

# Практическое занятие № 11

## Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

# Дифференциальным уравнением (ДУ)

называется уравнение, содержащее производные от искомой функции или её

Дифференциалы является функция

Решения  $ду$  - Общие  
- Частные

бывают:

Задача Коши Найти частное

- решение  
Виды  $ду$  - с разделёнными переменными

- с разделяющимися переменными

Из предложенного списка

выберите дифференциальные уравнения:

1)  $y' + 3x = 0$

4)  $y''y - x = 0$

7)  $3x^{(5)} - y^{(5)} = 0$

2)  $y^2 + x^2 = 5$

5)  $y = \ln|x| + C$

8)  $dy = (x + 3)dx$

3)  $y = e^x$

6)  $2dy + 3dx = 0$

$$x' = 1$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Из предложенных функций

$$y = x \quad y = \sin x \quad y = x + \sin x \quad y = 2 \cos x$$

с помощью проверки выберите частные решения

$$\text{ДУ } y'' + y = x.$$

$$y'' + y = x$$

$y = x$	$y = \sin x$	$y = x + \sin x$	$y = 2 \cos x$
$y' = x' = 1$	$y' = (\sin x)' =$	$y' = (x + \sin x)' =$	$y' = (2 \cos x)' =$
$y'' = 1' = 0$	$= \cos x$	$= 1 + \cos x$	$= -2 \sin x$
$0 + x = x$	$y'' = (\cos x)' =$	$y'' = (1 + \cos x)' =$	$y'' = (-2 \sin x)' =$
	$= -\sin x$	$= -\sin x$	$= -2 \cos x$
	$-\sin x + \sin x = x$	$-\sin x + x + \sin x = x$	$-2 \cos x + 2 \cos x = x$
			

# ДУ с разделёнными переменными

Найдите частное решение ДУ  $y^3 dy = -5x^4 dx$ , если  $y(2) = 1$

$$y^3 dy = -5x^4 dx$$

$$\int y^3 dy = -5 \int x^4 dx$$

$$\frac{y^4}{4} = -\frac{5x^5}{5} + C$$

$$\frac{y^4}{4} = (-x^5 + C) \cdot 4$$

$$\underline{y^4 = -4x^5 + C}$$

Общее решение

$$y(2) = 1$$

$$x = 2 \quad y = 1$$

$$1^4 = -4 \cdot 2^5 + C$$

$$1 = -128 + C$$

$$C = 129$$

$$\underline{y^4 = -4x^5 + 129}$$

Частное решение

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

# ДУ с разделяющимися

переменными

Решите ДУ  $(y + 1)dx = (x - 1)dy$  и найдите его частное решение, если при  $x = 3, y = 3$ .

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$(y + 1)dx = (x - 1)dy$$

$$(x - 1)dy = (y + 1)dx$$

$$\frac{dy}{y + 1} = \frac{dx}{x - 1}$$

$$y + 1 = (x - 1) \cdot C$$

$$\int \frac{dy}{y + 1} = \int \frac{dx}{x - 1}$$

$$y = (x - 1) \cdot C - 1$$

$$\ln|y + 1| = \ln|x - 1| + C$$

Общее  
решение

$$\ln|y + 1| = \ln|x - 1| + \ln C$$

$$\ln|y + 1| = \ln|x - 1| \cdot C$$

$$y = 3 \quad x = 3$$

$$3 = (3 - 1) \cdot C - 1$$

$$C = 2$$

$$y = (x - 1) \cdot 2 - 1$$

$$y = 2x - 3$$

Частное  
решение

# ДУ с разделяющимися

## переменными

Найдите общее решение ДУ  $(x + 3)dy - (y + 2)dx = 0$ .

