

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского  
Национальный исследовательский университет  
Институт информационных технологий, математики и механики

# Системы принятия решений

VLADIMIR GRISHAGIN



# Оценки экстремума

Рассмотрим следующий простой пример. Пусть класс  $\mathcal{Q}$  - класс непрерывных функций, т.е. априорно известно, что минимизируемая функция  $Q$  непрерывна в области  $\Omega$ . Предположим, что вычислены значения функции в конечном числе точек  $z^i, 1 \leq i \leq k$ . Что после этого можно сказать о координате глобального минимума? Каковы бы ни были  $k$  точки и значения  $y^* \in Q$  ( $y^*$  для любой точки  $z^i$  всегда можно построить непрерывную функцию (проходящую через точки  $z^i, 1 \leq i \leq k$  т.е.  $\Phi(\omega_k)$  принадлежащую  $\mathcal{Q}$  и принимающую значение  $y^*$  в точке  $z^i$ ), из (1.11), которая имеет глобальный минимум в точке  $z^i$  с любым наперед заданным значением  $\epsilon$ .

Например, в качестве такой функции можно взять интерполяционный полином  $k$ -й степени, проходящий через точки  $(z^i, y^i), 1 \leq i \leq k$ ,  $(y^i, z^i)$  точку  $(z^i, y^i)$ .

# Оценки экстремума

Все сказанное означает, что по результатам конечного числа испытаний никаких выводов о расположении координаты глобального минимума сделать нельзя. Точно так же о величине глобального минимума можно лишь сказать, что

$$\varphi^* \leq \varphi_k^* \quad (1.17)$$

где  $\varphi_k^*$  из (1.15), однако оценить величину

$$\varepsilon_k = |\varphi^* - \varphi_k^*| \quad (1.18)$$

т.е. погрешность решения задачи, невозможно.

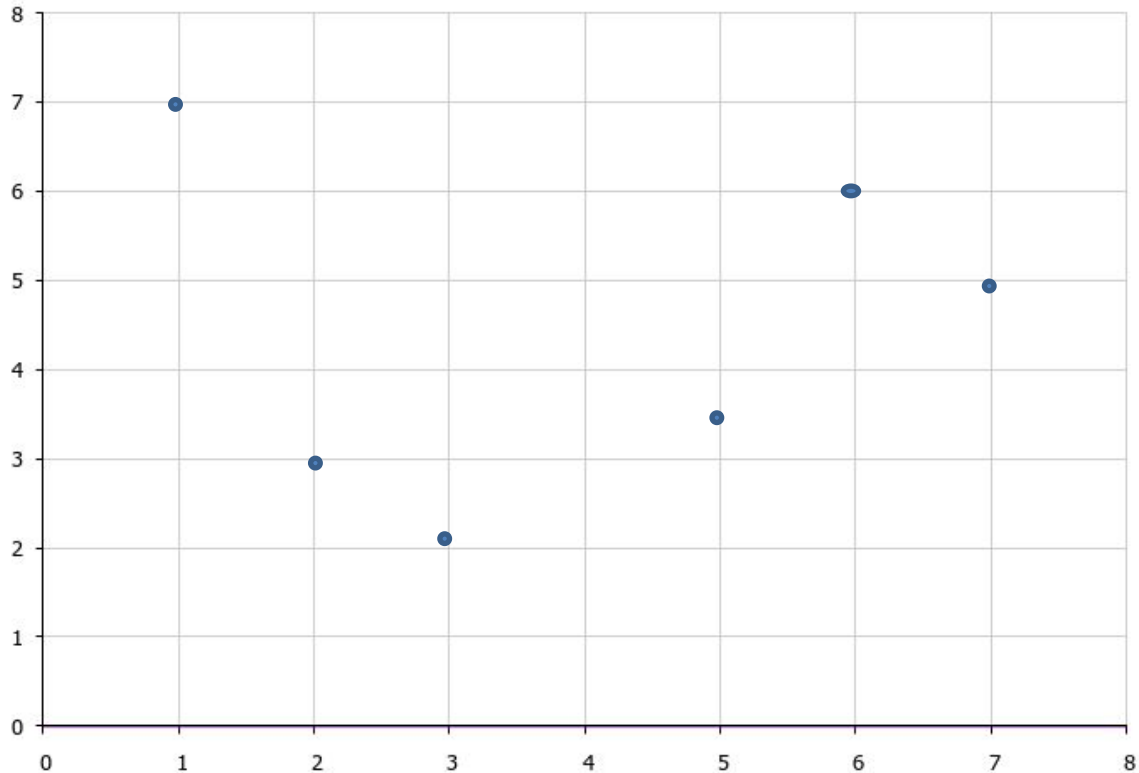
Возможность получения оценок экстремума по конечному числу испытаний зависит от свойств класса функций, которому принадлежит минимизируемая функция, или, другими словами, от априорной информации о функции. Фактически известны лишь два широких класса функций, допускающих построение таких оценок: класс одномерных унимодальных функций и класс функций, удовлетворяющих условию Липшица (в общем случае многомерных и многоэкстремальных).

