

Практическое занятие  
Тема: Предел функции в  
точке

Задание 1. Вычислить предел:  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (-x^3 + 9x^2 + x - 1)$

1) непосредственная подстановка:

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (-x^3 + 9x^2 + x - 1)$$

$$= \left( -(\sqrt{2})^3 + 9 \cdot (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} - 1 \right)$$

$$= 17 - \sqrt{2}$$

2) раскрытие неопределенности  
вида

$$\left(\frac{0}{0}\right)$$

Вычислить предел: а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \left( \frac{(-1)^3 + 1}{-1 + 1} \right) = \left( \frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) =$$

$$= (-1)^2 - (-1) + 1 = 3$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{8 - 14x + 5x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{8 - 14x + 5x^2} = \left( \frac{3 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2 + 4}{8 - 14 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2} \right) = \left( \frac{0}{0} \right)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители, используя формулу:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$8 - 14x + 5x^2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 16$$

$$D = 36$$

$$x_1 = 2/3, x_2 = 2$$

$$x_1 = 4/5, x_2 = 2$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 3(x - 2/3)(x - 2)$$

$$8 - 14x + 5x^2 = 5(x - 4/5)(x - 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{8 - 14x + 5x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 2)}{5\left(x - \frac{4}{5}\right)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x - 2)}{(5x - 4)} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2 - 2}{5 \cdot 2 - 4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

3) раскрытие неопределенности вида  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Вычислить предел:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

*Решение*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \left( \frac{(\infty)^3 + 1}{\infty + 1} \right) = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)$$

*первый способ:*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x + 1} &= \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \\ &= \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 + 0}{0 + 0} = \frac{1}{0} = \infty\end{aligned}$$



*второй способ:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{1} = \frac{3 \cdot \infty}{1} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

Задание 2. Исходя из определения непрерывной функции, докажите непрерывность функции  $y = 3x - 1$  в точке  $x = -1$ .

*Решение.*

Проверим выполнимость трех условий.

1. Функция определена в точке  $x = -1$  и  $y(-1) = -4$ .

$$2. \lim_{x \rightarrow -1} (3x - 1) = \lim_{x \rightarrow -1} 3x + \lim_{x \rightarrow -1} (-1) = 3 \lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} (-1) = 3 \cdot (-1) - 1 = -4.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -1} (3x - 1) = y(-1) = -4.$$

Все условия выполнены, следовательно, функция  $y = 3x - 1$  непрерывна.

# Задачи для самостоятельного

1. Вычислить предел функции

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{2x^3 - x^2 + x + 2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 9x + 9}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 1}{x^3 + 2x^2 - 9x + 9}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 6x + 8}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 3x - 12}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 9x + 8}{x^2 - 4x + 3}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 6x^2 - 3x + 7}{2x^3 + 3x^2 + x - 8}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 10x + 24}{36 - x^2}$$

2. Исследовать функцию  $y = f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$  на непрерывность в точке  $x=1$ .