Практическое занятие

Тема: Предел функции в точке

Задание 1. Вычислить предел: $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \left(-x^3 + 9x^2 + x - 1 \right)$

1) непосредственная подстановка:

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \left(-x^3 + 9x^2 + x - 1 \right)$$

$$= \left(-\left(\sqrt{2}\right)^3 + 9 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{2} - 1 \right)$$

$$= 17 - \sqrt{2}$$

2) раскрытие неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Вычислить предел: а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\left(\frac{(-1)^3+1}{-1+1}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=$$

$$=(-1)^2-(-1)+1=3$$

$$б)\ \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{8-14x+5x^2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{8-14x+5x^2}=\left(\frac{3\cdot 2^3-8\cdot 2+4}{8-14\cdot 2+5\cdot 2^2}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители, используя формулу:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 16$$

$$x_1 = 2/3, x_2 = 2$$

$$8 - 14x + 5x^2 = 0$$

$$D = 36$$

$$x_1 = 4/5, x_2 = 2$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 3(x - 2/3)(x - 2)$$

$$8 - 14x + 5x^2 = 5(x - 4/5)(x - 2)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{8-14x+5x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-2)}{5\left(x-\frac{4}{5}\right)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-2)}{(5x-4)}=$$

$$=\frac{3\cdot 2-2}{5\cdot 2-4}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

3) раскрытие непределенности вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x+1}$

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x+1}=\left(\frac{(\infty)^3+1}{\infty+1}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

первый способ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=$$

$$=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{0+0}=\frac{1}{0}=\infty$$

второй способ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{1}=\frac{3\cdot\infty}{1}=\frac{\infty}{1}=\infty$$

Задание 2. Исходя из определения непрерывной функции, докажите непрерывность функции $y = 3x - 1$ в точке $x = -1$.

Решение.

Проверим выполнимость трех условий.

1. Функция определена в точке $x = -1$ и $y(-1) = -4$.
2. $\lim\limits_{x \to -1}(3x - 1) = \lim\limits_{x \to -1} 3x + \lim\limits_{x \to -1}(-1) = 3\lim\limits_{x \to -1} x + \lim\limits_{x \to -1}(-1) = 3 \cdot (-1) - 1 = -4$.
3. $\lim\limits_{x \to -1}(3x - 1) = y(-1) = -4$.

Все условия выполнены, следовательно, функция $y = 3x - 1$ непрерывна.

Задачи для самостоятельного

1. Вычислить предел функции	
1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x+1}{2x^3-x^2+x+2}$	5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2-3x+1}{2x^2+3x-12}$
2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$	6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-9x+8}{x^2-4x+3}$
3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-6x^2+x-1}{x^3+2x^2-9x+9}$	7) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-6x^2-3x+7}{2x^3+3x^2+x-8}$
4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-6x+8}$	8) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-10x+24}{36-x^2}$
2. Исследовать функцию $y=f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$ на непрерывность в точке $x=1$.	