# Оценки экстремума для унимодальных функций

Функция  $\varphi(y)$  является строго унимодальной на отрезке  $[a, b]$ , если существует точка  $y^* \in [a, b]$  такая, что для всех  $y^* < y' < y'' \leq b$  выполняется  $\varphi(y^*) < \varphi(y') < \varphi(y'')$ .

а для всех  $a \leq y' < y'' < y^*$  справедливо неравенство  $\varphi(y^*) < \varphi(y') < \varphi(y'')$ .

Пример. Унимодальная функция на отрезке  $[0, 8]$ .



# Оценки экстремума для унимодальных функций

Пусть теперь в общем случае проведено  $k$  испытаний в точках  $x^1, x^2, \dots, x^k \in (a, b)$  и получены значения  $z^1, z^2, \dots, z^k$ . Перенумеруем точки испытаний нижним индексом в порядке возрастания координаты, добавив к ним также концы отрезка поиска  $a$  и  $b$ , т.е.

$$a = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_k < y_{k+1} = b \quad (1.19)$$

Тогда интервалом неопределенности будет интервал  $(y_{i-1}, y_{i+1})$ , где номер  $i$  определяется из условия  $y_k^* \in (y_{i-1}, y_{i+1})$ , где  $y_k^*$  из (1.16) (в случаях  $i=1$  и  $i=k$  интервалами неопределенности будут полуинтервалы  $(y_{k-1}, b]$  и  $[a, y_1)$  соответственно). Иными словами, для строго унимодальной функции можно построить оценку координаты глобального минимума в виде интервала неопределенности и тем самым оценить погрешность решения задачи (по координате) величиной  $\varepsilon$ , ибо

$$\left| y_k^* - y^* \right| < \varepsilon = \max\{y_{i+1} - y_i, y_i - y_{i-1}\}$$

Что касается величины глобального минимума, то строгой унимодальности для получения оценки (1.18) недостаточно и требуются более жесткие условия для ее реализуемости.

# Оценки экстремума для липшицевых функций

Другим важным классом функций, допускающим построение оценок экстремума по конечному числу испытаний, является класс функций, удовлетворяющих условию Липшица

$$|\varphi(y') - \varphi(y'')| \leq L \|y' - y''\|, \forall y', y'' \in Q \subseteq R^N \quad (1.20)$$

где  $L > 0$  - постоянная величина, называемая константой Липшица.

Что означает неравенство (1.20)? Перепишем его в одномерном случае в виде

$$\frac{|\varphi(y') - \varphi(y'')|}{|y' - y''|} \leq L, \forall y', y'' \in Q \subseteq R^N$$

Левая часть в последнем неравенстве – это наклон секущей, проходящей через точки  $(y', \varphi(y'))$  и  $(y'', \varphi(y''))$ . Таким образом, класс липшицевых функций (1.20) – это класс функций с ограниченными (константой  $L$ ) наклонами.

Является ли липшицева функция непрерывной?

Ответ положительный, поскольку согласно (1.20) малому приращению аргумента соответствует малое приращение функции.

# Оценки экстремума для липшицевых функций

Является ли непрерывная функция липшицевой?

Не всегда. Пример:  $\sqrt{y}, y \in [0, 1]$ . У нее неограниченный наклон около нуля.

Является ли липшицева функция дифференцируемой?

Не всегда. Пример:  $|y|, y \in [-1, 1]$ . Она не дифференцируема в нуле.

Является ли дифференцируемая функция липшицевой?

Да, является с константой  $L = \max_{y \in Q} |\varphi'(y)|$ .

Очевидно, что если функция является липшицевой с константой  $L$ , она будет липшицевой для любой константы  $K \geq L$ .

Неравенство (1.20) позволяет построить по результатам испытаний кусочно-линейную функцию, называемую нижней огибающей, или минорантой, которая в точках испытаний совпадает с вычисленными значениями функции, а в остальных точках ограничивает снизу.

Рассмотрим одномерную задачу

$$\varphi(y) \rightarrow \min, y \in Q = [a, b] \subset R^1 \quad (1.21)$$

Предположим, что мы провели  $k$  испытаний в точках  $y^1, y^2, \dots, y^k \in (a, b)$ , получили значения функции  $\varphi(y^i)$  в этих точках и перенумеровали точки испытаний вместе с концами отрезка поиска  $a$  и  $b$  в соответствии с (1.19).

# Оценки экстремума для липшицевых функций

Возьмем некоторую точку  $y_i, 1 \leq i \leq k$ , из множества (1.19). Тогда для липшицевой функции, удовлетворяющей (1.20), для любого  $y \in [a, b]$  справедливо неравенство

$$\varphi(y_i) - \varphi(y) \leq L|y_i - y|,$$

или

$$\varphi(y) \geq \varphi(y_i) - L|y_i - y|, \quad (1.22)$$

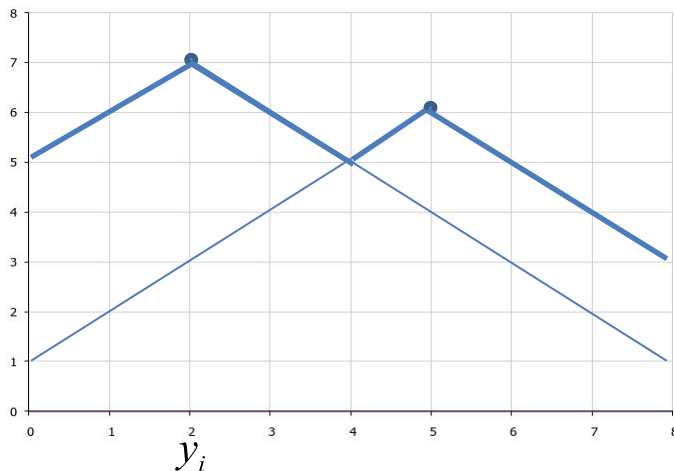
Последнее неравенство при  $y \leq y_i$ , т.е. слева от  $y_i$ , имеет вид

