Логарифмические уравнения

$f(x) = g(x)$
$f(x) > 0$
$g(x) > 0$

Уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют логарифмическими уравнениями

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$\left\{ \right.$$

Методы решения логарифмических уравнений:

1. Функционально-графический метод.
2. Метод потенцирования.
3. Метод введения новой переменной.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 1

$$log_3\left(x^2-3x-5\right)=log_3\left(7-2x\right)$$

$$\begin{cases} x^2-3x-5=7-2x \\ 7-2x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x-12=0 \\ x<3,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=4 \end{array}\right. \\ x<3,5 \end{cases}$$

$$x=-3$$

Ответ: -3.

Пример 2

$$\log_2(x+4)+\log_2(2x+3)=\log_2(1-2x)$$

$$\log_2(x+4)(2x+3)=\log_2(1-2x)$$

$$\begin{cases} (x+4)(2x+3)=(1-2x) \\ x+4>0 \\ 2x+3>0 \\ 1-2x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+13x+11=0 \\ x>-4 \\ x>-1,5 \\ x<0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=-5,5 \end{array}\right. \\ -1,5<x<0,5 \end{cases}$$

Ответ : -1.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 3

$$\log_{x+4}\left(x^2-1\right)=\log_{x+4}\left(5-x\right)$$

$$x^2-1=5-x$$

$ОДЗ:$

$$\begin{cases} x^2-1>0, \\ 5-x>0, \\ x+4>0, \\ x+4\neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+x-6=0, \\ \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<-1; \end{array}\right. \\ -4<x<5, \\ x\neq -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=2 \end{array}\right. \\ x\neq -3 \\ \left[\begin{array}{l} -4<x<-1, \\ 1<x<5; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Ответ: 2.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 4

$$lg^2 x + lg\, x + 1 = \frac{7}{lg\,\frac{x}{10}}$$

$$\lg\frac{x}{10} = \lg x - \lg 10 = \lg x - 1,$$

$$ОДЗ: x > 0,\ \ x \neq 10$$

$$\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg x - 1}$$

Пусть $\lg x = t$, *где* $t \neq 1$, *тогда*

$$t^2 + t + 1 = \frac{7}{t-1}$$

$$(t-1)(t^2 + t + 1) = 7$$

$$t^3 - 1 = 7$$

$$t^3 = 8$$

$$t = 2$$

Вернемся к исходной переменной

$$lg\, x = 2$$

$$x = 10^2$$

$$x = 100$$

Ответ: 100.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 5

$$\log_{0,1x} x + \log_{0,2x} x = 0$$

$$ОДЗ: \begin{cases} 0,1x \neq 1, \\ 0,2x \neq 1, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 10, \\ x \neq 5, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\log_{0,1x} x = \frac{\lg x}{\lg 0,1x} = \frac{\lg x}{\lg 0,1 + \lg x} = \frac{\lg x}{-1 + \lg x}$$

$$\log_{0,2x} x = \frac{\lg x}{\lg 0,2x} = \frac{\lg x}{\lg 0,2 + \lg x} = \frac{\lg x}{\lg \frac{1}{5} + \lg x} = \frac{\lg x}{-\lg 5 + \lg x}$$

$$\frac{\lg x}{-1 + \lg x} + \frac{\lg x}{-\lg 5 + \lg x} = 0$$

Пусть $\lg x = t$, *где* $t \neq 1, t \neq \lg 5$ *тогда*

$$\frac{t}{t-1} + \frac{t}{t - \lg 5} = 0$$

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 5

$$\frac{t}{t-1}+\frac{t}{t-\lg 5}=0 \quad \Big| \times (t-1)(t-\lg 5)$$

$$t(t-\lg 5)+t(t-1)=0$$

$$t(t-\lg 5+t-1)=0$$

$$t(2t-\lg 5-1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\dfrac{\lg 5+1}{2}=\dfrac{\lg 5+\lg 10}{2}=\dfrac{\lg 50}{2}=\lg\sqrt{50} \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$\lg x=0$ *или* $\lg x=\lg\sqrt{50}$

$x=1$ $\qquad$ $x=5\sqrt{2}$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ

Ответ : $1;\ 5\sqrt{2}.$

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 6

$$x^{1-\log_5 x} = 0,04$$

Т.к. обе части равенства принимают только положительные значения, прологарифмируем их по основанию 5:

$$\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 0,04$$

$$\log_5 0,04 = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$$

$$(1-\log_5 x)\log_5 x = \log_5 0,04$$

$$ОДЗ: \ x > 0$$

$$\log_5 x - \log_5^2 x = -2$$

пусть $\log_5 x = t$, *тогда*

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = -1 \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\left[\begin{array}{l} \log_5 x = 2, \\ \log_5 x = -1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5^2, \\ x = 5^{-1}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 25, \\ x = 0,2. \end{array}\right.$$

