# Неопределённый интеграл. Элементы интегрального исчисления..

# НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

- Совокупность всех первообразных F(x)+c для функции f(x) называется неопределенным интегралом и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

- где f(x) – подинтегральная функция,
- f(x)dx – подинтегральное выражение (дифференциал),
- c – постоянная интегрирования.

# Первообразная и неопределенный интеграл

Если $F(x)$- некоторая первообразная функции $f(x)$, то пишут $\int f(x)dx = F(x) + C$ , хотя правильнее бы писать $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$.

Мы по устоявшейся традиции будем писать $\int f(x)dx = F(x) + C$ .

Тем самым один и тот же символ $\int f(x)dx$ будет обозначать как всю совокупность первообразных функции $f(x)$, так и любой элемент этого множества.

# 4. Свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C$.

При вычислении неопределенного интеграла будем сводить его к табличному.

# 5. Геометрическое истолкование неопределенного интеграла

Известно, что $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$.

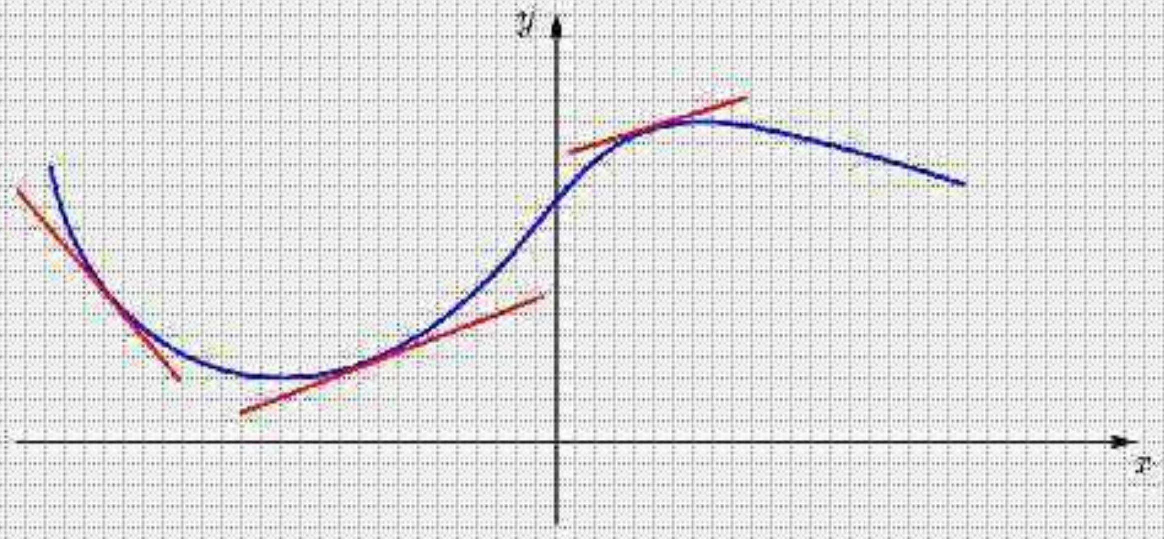
Соотношение $\int f(x)dx = F(x) + C$ можно геометрически истолковать как ***задание наклона касательной*** в точке с абсциссой $x$ к кривой $y = F(x)$, которая называется ***интегральной кривой***. Задавая $y' = (F(x))' = f(x)$ — наклон касательной, мы отыскиваем $y = F(x)$, т.е. ***восстанавливаем*** интегральную кривую, наклон касательной к которой задан.

Если построена одна такая кривая, то, перемещая её на любой отрезок параллельно оси $Ox$, мы снова получаем интегральные кривые, т.к. угол наклона касательной вдоль них будет изменяться по одному и тому же закону: $y' = f(x)$. При этом уравнение каждой кривой имеет вид $y = F(x) + \tilde{N}$.

# Вывод:

***Неопределенный интеграл геометрически представляет собой семейство интегральных кривых, наклон касательных к которым задан.***

***При этом через каждую точку плоскости проходит единственная интегральная кривая.***



# Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

ВГУЭС

# Таблица неопределенных интегралов

**11.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

**12.** $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

**13.** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$..

**14.** $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

**15.** $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$.

**16.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$.

**17.** $\int shxdx = chx + C$.

**18.** $\int chxdx = shx + C$.

**19.** $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

**20.** $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

ВГУЭС

# Свойства дифференциалов

При интегрировании удобно пользоваться свойствами:

1. $dx = \frac{1}{a} d(ax)$

2. $dx = \frac{1}{a} d(ax + b)$,

3. $x dx = \frac{1}{2} dx^2$,

4. $x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3$.

# Примеры

**Пример .** Вычислить $\int \cos 5x dx$ .

**Решение.** В таблице интегралов найдем

$\int \cos x dx = \sin x + C$ .

Преобразуем данный интеграл к табличному, воспользовавшись тем, что $d(ax) = a dx$ .