$$\varphi(y) \geq \varphi(y_i) - Ly_i + Ly,$$

где в правой части стоит возрастающая линейная функция

$$\bar{l}_i(y) = \varphi(y_i) - Ly_i + Ly, \quad y \leq y_i, \quad (1.23)$$

значение которой в точке  $y_i$  совпадает со значением  $\varphi(y_i)$ .



Аналогично при  $y \geq y_i$  (справа от  $y_i$ )

$$\varphi(y) \geq \varphi(y_i) + Ly_i - Ly,$$

т.е. функция  $\varphi(y)$  лежит над убывающей линейной функцией

$$\hat{l}_i(y) = \varphi(y_i) + Ly_i - Ly, \quad y \geq y_i. \quad (1.24)$$



# Оценки экстремума для липшицевых функций

Если мы обозначим как

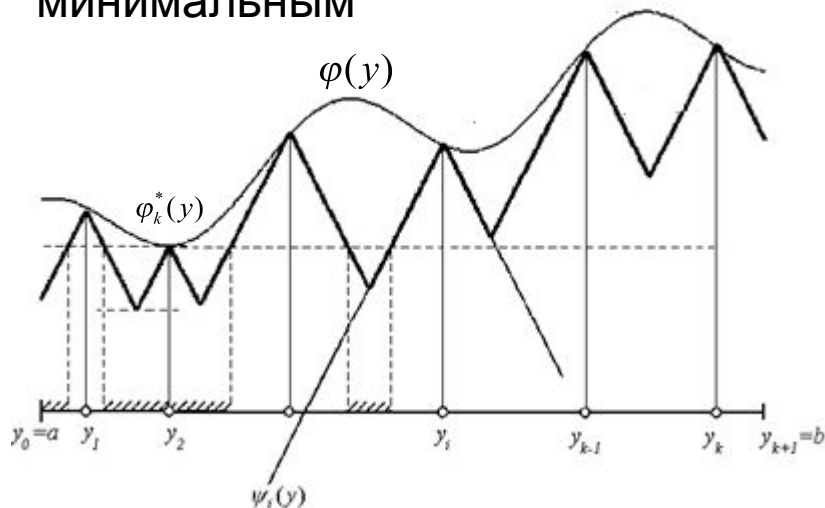
$$\psi_i(y) = \varphi(y_i) - L|y_i - y|$$

правую часть неравенства (1.22), то в общем случае

$$\varphi(y) \geq \Psi_k(y) = \max \{ \psi_i(y), 1 \leq i \leq k \}, y \in [a, b], \quad (1.25)$$

где функция  $\Psi_k(y)$  - кусочно-линейная миноранта, построенная по результатам испытаний (1.19).

Рассмотрим величину  $\varphi_k^* = \min_{y \in [a, b]} \Psi_k(y)$ . Тогда очевидно, что величина глобального минимума находится между величинами  $\varphi_k^*$  - минимальным вычисленным значением (1.15) целевой функции - и минимальным



значением миноранты. Это значит, что мы можем оценить погрешность решения (1.18) - погрешность по значению - величиной

$$\varepsilon_k = \varphi_k^* - \Psi_k^* \quad (1.26)$$

а погрешность по координатам оценивается величиной области, в которой  $\Psi_k(y) \leq \varphi_k^*$ .

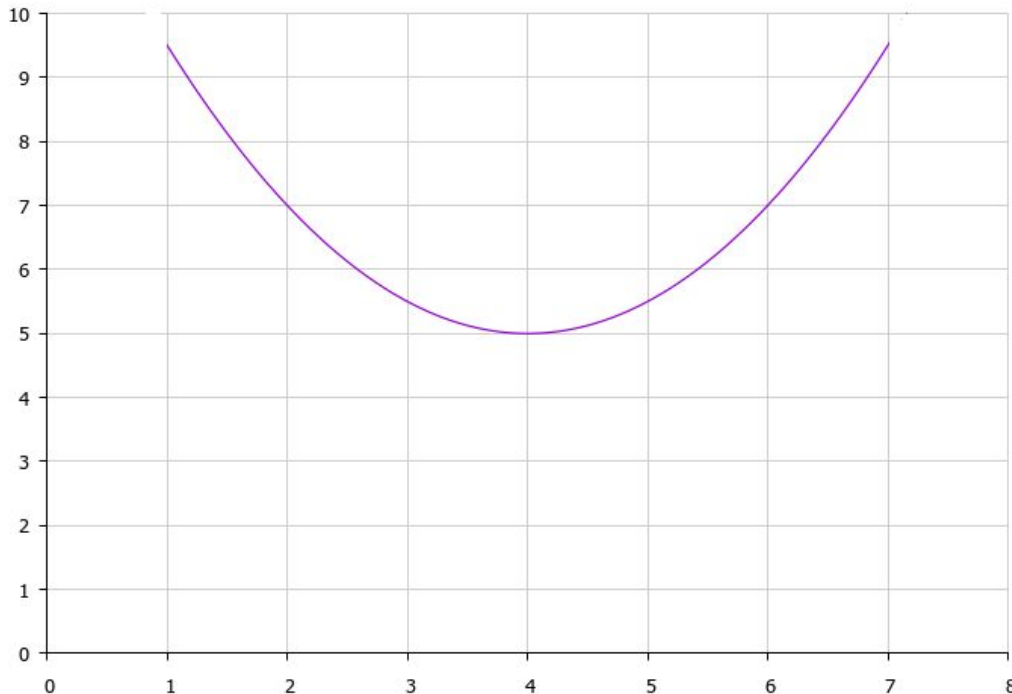
# Оценки экстремума для липшицевых функций

