Практическое занятие

Тема: Предел функции в точке

Задание 1. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\left(-x^3+9x^2+x-1\right)$

1) непосредственная подстановка:

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\left(-x^3+9x^2+x-1\right)$$

$$=\left(-\left(\sqrt{2}\right)^3+9\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}-1\right)$$

$$=17-\sqrt{2}$$

2) раскрытие неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$

Вычислить предел: а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\left(\frac{(-1)^3+1}{-1+1}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\left(x^2-x+1\right)=$$

$$=(-1)^2-(-1)+1=3$$

$$б)\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{8-14x+5x^2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{8-14x+5x^2}=\left(\frac{3\cdot 2^3-8\cdot 2+4}{8-14\cdot 2+5\cdot 2^2}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители, используя формулу:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 16$$

$$x_1 = 2/3, x_2 = 2$$

$$8 - 14x + 5x^2 = 0$$

$$D = 36$$

$$x_1 = 4/5, x_2 = 2$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 3(x - 2/3)(x - 2)$$

$$8 - 14x + 5x^2 = 5(x - 4/5)(x - 2)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{8-14x+5x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-2)}{5\left(x-\frac{4}{5}\right)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-2)}{(5x-4)}=$$

$$=\frac{3\cdot 2-2}{5\cdot 2-4}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

3) раскрытие непределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x+1}$

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x+1}=\left(\frac{(\infty)^3+1}{\infty+1}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

первый способ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=$$

$$=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{0+0}=\frac{1}{0}=\infty$$

второй способ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{1}=\frac{3\cdot\infty}{1}=\frac{\infty}{1}=\infty$$

Задание 2. Исходя из определения непрерывной функции, докажите непрерывность функции $y = 3x - 1$ в точке $x = -1$.

Решение.

Проверим выполнимость трех условий.

1. Функция определена в точке $x = -1$ и $y(-1) = -4$.
2. $\lim\limits_{x \to -1}(3x - 1) = \lim\limits_{x \to -1} 3x + \lim\limits_{x \to -1}(-1) = 3\lim\limits_{x \to -1} x + \lim\limits_{x \to -1}(-1) = 3 \cdot (-1) - 1 = -4$.
3. $\lim\limits_{x \to -1}(3x - 1) = y(-1) = -4$.

Все условия выполнены, следовательно, функция $y = 3x - 1$ непрерывна.

Задачи для самостоятельного

1. Вычислить предел функции	
1) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x + 1}{2x^3 - x^2 + x + 2}$	5) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{5x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 3x - 12}$
2) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 9x + 9}$	6) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 9x + 8}{x^2 - 4x + 3}$
3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 - 6x^2 + x - 1}{x^3 + 2x^2 - 9x + 9}$	7) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^3 - 6x^2 - 3x + 7}{2x^3 + 3x^2 + x - 8}$
4) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 6x + 8}$	8) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x^2 - 10x + 24}{36 - x^2}$

2. Исследовать функцию $y = f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x - 1}$ на непрерывность в точке x=1.