Исследование корреляции

Корреляция

Между различными явлениями существуют сложные и многообразные связи. Их можно классифицировать.

В технике и естествознании часто говорят о функциональной зависимости. Например скорость выведения лекарственного вещества из организма.

Однако, многие явления происходят при воздействии многочисленных факторов, в этом случае, связь теряет свою строгую функциональность.

В результате, одна случайная переменная реагирует на изменения другой переменой изменением своего закона распределения.

Корреляция – это зависимость между двумя случайными величинами.

- Изучение статистических зависимостей основывается на исследовании таких связей между случайными переменными, при которых значение одной изменяется в зависимости от того, какие значения принимает другая.

- Так как понятие статистической зависимости относится к осредненным условиям , прогнозы не могут быть безошибочными. Применяя некоторые вероятностные методы , можно вычислить вероятность того, что ошибка прогноза не выйдет за определенные границы.

- В исследованиях между изучаемыми признаками чаще всего наблюдаются корреляционные взаимосвязи. (Связь роста с весом, прыжки в длину и бег на короткие дистанции).

Виды взаимосвязи

функциональная взаимосвязь

- Функциональной называется взаимосвязь, при которой каждому значению одного показателя соответствует строго определенное значение другого.

Статистическая взаимосвязь

- Статистической взаимосвязью называется взаимосвязь, при которой одному значению первого показателя может соответствовать несколько значений второго показателя.

Корреляционный анализ

- Корреляционный анализ состоит в определении степени связи между двумя случайными величинами (*Y* и *X*).

Основные задачи корреляционного анализа

- определение формы связи (линейная, нелинейная);
- определение направления связи (положительная связь или отрицательная);
- определение степени или тесноты взаимосвязи (слабая, средняя, сильная).