Рассмотрим пример построения миноранты для конкретной функции

$$\varphi(y) = \frac{(y-4)^2}{2} + 5$$

на отрезке  $[1, 7]$  .

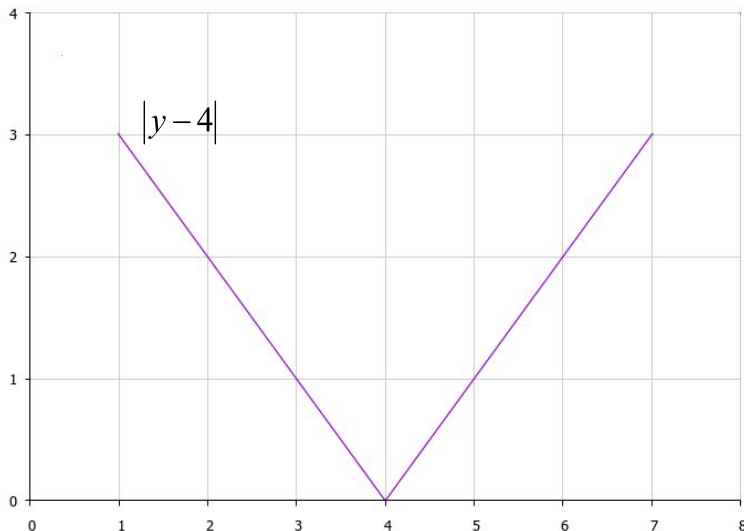
Это квадратичная функция с минимумом  $\varphi^* = 5$  в точке  $y^* = 4$  и значениями на концах отрезка – в точках 1 и 7 , равными 9.5.



# Оценки экстремума для липшицевых функций

Производная этой функции  $\varphi'(y) = y - 4$

Поскольку функция  $\varphi(y)$  дифференцируема, ее константа Липшица  $L$  может быть посчитана как максимум на отрезке модуля производной,



Построим последовательно миноранту по 4 точкам:

$$y^1 = 1, y^2 = 7, y^3 = 2, y^4 = 5.$$

Значения функции  $\varphi(y)$  в них равны

$$z^1 = \varphi(1) = 9.5, z^2 = \varphi(7) = 9.5, z^3 = \varphi(2) = 7, z^4 = \varphi(5) = 5.5.$$

# Оценки экстремума для липшицевых функций

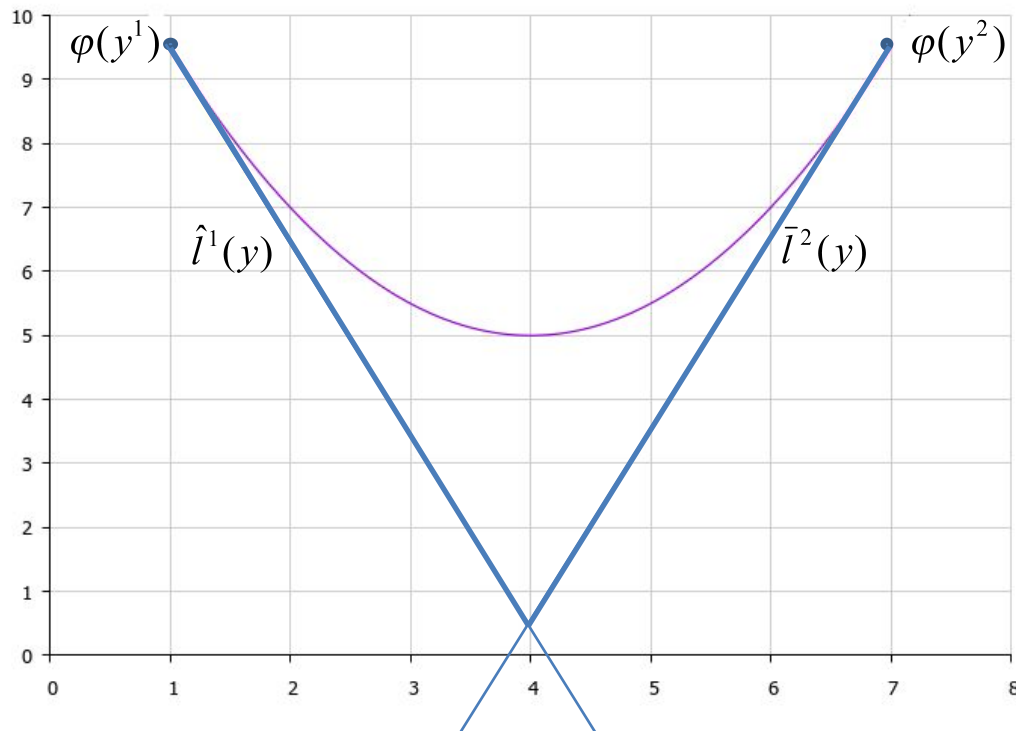
Начнем с точки  $y^1 = 1$ . Поскольку весь отрезок лежит справа от этой точки, то из двух минорирующих линейных функций (1.23), (1.24) возьмем только последнюю, которая имеет вид

