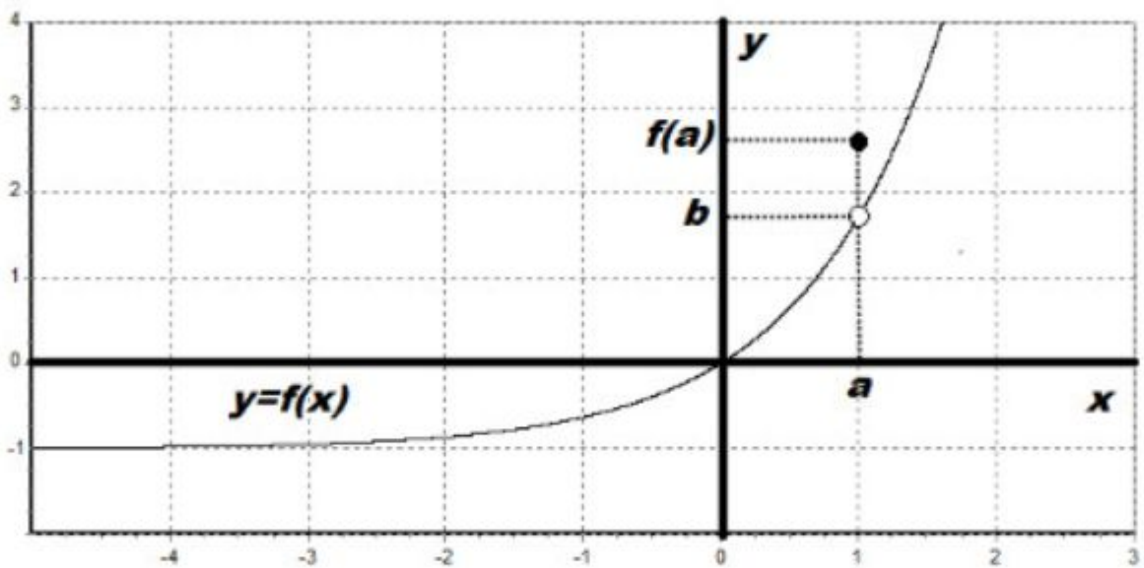


Рис3.

Что такое предел функции в точке?

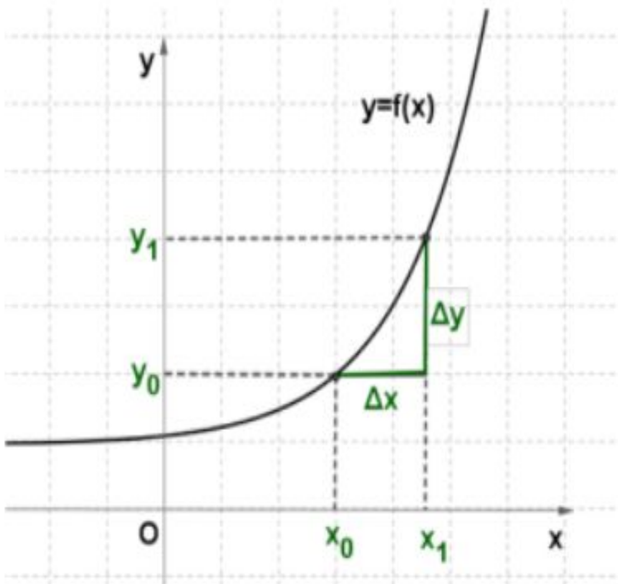
- ***На наших рисунках изображены графики трех разных функций. Если мы не будем рассматривать точку а, то графики функций совпадают. При $x<a$ и $x>a$ графики совершенно одинаковые.***

  Все случаи описанные для наших рисунков, на математическом языке записывается как:

  Читается как: предел функции $y=f(x)$ при x стремящимся к а равен b.

Изучая поведение функции $y = f(x)$ около конкретной точки x_0, важно знать, как меняется значение функции при изменении значения аргумента. Для этого используют понятия приращений аргумента и функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точках x_0 и x_1. Разность $x_1 - x_0$ называют приращением аргумента (при переходе от точки x_0 к точке x_1), а разность $f(x_1) - f(x_0)$ называют приращением функции.



Приращение аргумента обозначают Δx (читают: дельта икс; Δ — прописная буква греческого алфавита «дельта»; соответствующая строчная буква пишется так: δ). Приращение функции обозначают Δy или Δf .

Итак, $x_1 - x_0 = \Delta x$, значит, $x_1 = x_0 + \Delta x$.

$f(x_1) - f(x_0) = \Delta y$, значит, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Нельзя истолковывать термин «приращение» как «прирост».

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если в этой точке выполняется следующее условие: если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$.

Правило Лопиталя для неопределённостей вида $\frac{0}{0}$.

Допустим, что функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и имеют производные в некоторой окрестности точки **a** (за исключением, может быть, самой точки **a**), к тому же $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ и $g'(x) \neq 0$.

Значит, если существует предел (конечный или бесконечный) отношения производных $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел деления функций:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Такая же теорема справедлива для неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$.