Форма зависимости

Форма зависимости

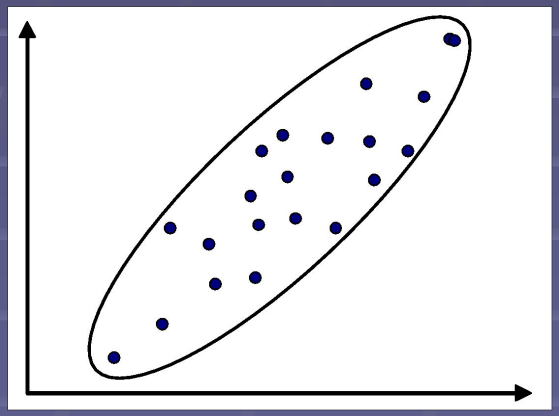


Рис 1. Линейная статистическая связь

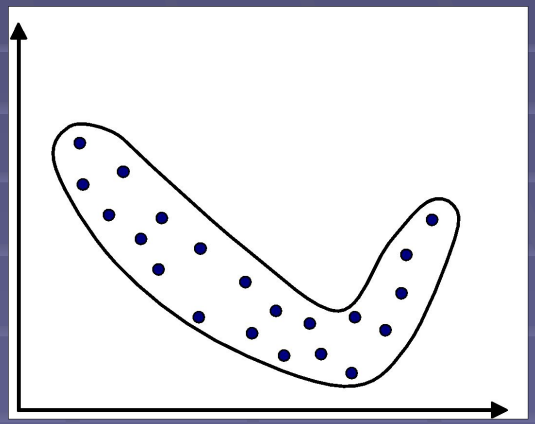


Рис 2. Нелинейная статистическая связь

Направленность взаимосвязи

Направленность взаимосвязи

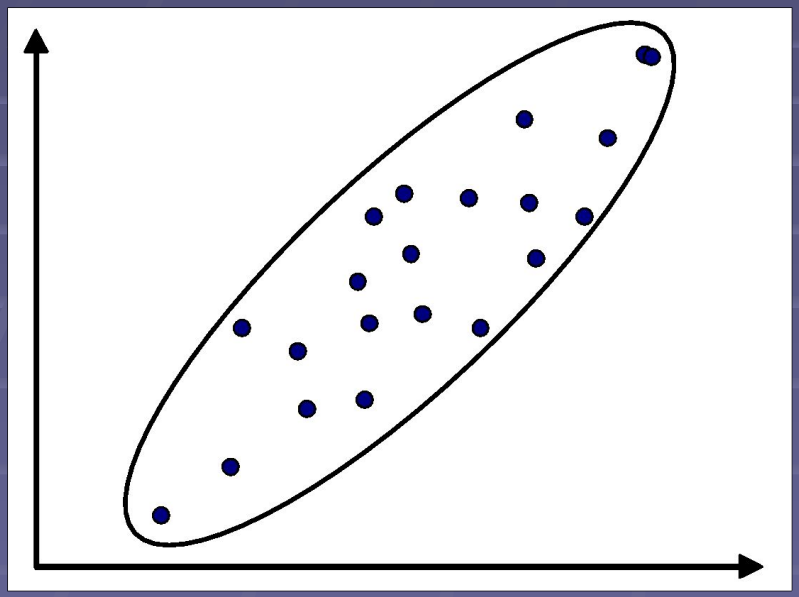


Рис 3. Положительная направленность

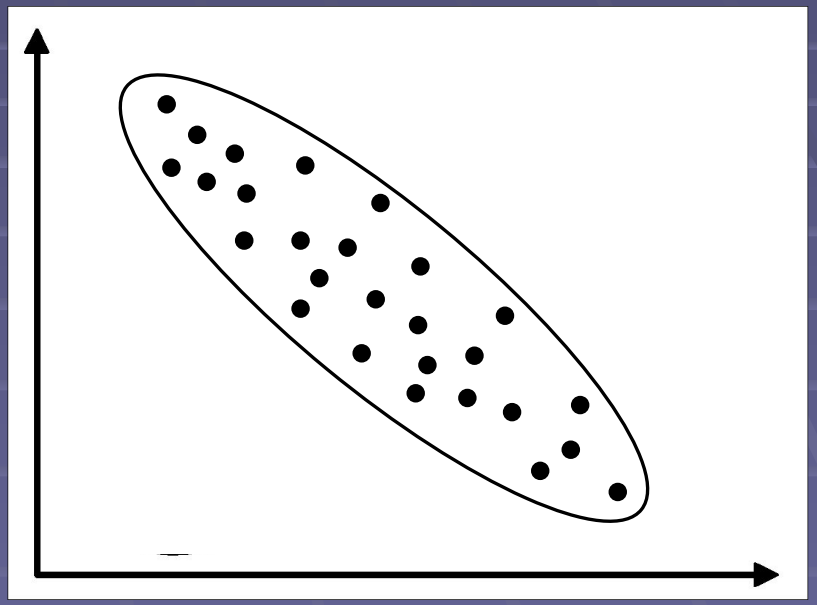


Рис 4. Отрицательная направленность

Теснота (сила) взаимосвязи

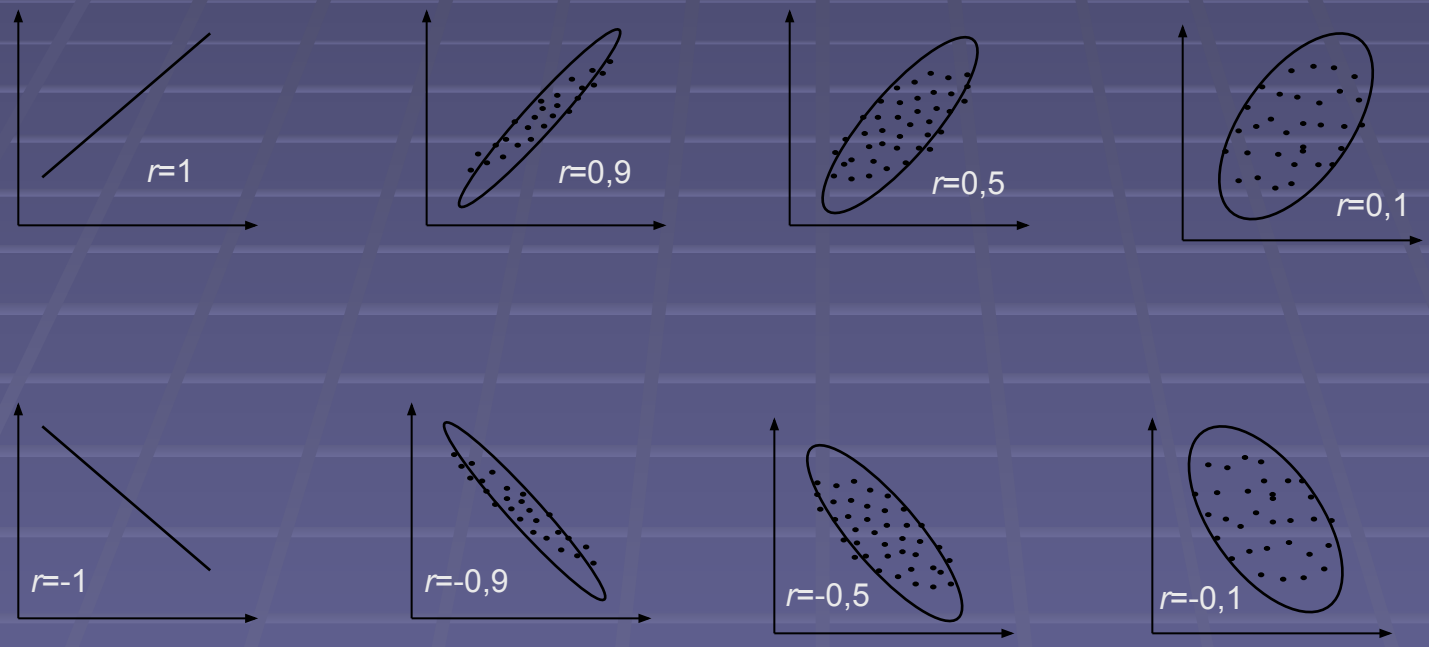
Диапазон коэффициента корреляции

$$-1 \leq r \leq 1$$

Построение корелляционного поля

- Пару случайных чисел *x* и *y*,представляющих собой результаты измерения спортивных результатов, можно изобразить графически в прямоугольной системе координат в виде совокупности точек с координатами x, y. Множество этих точек образуют графическую зависимость, называемую корреляционным полем или диаграммой рассеивания.
- Визуальный анализ графика позволяет выявить как форму, так и направленность и силу взаимосвязи.
- Корреляционное поле необходимо обвести по краю и рассмотреть полученную фигуру, если обведенный ареал напоминает эллипс, то речь идет о линейной зависимости.
- Далее производится анализ графика, если эллипс узкий, то зависимость сильная. По графику можно увидеть положительную или отрицательную направленность.

Корреляционные поля



Критерии оценки силы взаимосвязи в корреляции

$|r| = 1$ (функциональная зависимость)

$0.7 \le |r| \le 0.99$ (сильная зависимость)

$0.5 \le |r| \le 0.69$ (средняя зависимость)

$0.2 \le |r| \le 0.49$ (слабая зависимость)

$0.09 \le |r| \le 0.19$ (очень слабая зависимость)

$r = 0$ (зависимости нет)

Коэффициент детерминации

- ***Коэффициент детерминации (R^2)*** - величина квадрата коэффициента корреляции.

$$D = r^2 \cdot 100\%$$

Величина R^2 показывает долю (%) части варьирования одного из признаков, связанную с варьированием другого