$$\hat{l}^1(y) = \varphi(y^1) + Ly^1 - Ly = 12.5 - 3y, \quad y \geq 1.$$

Следующая точка  $y^2 = 7$ . Отрезок целиком слева от точки, поэтому берем только линейную миноранту (1.23):

$$\bar{l}^2(y) = \varphi(y^2) - Ly^2 + Ly = 3y - 11.5, \quad y \leq 7.$$

Теперь миноранта (1.25)  $\Psi_2(y) = \max\{\hat{l}^1(y), \bar{l}^2(y)\}, y \in [a, b]$ .



# Оценки экстремума для липшицевых функций

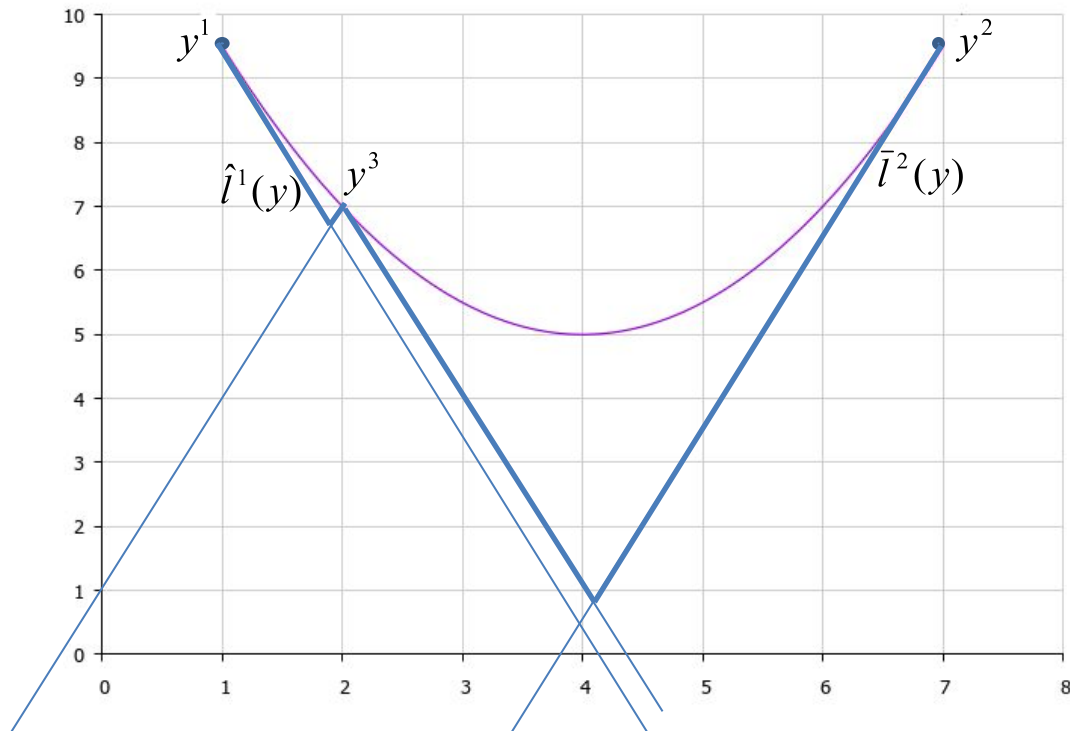
Берем точку  $y^3 = 2$ . Для нее функция (1.23) имеет вид

$$\bar{l}^3(y) = \varphi(y^3) - Ly^3 + Ly = 1 + 3y, y \leq 2,$$

а функция (1.24) -

$$\hat{l}^3(y) = \varphi(y^3) + Ly^3 - Ly = 13 - 3y, y \geq 2.$$

Теперь строим миноранту  $\Psi_3(y) = \max\{\hat{l}^1(y), \bar{l}^2(y), \bar{l}^3(y), \hat{l}^3(y)\}, y \in [a, b]$ .