- Функцию e^x называют **экспонентой** или экспоненциальной функцией.
- Логарифм по основанию е называют **натуральным логарифмом**: $\ln x = \log_e x$.

$$e^x \equiv \exp(x);\ e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$(e^x)' = e^x; \quad \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y};\ (e^x)^y = e^{xy} = (e^y)^x$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}; \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$$e^{\ln x} = x,\ (x > 0);\ \ln(e^x) = x$$

$$a^x = e^{x\cdot\ln a};\ e^{iz} = \cos z + i\sin z$$

Пример:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1;$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

Предел функции на бесконечности.

Основные свойства.

Для вычисления предела на бесконечности пользуются несколькими утверждениями:

1) Для любого натурально числа m справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^m}\right) = 0$$

2) Если $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ $\lim_{x\to\infty} g(x) = c$ ***то:***

а) Предел суммы равен сумме пределов: $\lim_{x\to\infty}(f(x) + g(x)) = b + c$

б) Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) \times g(x)) = b \times c$$

в) Предел частного равен частному пределов: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{b}{c}, c \neq 0$

г) Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x\to\infty} kf(x) = \mathrm{k}\lim_{x\to\infty} f(x)$$

Предел функции на бесконечности.

Пример.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{5x+3}$

Решение.

Разделим числитель и знаменатель дроби на х.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{5+\frac{3}{x}}$$

Воспользуемся свойством предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{5+\frac{3}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(2-\frac{1}{x})}{\lim\limits_{x\to\infty}(5+\frac{3}{x})}$$

Вспомним предел числовой последовательности.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}=0$$

Получим: $\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}(2-0)}{\lim\limits_{x\to\infty}(5+0)}=\dfrac{2}{5}$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{5x+3}=\dfrac{2}{5}$

Предел функции на бесконечности.

Пример.

Пример. Найти предел функции y=f(x), при x стремящимся к бесконечности.

$$f(x) = \frac{5x^3 - 1}{10x^3 + 5}$$

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^3 - 1}{10x^3 + 5}$

Разделим числитель и знаменатель дроби на x в третьей степени.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5 - \frac{1}{x^3}}{10 + \frac{5}{x^3}}$$

Воспользуемся свойствами предела на бесконечности

$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(5 - \frac{1}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(10 + \frac{5}{x^3})}$$

Предел числителя равен: 5-0=5; Предел знаменателя равен: 10+0=10

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Предел функции на бесконечности.

Пример.

Пример. Найти предел функции y=f(x), при x стремящимся к бесконечности.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-3x+10}{8x^3+5}$$

Решение.

Разделим числитель и знаменатель дроби на x в третьей степени.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{10}{x^3}}{\frac{8x^3}{x^3}+\frac{5}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{10}{x^3}}{8+\frac{5}{x^3}}$$

Воспользуемся свойствами предела на бесконечности

$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{10}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(8+\frac{5}{x^3})}$$

Предел числителя равен: 0; Предел знаменателя равен: 8

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{0}{8}=0$$

Найти предел функц $y = \lim\limits_{x \to 2}(x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 5x - 2)$

Наша функция непрерывна в точке x=2, тогда воспользуемся определением непрерывности функции в точке, которое говорит что если функция непрерывна в точке, то предел функции в этой точке равен значению функции в этой же точке.

$$y = \lim_{x \to 2}(x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 5x - 2) = 2^4 + 3 \times 2^3 + 5 \times 2^2 + 5 \times 2 - 2 = 68$$

Найти предел функции: $y = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{sin(3x) + cos(x)}{-2sin(2x) + 3cos(2x)}$

- Давайте посмотрим не обращается ли знаменатель нашей функции при x=π/2 в нуль:

$$2sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) + 3cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = 2sin(\pi) + 3cos(\pi) = 3$$

- Знаменатель не равен нулю, тогда наша функция непрерывна в точке . Воспользуемся определением непрерывной функции и посчитаем предел нашей функции:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{sin(3x) + cos(x)}{-2sin(2x) + 3cos(2x)} = \frac{sin\left(3 \times \frac{\pi}{2}\right) + cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-2sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) + 3cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-1}{3}$$

Найти предел функции $y = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

- Подставим x=2 в знаменатель нашей дроби, получили 0, но на ноль делить нельзя. Давайте внимательно посмотрим на числитель нашей дроби.

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$$

- Сократим нашу дробь

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2)$$

- y= x+2 непрерывна точке x=2, тогда воспользуемся определением непрерыв

$$\lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

Найти предел функции: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

- Подставим x=1 в знаменатель нашей дроби, получили 0, но на ноль делить нельзя. Давайте найдем корни квадратного уравнения в числители и воспользуемся теоремой Виета.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 => x1 = 2 \text{ и } x2 = 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - x1)(x - x2) = (x - 2)(x - 1)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x - 2) = 1 - 2 = -1$$

■ Предел функции

9.11. Вычислите предел функции.

А

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x^2+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^3-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+2}{x^3+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x}$; 6) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x^2+2}$.

Б

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin\frac{x}{2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+\sqrt{x}-6}{x-5\sqrt{x}+6}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2}{2^x}$;

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}-\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{\sin x}$.

В

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x+\sin 5x}{\cos x+\cos 5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to \infty}(x+1)\cdot\sin\dfrac{4}{x}$;

6) $\lim\limits_{n\to \infty}\left(\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n+1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right)$.