$$(x + 3)dy = (y + 2)dx$$

$$\frac{dy}{y + 2} = \frac{dx}{x + 3}$$

$$\int \frac{dy}{y + 2} = \int \frac{dx}{x + 3}$$

$$\ln|y + 2| = \ln|x + 3| + C$$

$$\ln|y + 2| = \ln|x + 3| + \ln C$$

$$\ln|y + 2| = \ln|x + 3| \cdot C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$y + 2 = (x + 3) \cdot C$$

$$y = (x + 3) \cdot C - 2$$

---

Общее  
решение

# ДУ с разделяющимися

переменными

Найдите частное решение ДУ  $y' = 3 \cos x$ ,  
удовлетворяющее условию  $y(0) = -1$

$$y' = 3 \cos x$$

$$y = \int 3 \cos x dx$$

$$y = 3 \sin x + C$$

---

Общее  
решение

$$\int \sin x dx = -\cos x$$
$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$y(0) = -1$$

$$x = 0 \quad y = -1$$

$$-1 = 3 \sin 0 + C$$

$$C = -1$$

$$y = 3 \sin x - 1$$

---

Частное  
решение

# ДУ с разделяющимися

## переменными

Решите задачу Коши для дифференциального уравнения

$$1 + y' + y + xy' = 0, \text{ если } y(1) = 5.$$

$$1 + y' + y + xy' = 0$$

$$1 + \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} = 0 \quad | \cdot dx$$

$$dx + dy + ydx + xdy = 0$$

$$dx(y + 1) + dy(x + 1) = 0$$

$$\frac{dy}{y + 1} = -\frac{dx}{x + 1}$$

$$\int \frac{dy}{y + 1} = -\int \frac{dx}{x + 1}$$

$$\ln|y + 1| = -\ln|x + 1| + C$$

$$\ln|y + 1| = \ln C - \ln|x + 1|$$

$$y + 1 = \frac{C}{x + 1}$$

$$y = \frac{C}{x + 1} - 1 \text{ — общее решение}$$

# ДУ с разделяющимися переменными

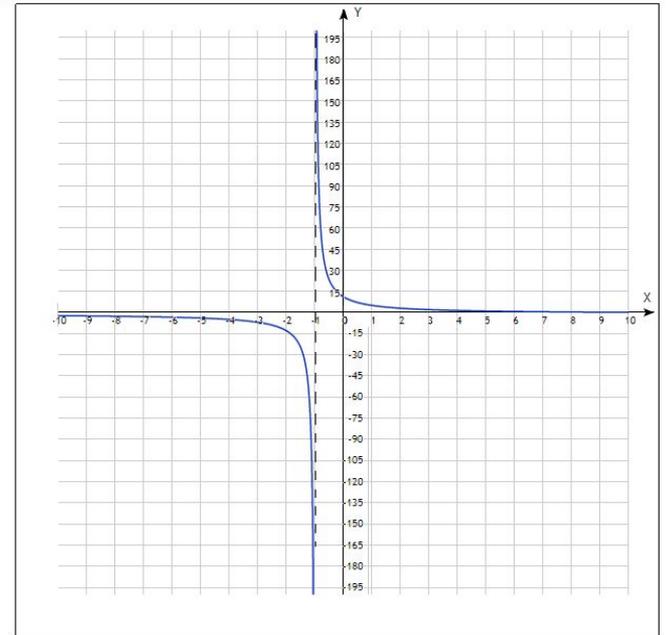
Решите задачу Коши для дифференциального уравнения

$$1 + y' + y + xy' = 0, \text{ если } y(1) = 5.$$

$$y = \frac{C}{x+1} - 1 - \text{общее решение}$$

$$5 = \frac{C}{2} - 1 \Rightarrow \frac{C}{2} = 6 \Rightarrow C = 12$$

$$y = \frac{12}{x+1} - 1 - \text{частное решение (гипербола)}$$



Самостоятельно выполните задания Пр  
11, которые находятся в группе

«291 СВ математика» в VK:

<https://vk.com/club202706316>

ИЛИ

«293 СВ математика» в VK:

<https://vk.com/club202706340>