# Оценки экстремума для липшицевых функций

Последняя точка  $y^4 = 5$ . Функция (1.23) для нее

$$\bar{l}^4(y) = \varphi(y^4) - Ly^4 + Ly = 3y - 9.5, y \leq 5,$$

а функция (1.24)

$$\hat{l}^4(y) = \varphi(y^4) + Ly^4 - Ly = 20.5 - 3y, y \geq 5.$$

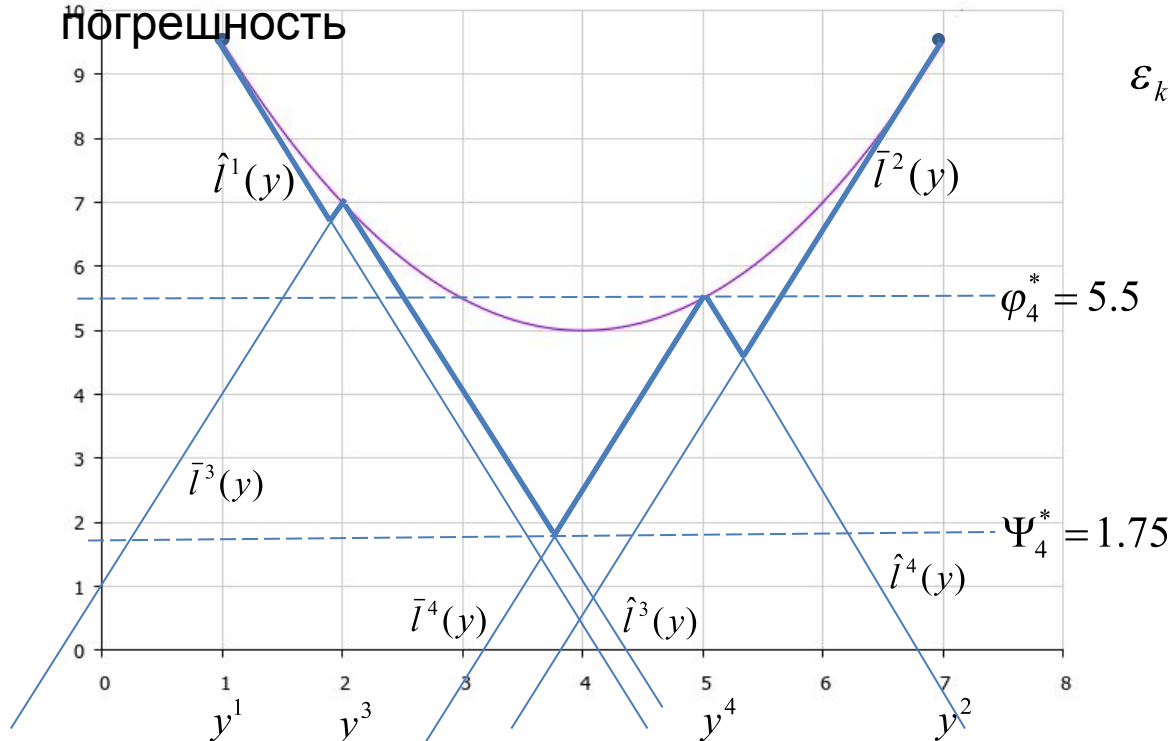
Конструируем миноранту

$$\Psi_4(y) = \max\{\hat{l}^1(y), \bar{l}^2(y), \bar{l}^3(y), \hat{l}^3(y), \bar{l}^4(y), \hat{l}^4(y)\}, y \in [a, b].$$

Для глобального минимума  $\varphi^*$  имеем ограничение  $\varphi_4^* \leq \varphi^* \leq \varphi_4^*$ , т.е.

погрешность

$$\varepsilon_k = \varphi_k^* - \Psi_k^* = 3.75$$



# Estimates of extremum for Lipschitzian functions

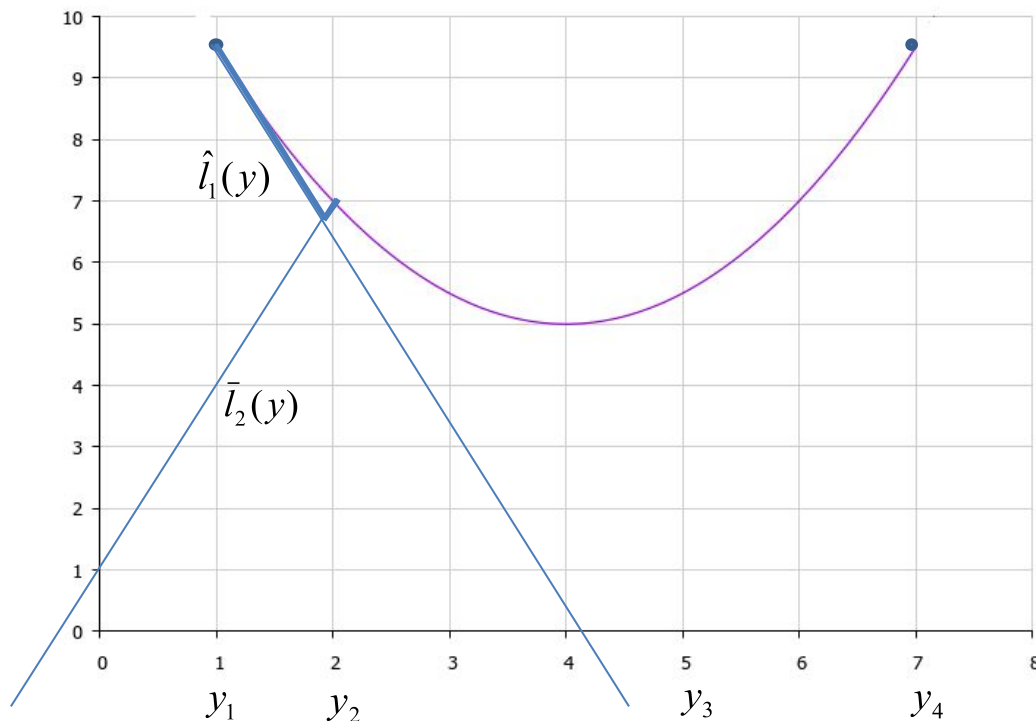
Мы строили миноранту, постепенно уточняя по мере поступления значений. Можно ее строить после того, как все значения получены. С этой целью упорядочим все координаты по возрастанию, перенумеровав их нижним индексом;  $y_4 = 7$ , и сопоставим им значения функции,  $z_3 = \varphi(5) = 5.5$ ,  $z_4 = \varphi(7) = 9.5$ .