Ответ: 0,2; 25.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 7

$$\log_x\left(3x^{\lg x}+4\right)=2\lg x$$

ОДЗ : $\begin{cases} x \neq 1, \\ x > 0; \end{cases}$

По определени ю логарифма

$$x^{2\lg x}=3x^{\lg x}+4$$

Пусть $x^{\lg x}=t$, где $t>0$ тогда

$$t^2-3t-4=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-1 - \text{не удовлетвор яет} \\ t=4 \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$x^{\lg x}=4$$

Прологариф мируем обе части по основанию 10 :

$$\lg\left(x^{\lg x}\right)=\lg 4$$

$$\lg x\lg x=\lg 4$$

$$\lg^2 x=\lg 4$$

$$\lg x=\pm\sqrt{\lg 4}$$

$$x=10^{\pm\sqrt{\lg 4}}$$

Ответ : $10^{\pm\sqrt{\lg 4}}$.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 8

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} lg(2x-y)+lg\,10 = lg(y+2x)+lg\,6, \\ log_3(x-y)^2 = log_3(y+2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} lg((2x-y)10) = lg((y+2x)6) \\ (x-y)^2 = y+2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x-y)10 = (y+2x)6, \\ (x-y)^2 = y+2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x-10y = 6y+12x, \\ (x-y)^2 = y+2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y, \\ (2y-y)^2 = y+2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} lg(2x-y)+1 = lg(y+2x)+lg\,6, \\ 2\,log_3(x-y) = log_3(y+2) \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-y>0, \\ y+2x>0 \\ x-y>0, \\ y+2>0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2y, \\ y^2-y-2=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y, \\ \left[\begin{array}{l} y_1 = -1, \\ y_2 = 2; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y_1 = -1, \\ x_1 = -2; \end{cases} \text{ – не удовлетворяет ОДЗ} \\ \begin{cases} y_2 = 2, \\ x_2 = 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(4;2)$

Логарифмические неравенства

Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, *где* $a \neq 1$, $a > 0$ *называют логарифмическими неравенствами*

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$a > 1$

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$0 < a < 1$

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

или

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0. \end{cases}$$

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 1

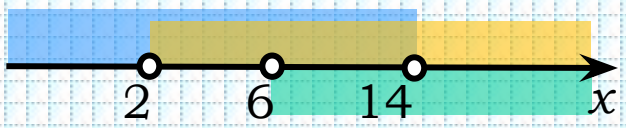
$$\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$$

$$т.к.\ \ a = 3 > 1,\ то$$

$$\begin{cases} 2x-4 > 14-x, \\ 2x-4 > 0, \\ 14-x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > 18, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 6, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$



Ответ: (6; 14).

Пример 2

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \le -4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \le \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \le \log_{\frac{1}{2}}16$$

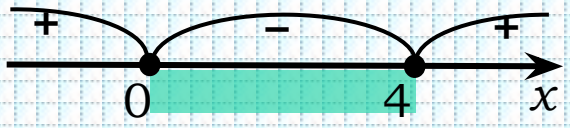
$$т.к.\ \ a = \frac{1}{2} < 1,\ то$$

$$\begin{cases} 16+4x-x^2 \ge 16, \\ 16+4x-x^2 > 0; \end{cases} - лишнее\ \ условие$$

$$4x - x^2 \ge 0$$

$$x^2 - 4x \le 0$$

$$x(x-4) \le 0$$



Ответ: [0; 4].

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 3

$$\lg x + \lg(45 - x) < 2 + \lg 2$$

$$\lg(x(45 - x)) < \lg 100 + \lg 2$$

$$\lg(45x - x^2) < \lg 200$$

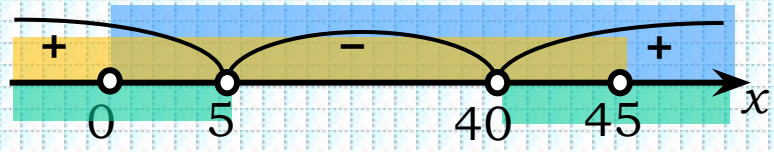
т.к. $a = 10 > 1$, *то*

$$\begin{cases} 45x - x^2 < 200, \\ 45 - x > 0, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 45x + 200 > 0, \\ x < 45, \\ x > 0; \end{cases}$$

н.ф.: $x^2 - 45x + 200 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 5, \\ x_2 = 40; \end{array}\right.$$



Ответ: $(0; 5) \cup (40; 45)$

Пример 4

$$\log_2^2 x^2 - 5\log_2 x + 1 \le 0 \quad ОДЗ: \ x > 0$$

$$(2\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 1 \le 0$$

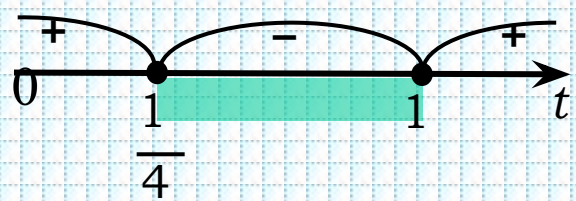
$$4\log_2^2 x - 5\log_2 x + 1 \le 0$$

пусть $\log_2 x = t$, *тогда*

$$4t^2 - 5t + 1 \le 0$$

н.ф.: $4t^2 - 5t + 1 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{1}{4}, \\ t_2 = 1; \end{array}\right.$$