Тогда:

$$\int \cos 5x dx = \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) =$$

$$= \frac{1}{5} \sin 5x + C .$$

ВГУЭС

# Примеры

**Пример.** Вычислить $\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx$.

**Решение.** Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx=\int x^2dx+3\int x^3dx+\int xdx+\int dx=.$$

$$=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C$$

ВГУЭС

# Независимость от вида переменной

При вычислении интегралов удобно пользоваться следующими свойствами интегралов:

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ , то

$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$ .

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ , то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \ .$$

# Пример

Вычислим

$$\int (2+3x)^5 dx = \frac{1}{3\cdot 6}(2+3x)^6 + C.$$

*__Пример 6__*. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt[4]{x^5}\,dx$

*Решение.*

Вид подынтегральной функции можно менять с помощью тождественных преобразований !!!

$$\int \sqrt[4]{x^5}\,dx = \int x^{\frac{5}{4}}dx = \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1}+C = \frac{x^{\frac{9}{4}}}{9/4}+C = \frac{4x^{\frac{9}{4}}}{9}+C = \frac{4}{9}\sqrt[4]{x^9}+C$$

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}+C, \text{ если } r \neq -1$$

*Пример 7*. Найти неопределенный интеграл $\int\left(x+\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-1\right)dx$

*Решение*. Неопределенный интеграл от суммы или разности функций равен сумме или разности интегралов.

Но!!!

Неопределенный интеграл от произведения функций не равен произведению интегралов.

Поэтому все тождественные преобразования подынтегральной функции направлены на то, чтобы преобразовать произведение функций в суммы или разности функций. Для этого нужно просто раскрыть скобки.

$$\int\left(x+\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-1\right)dx=\int\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x}}-x+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\sqrt{x}\right)dx=$$

$$=\int\left(x^{1-\frac{1}{3}}-x+x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{2}{3}}-x+x^{\frac{1}{6}}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx=$$

*Пример 7. (продолжение)*

$$\int\left(x^{\frac{2}{3}}-x+x^{\frac{1}{6}}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx=$$

$$=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1}-\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=$$

$$=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{5/3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7/6}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}+C=$$

$$=\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}-\frac{x^2}{2}+\frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7}-\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

*<u>Пример 8</u>*. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x+\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}}dx$

*Решение*. Неопределенный интеграл от суммы или разности функций равен сумме или разности интегралов.

Но!!!

Неопределенный интеграл от отношения функций не равен отношению интегралов.

Поэтому все тождественные преобразования подынтегральной функции направлены на то, чтобы преобразовать отношение функций в суммы или разности функций. В данном интеграле для этого нужно просто поделить почленно числитель на знаменатель.

$$\int \frac{x+\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx =$$

$$=\int\left(x^{1-\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}+2x^{-\frac{1}{3}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{6}}+2x^{-\frac{1}{3}}\right)dx =$$

*Пример 8. (продолжение)*

$$=\int\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{6}}+2x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=$$

$$=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+\frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1}+2\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C=$$

$$=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{5/3}+\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7/3}+2\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2/3}+C=$$

$$=\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}+\frac{3x^{\frac{7}{6}}}{7}+3x^{\frac{2}{3}}+C$$

*Пример 9*. Найти неопределенный интеграл $\int\left(e^{x}+2^{x}\right)^{2} dx$

*Решение.* Неопределенный интеграл от суммы или разности функций равен сумме или разности интегралов.

Поэтому все тождественные преобразования данной подынтегральной функции направлены на то, чтобы преобразовать её в суммы или разности функций. Для этого нужно просто раскрыть квадрат суммы.

$$\int\left(e^{x}+2^{x}\right)^{2} dx= \int\left(\left(e^{x}\right)^{2}+2 e^{x} 2^{x}+\left(2^{x}\right)^{2}\right) dx=$$

$$=\int\left(e^{2x}+2(e2)^{x}+2^{2x}\right) dx= \int e^{2x} dx+2\int(2e)^{x} dx+\int 2^{2x} dx=$$

$$=\int\left(e^{2}\right)^{x} dx+\int 2(2e)^{x} dx+\int 4^{x} dx=$$

$$\int a^{x} dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$$

$$=\frac{\left(e^{2}\right)^{x}}{\ln\left(e^{2}\right)}+2\frac{(2e)^{x}}{\ln(2e)}+\frac{4^{x}}{\ln 4}+C=\frac{\left(e^{2}\right)^{x}}{2}+2\frac{(2e)^{x}}{\ln 2+1}+\frac{4^{x}}{2\ln 2}+C=$$

$$=\frac{e^{2x}}{2}+2\frac{(2e)^{x}}{\ln 2+1}+\frac{2^{2x}}{2\ln 2}+C$$

# Домашняя работа

**Найдите неопределённые интегралы**

Вычислить интеграл $\int \left(2x^4 + 3\sin x - 5e^x\right) dx$

---

Найти интеграл $\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)\, dx.$