Тогда для точки  $y_1$ , как и ранее, строится только функция из (1.24)

$$\hat{l}_1(y) = z_1 + Ly_1 - Ly = \hat{l}^1(y) = 12.5 - 3y$$

Для точки  $y_2 = 2$  получаем функцию (1.23)

$$\bar{l}_2(y) = z_2 + Ly_2 - Ly = \bar{l}^3(y) = 1 + 3y, y \leq 2,$$



Функция  $\xi_{1,2}(y) = \max_{y_1 \leq y \leq y_2} \{\hat{l}_1(y), \bar{l}_2(y)\}$  описывает часть миноранты на отрезке  $[y_1, y_2]$ .

# Оценки экстремума для липшицевых функций

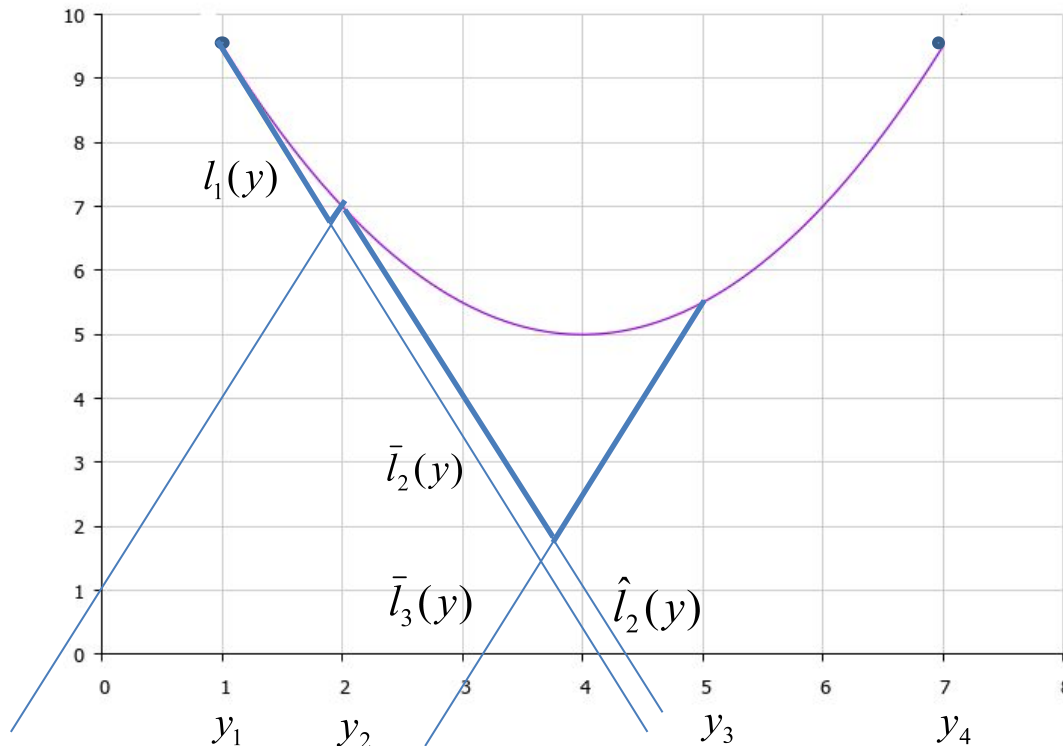
Для точки  $y_2 = 2$  получаем функцию (1.24)

$$\hat{l}_2(y) = z_2 - Ly_2 + Ly = \hat{l}^3(y) = 13 - 3y, y \geq 2.$$

Для точки  $y_3 = 5$  получаем функцию (1.23)

$$\bar{l}_3(y) = z_3 + Ly_3 - Ly = \bar{l}^4(y) = 3y - 9.5, y \leq 5,$$

Функция  $\xi_{2,3}(y) = \max_{y_2 \leq y \leq y_3} \{\hat{l}_2(y), \bar{l}_3(y)\}$  описывает «зубец» миноранты на отрезке  $[y_2, y_3]$ .