Коэффициент корреляции Браве-Пирсона

Вычисление коэффициента корреляции Браве-Пирсона

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{nS_x S_y}$$

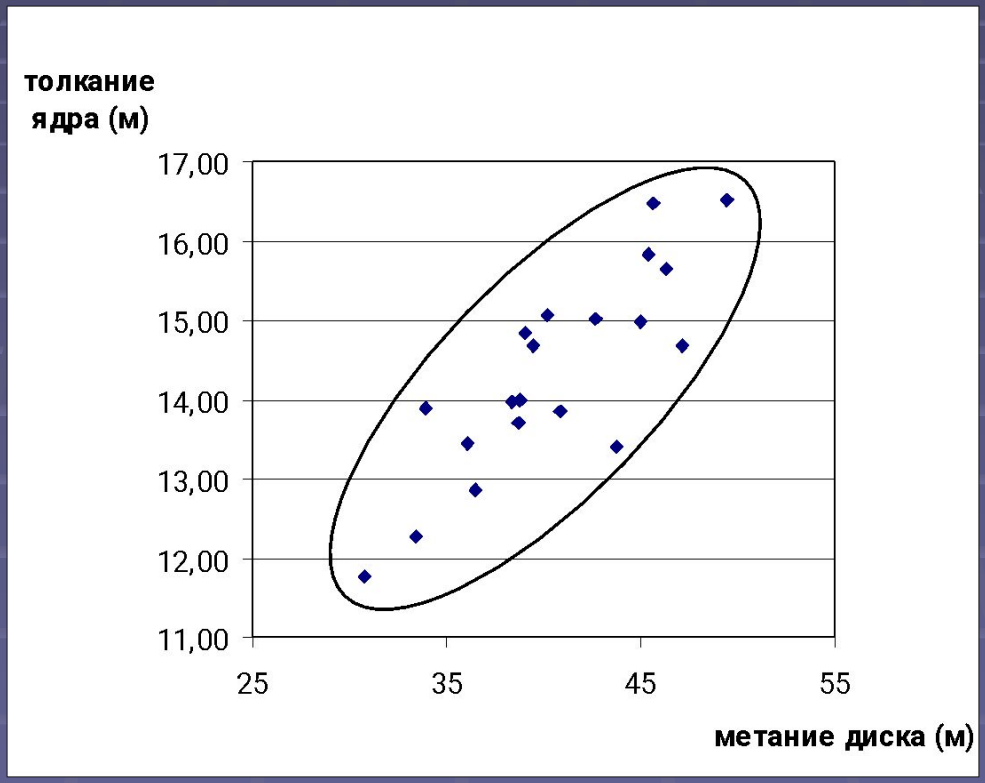
Этапы проверки гипотезы

- 1. Задаются уровнем значимости α=0,05.
- 2. Формулируют гипотезы H_0: r=0 H_1: r≠0
- 3. Рассчитывают эмпирическое значение t критерия Стьюдента
- 4. Определяют критическое значение критерия $t_{кр}$
- 5. Сравнивают эмпирическое значение критерия с критическим

Пример исследования корреляции

- Результаты метания диска и толкания ядра

Корреляционное поле



- Рис. 6. Корреляционное поле

1	2	3	4	5	6	7	8
i	xi	yi	$x_i - \bar{x}$	$y_i - y$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - y)^2$
1	40,9	13,84	0,318	-0,502	-0,159636	0,101124	0,252004
2	49,47	16,51	8,888	2,168	19,269184	78,996544	4,700224
3	45,44	15,83	4,858	1,488	7,228704	23,600164	2,214144
4	45,64	16,47	5,058	2,128	10,763424	25,583364	4,528384
5	43,76	13,40	3,178	-0,942	-2,993676	10,099684	0,887364
6	36,08	13,45	-4,502	-0,892	4,015784	20,268004	0,795664
7	33,92	13,88	-6,662	-0,462	3,077844	44,382244	0,213444
8	40,22	15,06	-0,362	0,718	-0,259916	0,131044	0,515524
9	39,47	14,68	-1,112	0,338	-0,375856	1,236544	0,114244
10	38,38	13,97	-2,202	-0,372	0,819144	4,848804	0,138384
11	38,68	13,70	-1,902	-0,642	1,221084	3,617604	0,412164
12	47,14	14,68	6,558	0,338	2,216604	43,007364	0,114244
13	36,47	12,85	-4,112	-1,492	6,135104	16,908544	2,226064
14	39,03	14,84	-1,552	0,498	-0,772896	2,408704	0,248004
15	46,3	15,65	5,718	1,308	7,479144	32,695524	1,710864
16	33,47	12,27	-7,112	-2,072	14,736064	50,580544	4,293184
17	44,97	14,97	4,388	0,628	2,755664	19,254544	0,394384
18	38,83	13,99	-1,752	-0,352	0,616704	3,069504	0,123904
19	42,68	15,03	2,098	0,688	1,443424	4,401604	0,473344
20	30,79	11,77	-9,792	-2,572	25,185024	95,883264	6,615184
Сумма	811,64	286,84	0	0	102,40092	481,0747	30,97072

