

$f(x) = g(x)$ **Логарифмические уравнения**

$f(x) > 0$

$g(x) > 0$

уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a \neq 1, a > 0$
называют **логарифмическими уравнениями**

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$



Методы решения логарифмических уравнений:

1. Функционально-графический метод.
2. Метод потенцирования.
3. Метод введения новой переменной.



Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 1

$$\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x)$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x \\ 7 - 2x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 = 0 \\ x < 3,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 4 \\ x < 3,5 \end{cases}$$

$$x = -3$$

Ответ: -3.

Пример 2

$$\log_2(x+4) + \log_2(2x+3) = \log_2(1-2x)$$

$$\log_2(x+4)(2x+3) = \log_2(1-2x)$$

$$(x+4)(2x+3) = (1-2x)$$

$$\begin{cases} x+4 > 0 \\ 2x+3 > 0 \\ 1-2x > 0 \end{cases}$$

$$2x^2 + 13x + 11 = 0$$

$$\begin{cases} x > -4 \\ x > -1,5 \\ x < 0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -5,5 \\ -1,5 < x < 0,5 \end{cases}$$

Ответ : -1.



Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 3

$$\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$$

$$x^2 - 1 = 5 - x$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ 5 - x > 0, \\ x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ x > 1, \\ x < -1; \\ -4 < x < 5, \\ x \neq -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$
$$\begin{cases} -4 < x < -1, \\ 1 < x < 5; \end{cases}$$

Ответ: 2.



Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 4

$$\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg \frac{x}{10}}$$

$$\lg \frac{x}{10} = \lg x - \lg 10 = \lg x - 1,$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0, x \neq 10$$

$$\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg x - 1}$$

Пусть $\lg x = t$, где $t \neq 1$, тогда

$$t^2 + t + 1 = \frac{7}{t - 1}$$

Вернемся к исходной переменной

$$(t - 1)(t^2 + t + 1) = 7$$

$$\lg x = 2$$

$$t^3 - 1 = 7$$

$$x = 10^2$$

$$t^3 = 8$$

$$x = 100$$

$$t = 2$$

Ответ: 100.



Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 5

$$\log_{0,1x} x + \log_{0,2x} x = 0$$

$$\text{ОДЗ : } \begin{cases} 0,1x \neq 1, \\ 0,2x \neq 1, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 10, \\ x \neq 5, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\log_{0,1x} x = \frac{\lg x}{\lg 0,1x} = \frac{\lg x}{\lg 0,1 + \lg x} = \frac{\lg x}{-1 + \lg x}$$

$$\log_{0,2x} x = \frac{\lg x}{\lg 0,2x} = \frac{\lg x}{\lg 0,2 + \lg x} = \frac{\lg x}{\lg \frac{1}{5} + \lg x} = \frac{\lg x}{-\lg 5 + \lg x}$$

$$\frac{\lg x}{-1 + \lg x} + \frac{\lg x}{-\lg 5 + \lg x} = 0$$

Пусть $\lg x = t$, где $t \neq 1$, $t \neq \lg 5$ тогда

$$\frac{t}{t-1} + \frac{t}{t-\lg 5} = 0$$



Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 5

$$\frac{t}{t-1} + \frac{t}{t-\lg 5} = 0 \quad | \times (t-1)(t-\lg 5)$$

$$t(t-\lg 5) + t(t-1) = 0$$

$$t(t-\lg 5 + t - 1) = 0$$

$$t(2t - \lg 5 - 1) = 0$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{\lg 5 + 1}{2} = \frac{\lg 5 + \lg 10}{2} = \frac{\lg 50}{2} = \lg \sqrt{50} \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной

$$\lg x = 0 \quad \text{или} \quad \lg x = \lg \sqrt{50}$$

$$x = 1 \quad \quad \quad x = 5\sqrt{2}$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ

Ответ : 1; $5\sqrt{2}$.



Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 6

$$x^{1-\log_5 x} = 0,04$$

Т.к. обе части равенства принимают только положительные значения, прологарифмируем их по основанию 5:

$$\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 0,04$$

$$(1 - \log_5 x) \log_5 x = \log_5 0,04$$

$$\log_5 x - \log_5^2 x = -2$$

пусть $\log_5 x = t$, тогда

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной

$$\begin{cases} \log_5 x = 2, \\ \log_5 x = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5^2, \\ x = 5^{-1}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25, \\ x = 0,2. \end{cases}$$

Ответ: 0,2; 25.



Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 7

$$\log_x (3x^{\lg x} + 4) = 2 \lg x$$

$$\text{ОДЗ : } \begin{cases} x \neq 1, \\ x > 0; \end{cases}$$

По определению логарифма

$$x^{2 \lg x} = 3x^{\lg x} + 4$$

Пусть $x^{\lg x} = t$, где $t > 0$ тогда

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$\begin{cases} t = -1 - \text{не удовлетворяет} \\ t = 4 \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной

$$x^{\lg x} = 4$$

Прологарифмируем обе части по основанию 10 :

$$\lg (x^{\lg x}) = \lg 4$$

$$\lg x \lg x = \lg 4$$

$$\lg^2 x = \lg 4$$

$$\lg x = \pm \sqrt{\lg 4}$$

$$x = 10^{\pm \sqrt{\lg 4}}$$

Ответ : $10^{\pm \sqrt{\lg 4}}$.



Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 8

Решите систему уравнений :

$$\begin{cases} \lg(2x - y) + 1 = \lg(y + 2x) + \lg 6, \\ 2 \log_3(x - y) = \log_3(y + 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg(2x - y) + \lg 10 = \lg(y + 2x) + \lg 6, \\ \log_3(x - y)^2 = \log_3(y + 2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg((2x - y)10) = \lg((y + 2x)6) \\ (x - y)^2 = y + 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x - y)10 = (y + 2x)6, \\ (x - y)^2 = y + 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x - 10y = 6y + 12x, \\ (x - y)^2 = y + 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y, \\ (2y - y)^2 = y + 2; \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ : } \begin{cases} 2x - y > 0, \\ y + 2x > 0 \\ x - y > 0, \\ y + 2 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y, \\ y^2 - y - 2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y, \\ \begin{cases} y_1 = -1, \\ y_2 = 2; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} y_1 = -1, \\ x_1 = -2; \end{cases} \end{cases} \quad \text{— не удовлетворяет ОДЗ}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} y_2 = 2, \\ x_2 = 4. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ : (4; 2)



Логарифмические неравенства

Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют логарифмическими неравенствами

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$a > 1$$

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$0 < a < 1$$

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

или

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0. \end{cases}$$

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 1

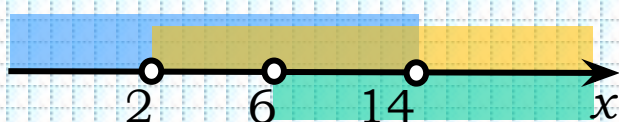
$$\log_3(2x - 4) > \log_3(14 - x)$$

т.к. $a = 3 > 1$, то

$$\begin{cases} 2x - 4 > 14 - x, \\ 2x - 4 > 0, \\ 14 - x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > 18, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 6, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$



Ответ: (6; 14).

Пример 2

$$\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq -4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq \log_{\frac{1}{2}} 16$$

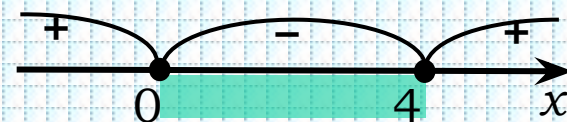
т.к. $a = \frac{1}{2} < 1$, то

$$\begin{cases} 16 + 4x - x^2 \geq 16, \\ 16 + 4x - x^2 > 0; \text{ - лишнее условие} \end{cases}$$

$$4x - x^2 \geq 0$$

$$x^2 - 4x \leq 0$$

$$x(x - 4) \leq 0$$



Ответ: [0; 4].

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 3

$$\lg x + \lg(45 - x) < 2 + \lg 2$$

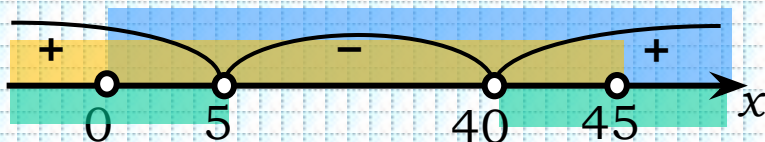
$$\lg(x(45 - x)) < \lg 100 + \lg 2$$

$$\lg(45x - x^2) < \lg 200$$

т.к. $a = 10 > 1$, то

$$\begin{cases} 45x - x^2 < 200, \\ 45 - x > 0, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 45x + 200 > 0, \\ x < 45, \\ x > 0; \end{cases} \quad \text{н.ф.} \cdot : x^2 - 45x + 200 = 0$$



Ответ: $(0; 5) \cup (40; 45)$

Пример 4

$$\log_2^2 x^2 - 5 \log_2 x + 1 \leq 0 \quad \text{ОДЗ} : x > 0$$

$$(2 \log_2 x)^2 - 5 \log_2 x + 1 \leq 0$$

$$4 \log_2^2 x - 5 \log_2 x + 1 \leq 0$$

пусть $\log_2 x = t$, тогда

$$4t^2 - 5t + 1 \leq 0$$

$$\text{н.ф.} \cdot : 4t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{4}, \\ t_2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}, \\ x_2 = 40, \end{cases} \quad \frac{1}{4} \leq t \leq 1$$

