Полный факторный эксперимент

При полном факторном эксперименте (ПФЭ) число опытов равно числу всех возможных комбинаций уровней факторов и при одинаковом числе уровней для каждого фактора определяется формулой

$$N = n^k,$$

где n — число уровней, k — число факторов ($j = 1, 2, \dots, k$).

Кодирование факторов (замена переменных):

$$x_j = \frac{z_j - z_j^{o}}{\Delta z_j},$$

где

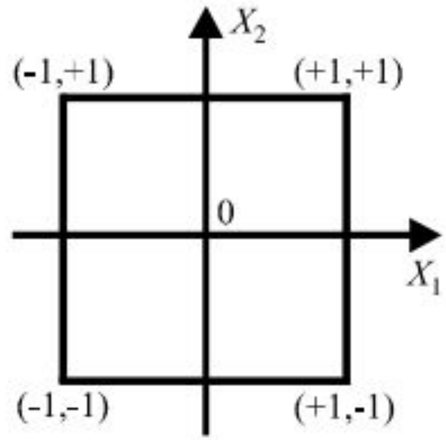
$$z_j^{o} = \frac{z_j^{max} + z_j^{min}}{2}, \quad \Delta z_j = \frac{z_j^{max} - z_j^{min}}{2},$$

z_j^{max} и z_j^{min} — верхняя и нижняя границы варьирования j-фактора.

Точка (z_1^{o}, z_2^{o}) называется *центром плана*, или *основным уровнем*; величины Δz_1 и Δz_2 — интервалами варьирования по осям z_1 и z_2.

Полный факторный эксперимент 2^2

№ опыта	Факторы в натуральном масштабе		Факторы в безразмерном масштабе		Выход продукта, y
	z_1 (°C)	z_2 (атм)	x_1	x_2	
1	50	1	–1	–1	y_1
2	50	2	–1	+1	y_2
3	100	1	+1	–1	y_3
4	100	2	+1	+1	y_4



Коэффициенты линейного уравнения регрессии: $\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$.

Нахождение коэффициентов уравнения регрессии:

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{ji} y_i}{N}.$$

Матрица планирования ПФЭ типа 2^2 с фиктивной переменной

№ опыта	x_0	x_1	x_2	y
1	+1	–1	–1	y_1
2	+1	–1	+1	y_2
3	+1	+1	–1	y_3
4	+1	+1	+1	y_4

Эффект парного взаимодействия в уравнении регрессии:

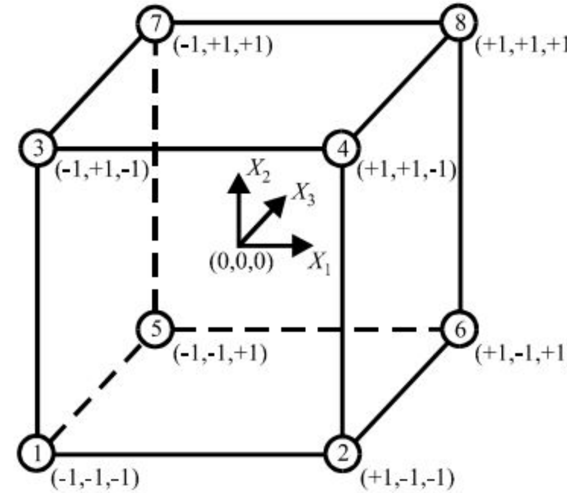
$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 .$$

Расширенная матрица планирования ПФЭ типа 2^2

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	-1	y_2
3	+1	+1	-1	-1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4

Полный факторный эксперимент 2^3

№ опыта	Факторы в безразмерном масштабе			Выход продукта, y
	x_1	x_2	x_3	
1	–1	–1	–1	y_1
2	+1	–1	–1	y_2
3	–1	+1	–1	y_3
4	+1	+1	–1	y_4
5	–1	–1	+1	y_5
6	+1	–1	+1	y_6
7	–1	+1	+1	y_7
8	+1	+1	+1	y_8



Уравнение регрессии с учетом эффектов взаимодействия факторов запишется в следующем виде:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + \\ + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3\,,$$