Вычисление суммы значений x_i и y_i

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \boxtimes + x_{19} + x_{20} = 811{,}64$$

$$\sum_{i=1}^{20} y_i = y_1 + y_2 + y_3 + \boxtimes + y_{19} + y_{20} = 286{,}84$$

Определение средних значений признаков x_i и y_i

$$\bar{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{811{,}64}{20} = 40{,}58$$

$$\bar{y} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} y_i = \frac{286{,}64}{20} = 14{,}34$$

Соответствующие суммы

$$\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})=102{,}4009$$

$$\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2=481{,}0747$$

$$\sum_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2=30{,}9707$$

Значение коэффициента корреляции Браве-Пирсона

$$r = \frac{102{,}4009}{\sqrt{481{,}0747 \cdot 30{,}9707}} = 0{,}839$$

- Коэффициент корреляции лежит в интервале $0,7 \le |r| \le 0,99$, поэтому можно сделать предположение о том, что между результатами, показанными спортсменами в метании диска, и результатами, показанными ими в толкании ядра, существует ***линейная положительная сильная*** статистическая взаимосвязь.

Коэффициент детерминации

$$D = r^2 \cdot 100\% = 0{,}839 \cdot 0{,}839 \cdot 100\% = 70{,}4\%$$

- Таким образом, 70% взаимосвязи между двумя наборами данных объясняется их взаимовлиянием. Остальная часть вариации обусловлена воздействием других неучтенных причин.

Вывод о статистической значимости коэффициента корреляции

- Между результатами, показанными спортсменами в метании диска, и результатами, показанными ими в толкании ядра, существует значимая положительная взаимосвязь.

Коэффициенты вариации

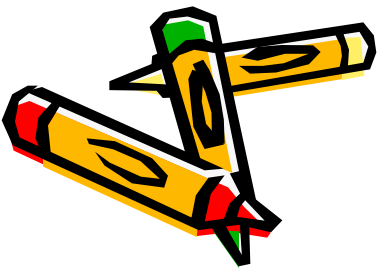
$$V_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{5{,}03}{40{,}58} \cdot 100\% = 12{,}4\%$$

$$V_y = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} \cdot 100\% = \frac{1{,}28}{14{,}3} \cdot 100\% = 8{,}9\%$$

- Поскольку коэффициент вариации у результатов в метании диска больше, чем у результатов в толкании ядра, то этот признак варьирует сильнее

Алгоритм №1 вычисления коэффициента корреляции

1. Находим x и y
2. Заполняем таблицу
3. Находим $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$ $\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1}}$
4. Находим $r = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}$



5. Проверка значимости выборочного коэффициента корреляции

Вычислить наблюдаемое значение критерия

$$T_{набл} = \frac{\bar{r}_{xy} \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\bar{r}_{xy}^2}}$$

Сравнить числа $|T_{набл}|$ и $T_{крит}$:

если $|T_{набл}| < T_{крит}$, то принять гипотезу H_0;

если $|T_{набл}| > T_{крит}$ то гипотеза H_0 отвергается

6. **Коэффициент детерминации**

$$D = r^2 \cdot 100\%$$

Вспомогательная таблица для расчета коэффициента корреляции

№	x_i	y_i	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(y_i - \overline{y})^2$
1							
2							
3							
4							
5							
…							
n							
Σ							

Алгоритм №2 вычисления коэффициента корреляции

1. Находим x и y
2. Заполняем таблицу
3. Находим $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$
4. Находим $\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$

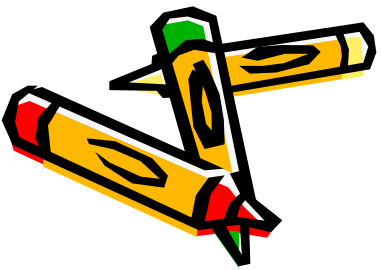
$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2$$

5. Находим выборочный корреляционный момент:

$$\overline{\mu}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\cdot(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - \overline{xy}$$

6. Находим выборочный коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$



7. Найти оценки параметров линейной регрессии по выборке.

8. Изобразить заданные точки и прямую регрессии.

Уравнение искомой прямой

$$y = ax + b$$

Вспомогательная таблица для расчета коэффициента корреляции

№	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1					
2					
3					
4					
5					
…					
n					
Σ