Вернемся к исходной переменной

$$\frac{1}{4} \leq \log_2 x \leq 1, \text{ т.к. } a = 2, \text{ то}$$

$$\sqrt[4]{2} \leq x \leq 2$$

Ответ : $[\sqrt[4]{2}; 2]$

Логарифмические неравенства. Примеры

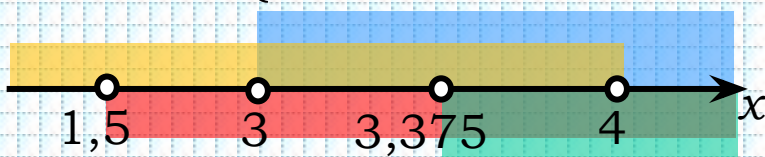
Пример 5

$$\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x)$$

Возможны два случая :

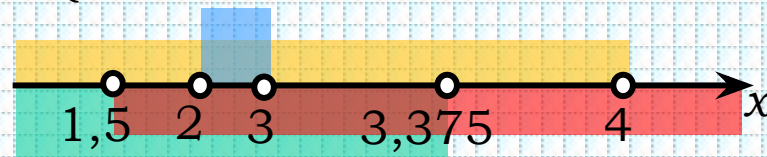
$$1) \begin{cases} x - 2 > 1, \\ 2x - 3 > 24 - 6x, \\ 2x - 3 > 0, \\ 24 - 6x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3, & \text{blue square} \\ x > \frac{27}{8}, & \text{green square} \\ x > 1,5, & \text{red square} \\ x < 4; & \text{yellow square} \end{cases}$$



$$2) \begin{cases} 0 < x - 2 < 1, \\ 2x - 3 < 24 - 6x, \\ 2x - 3 > 0, \\ 24 - 6x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 < x < 3, & \text{blue square} \\ x < \frac{27}{8}, & \text{green square} \\ x > 1,5, & \text{red square} \\ x < 4; & \text{yellow square} \end{cases}$$



$x \in (3,375;$
4)

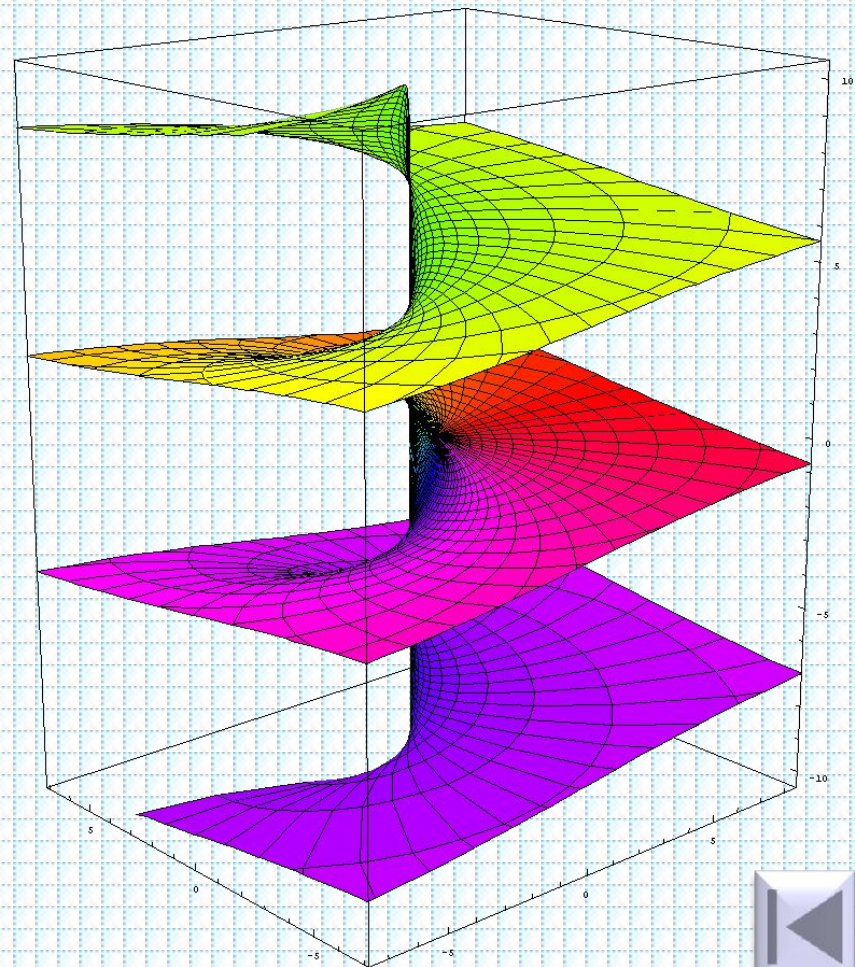
Ответ: $(2; 3) \cup (3,375; 4)$

$x \in (2;$
3)

Используемые материалы

1. Алгебра и начала анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2020
2. <http://ru.wikipedia.org/wiki> - логарифмические линейки
3. <http://ru.wikipedia.org/wiki> - логарифм

Комплексный логарифм
(мнимая часть)



Спасибо за внимание!