Расширенная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y
1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	–1	y_1
2	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1	y_2
3	+1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	–1	+1	–1	–1	–1	y_4
5	+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	y_5
6	+1	+1	–1	+1	–1	+1	–1	–1	y_6
7	+1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_8

Проверка значимости коэффициентов и адекватности уравнения регрессии

Выборочная дисперсия воспроизводимости, характеризующая влияние случайных факторов:

$$s^2_{\text{воспр}} = \frac{\sum\limits_{u=1}^{m} \left(y_u^{\text{o}} - \overline{y^{\text{o}}}\right)^2}{m-1},$$

Точность определения коэффициентов уравнения: $s(b_j) = \dfrac{s_{\text{воспр}}}{\sqrt{N}}$

Значимость коэффициентов проверяется по критерию Стьюдента. В условиях нулевой гипотезы H_0: $b_j = 0$; отношение абсолютной величины коэффициента к его ошибке имеет распределение Стьюдента. Для каждого коэффициента определяется t-отношение:

$$t_j = \frac{|b_j|}{s(b_j)} = \frac{|b_j|}{s_{\text{воспр}}}\sqrt{N}$$

Адекватность уравнения проверяется по критерию Фишера: $F = \left(s^2_{\text{ад}} / s^2_{\text{воспр}}\right),$

$$s^2_{\text{ад}} = s^2_{\text{ост}} = \frac{1}{N-l}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2,$$

где l — число значимых коэффициентов .

Параллельные опыты

Матрица планирования ПФЭ 2^3 в условиях линейной модели с одинаковым числом параллельных опытов при каждом сочетании уровней факторов

№	x_0	x_1	x_2	x_3	y	$\bar{y}_i$	s_i^2
1	+1	–1	–1	–1	$y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1m}$	$\bar{y}_1$	s_1^2
2	+1	+1	–1	–1	$y_{21}\ y_{22}, \ldots, y_{2m}$	$\bar{y}_2$	s_2^2
3	+1	–1	+1	–1	$y_{31}, y_{32}, \ldots, y_{3m}$	$\bar{y}_3$	s_3^2
4	+1	+1	+1	–1	$y_{41}, y_{42}, \ldots, y_{4m}$	$\bar{y}_4$	s_4^2
5	+1	–1	–1	+1	$y_{51}, y_{52}, \ldots, y_{5m}$	$\bar{y}_5$	s_5^2
6	+1	+1	–1	+1	$y_{61}, y_{62}, \ldots, y_{6m}$	$\bar{y}_6$	s_6^2
7	+1	–1	+1	+1	$y_{71}, y_{72}, \ldots, y_{7m}$	$\bar{y}_7$	s_7^2
8	+1	+1	+1	+1	$y_{81}, y_{82}, \ldots, y_{8m}$	$\bar{y}_8$	s_8^2

Для каждого сочетания уровней факторов определяется среднее значение измеряемой величины и выборочная дисперсия:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m}\sum_{u=1}^{m} y_{iu},$$

$$s_i^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{u=1}^{m}(y_{iu} - \bar{y}_i)^2$$

Однородность дисперсий проверяется по критерию Кохрена $G = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{i=1}^{N} s_i^2}$

Оценка дисперсии воспроизводимости $s_{\text{воспр}}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s_i^2$

Коэффициенты уравнения регрессии: $b_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}\bar{y}_i$

Среднеквадратичные отклонения коэффициентов: $s(b_j) = \frac{s_{\text{воспр}}}{\sqrt{Nm}} = \frac{1}{N\sqrt{m}}\sqrt{\sum_{i=1}^{N} s_i^2}$

Значимость коэффициентов проверяется по критерию Стьюдента: $t_j = \frac{|b_j|}{s(b_j)}$

Дисперсия адекватности $s_{\text{ад}}^2 = \frac{m\sum_{i=1}^{N}(\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{N-l}$

Адекватность уравнения регрессии эксперименту проверяется по критерию Фишера $F = \frac{s_{\text{ад}}^2}{s_{\text{воспр}}^2}$