# Оценки экстремума для липшицевых функций

Наконец, строим функцию (1.24) для точки  $y_3 = 5$

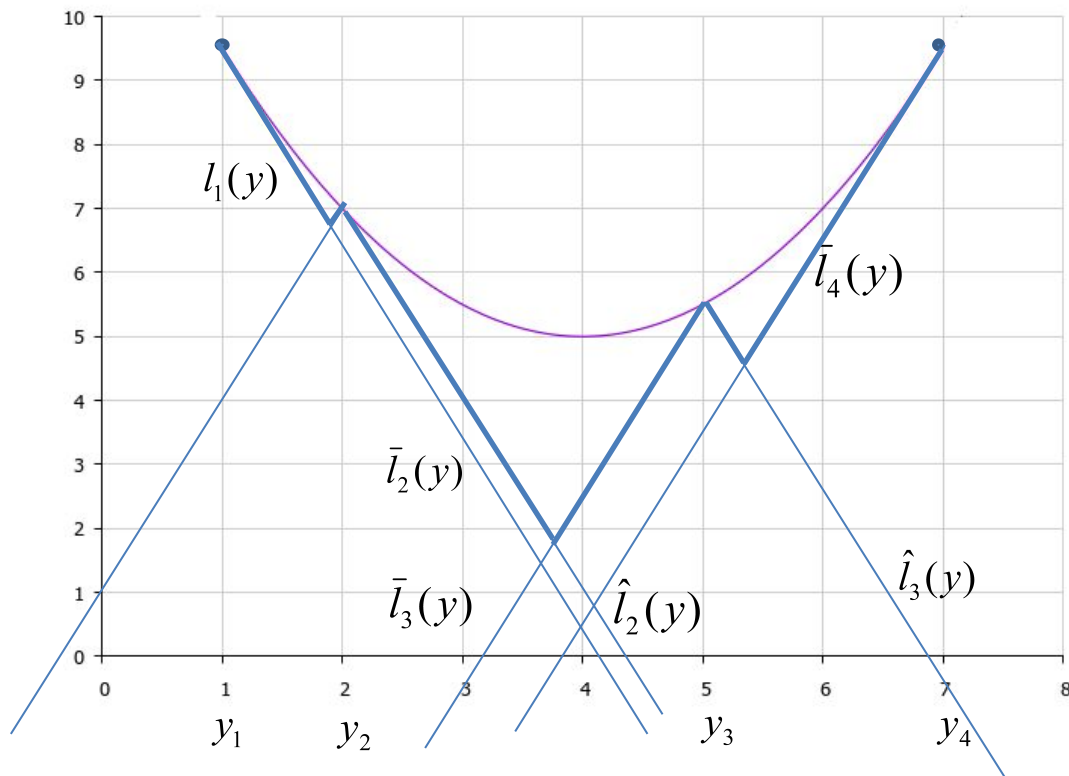
$$\hat{l}_3(y) = z_3 - Ly_3 + Ly = \hat{l}^4(y) = 20.5 - 3y, y \geq 5,$$

и функцию (1.23)

$$\bar{l}_4(y) = z^4 - Ly^4 + Ly = \bar{l}^2(y) = 3y - 11.5, y \leq 7.$$

для точки  $y_4 = 7$  чтобы получить последнюю часть миноранты на отрезке  $[y_3, y_4]$ .

$$\xi_{3,4}(y) = \max_{y_3 \leq y \leq y_4} \{\hat{l}_3(y), \bar{l}_4(y)\}$$



# Оценки экстремума для липшицевых функций

Рассмотрим две соседних точки  $y_{i-1} < y_i$  из ряда (1.19) со значениями  $z_{i-1} = \varphi(y_{i-1})$ ,  $z_i = \varphi(y_i)$ . Зубец миноранты между ними описывается функцией

$$\xi_{i-1,i}(y) = \max_{y_{i-1} \leq y \leq y_i} \{\hat{l}_{i-1}(y), \bar{l}_i(y)\}$$

где

$$\hat{l}_{i-1}(y) = z_{i-1} + Ly_{i-1} - Ly, y \geq y_{i-1},$$

$$\bar{l}_i(y) = z_i - Ly_i + Ly, y \leq y_i,$$

Точка  $\tilde{y}_i$  пересечения этих двух функций является точкой минимума функции  $\xi_{i-1,i}(y)$  на отрезке  $[y_{i-1}, y_i]$ .

Ее легко найти из равенства

$$z_{i-1} + Ly_{i-1} - Ly = z_i - Ly_i + Ly,$$

откуда

$$\tilde{y}_i = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i) - \frac{z_i - z_{i-1}}{2L}. \quad (1.26)$$

Значением миноранты в точке  $\tilde{y}_i$  является величина  $\bar{l}_i(\tilde{y}_i)$ , равная

$$\tilde{z}_i = \frac{1}{2}(z_{i-1} + z_i) - \frac{L}{2}(y_i - y_{i-1}). \quad (1.27)$$

# Построение миноранты

## Задание

Построить для константы Липшица  $L = 15$  миноранту функции  $y^3 - 5y^2 + 6y + 2$  на интервале  $[0, 4]$  по точкам испытаний

$$y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 2, y_4 = 4$$

и указать оценку величины глобального минимума  $\varepsilon_k = \varphi_k^* - \Psi_k^*$