$$\frac{1}{4} \le t \le 1$$

Вернемся к исходной переменной

$$\frac{1}{4} \le \log_2 x \le 1, \ т.к.\ a = 2, \ то$$

$$\sqrt[4]{2} \le x \le 2$$

Ответ: $[\sqrt[4]{2}; 2]$

Логарифмические неравенства. Примеры

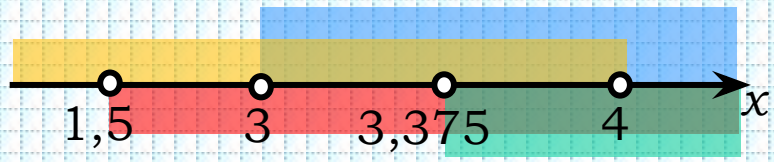
Пример 5

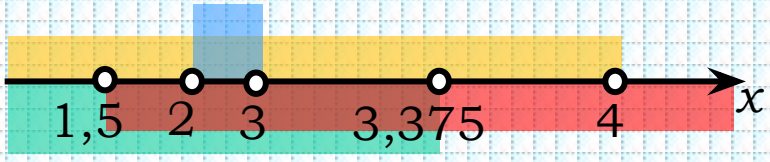
$$\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x)$$

Возможны два случая:

$$1)\ \begin{cases} x-2>1, \\ 2x-3>24-6x, \\ 2x-3>0, \\ 24-6x>0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 0<x-2<1, \\ 2x-3<24-6x, \\ 2x-3>0, \\ 24-6x>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>3, \\ x>\dfrac{27}{8}, \\ x>1{,}5, \\ x<4; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2<x<3, \\ x<\dfrac{27}{8}, \\ x>1{,}5, \\ x<4; \end{cases}$$





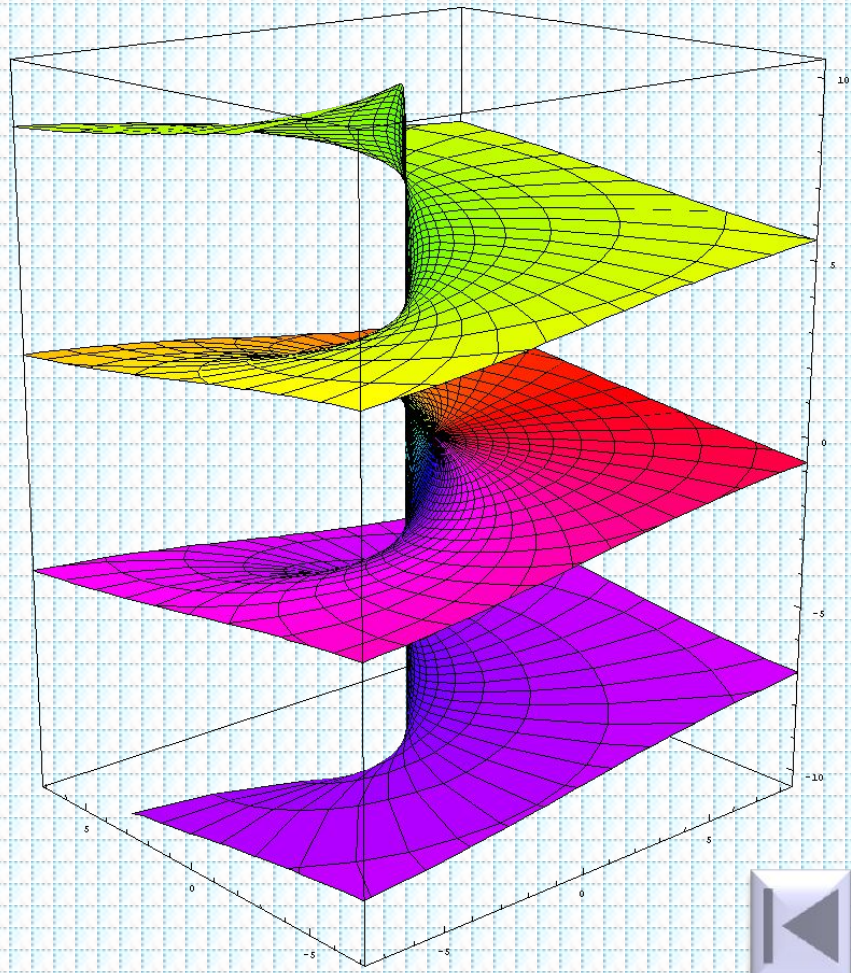
$x \in (3{,}375;\ 4)$

$x \in (2;\ 3)$

Ответ: $(2;\ 3) \cup (3{,}375;\ 4)$

Используемые материалы

1. Алгебра и начала анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2020
2. http://ru.wikipedia.org/wiki - *логарифмические линейки*
3. http://ru.wikipedia.org/wiki - *логарифм*



Комплексный логарифм
(мнимая часть)

Спасибо за внимание!