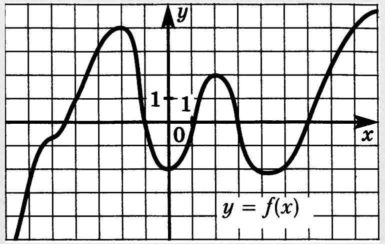
Применение производной к исследованию функций

Признак возрастания (убывания) функции



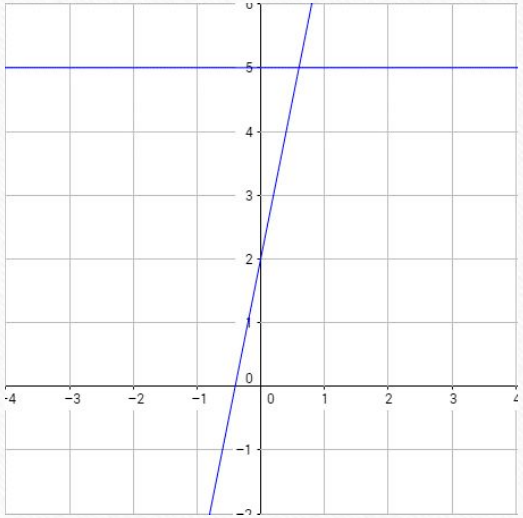
Признак возрастания (убывания) функции

- Постройте графики функций:

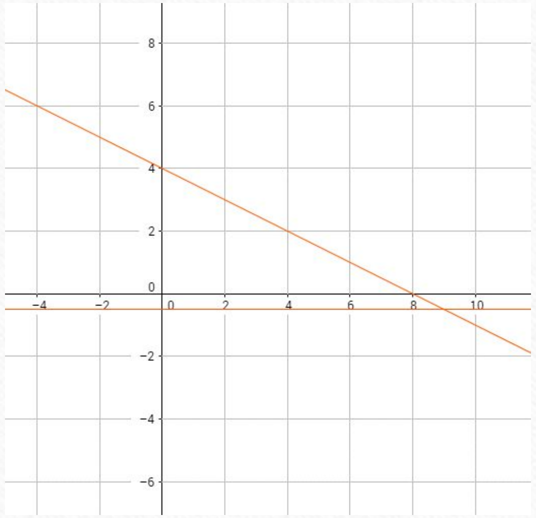
а) $y = 5x + 2$ б) $y = -\frac{1}{2}x + 4$ в) $y = x^2 - 2$ г) $y = x^3$

- Постройте графики производных данных функций (в тех же системах координат)
- Проанализируйте построенные графики. Сравните их расположения относительно оси Ox. На каких промежутках графики возрастают/убывают? Сделайте вывод о взаимосвязи возрастания/убывания функций и графиков их производных.

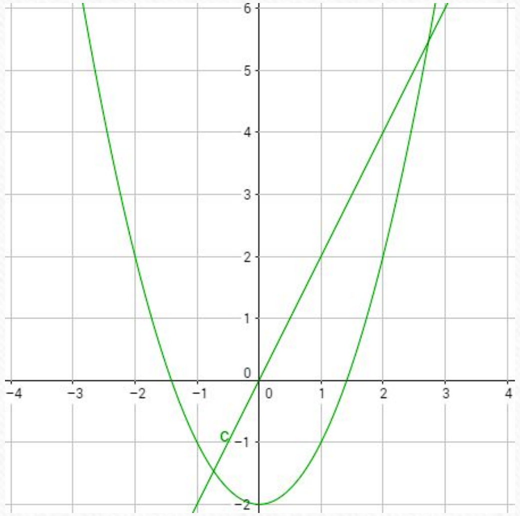
Признак возрастания (убывания) функции



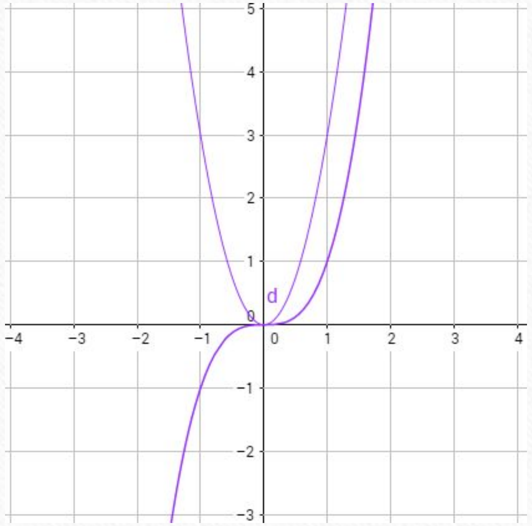
а) $y = 5x + 2$
$y' = 5$



б) $y = -\frac{1}{2}x + 4$
$y' = -\frac{1}{2}$



в) $y = x^2 - 2$
$y' = 2x$



г) $y = x^3$
$y' = 3x^2$

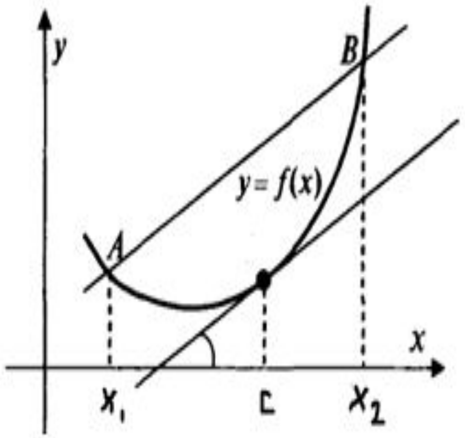
Признак возрастания (убывания) функции

Достаточный признак возрастания функции. *Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала I, то функция f возрастает на I.*

Достаточный признак убывания функции. *Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала I, то функция f убывает на I.*

Признак возрастания (убывания) функции

Доказательство (на основании формулы Лагранжа)



Возьмем два любых числа x_1 и x_2 из интервала. Пусть $x_1 < x_2$. По формуле Лагранжа существует число $c \in (x_1;\ x_2)$, такое, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c). \qquad (1)$$

Число c принадлежит интервалу I, так как точки x_1 и x_2 принадлежат I. Если $f'(x) > 0$ для $x \in I$, то $f'(c) > 0$, и поэтому $f(x_1) < f(x_2)$ — это следует из формулы (1), так как $x_2 - x_1 > 0$. Этим доказано возрастание функции f на I. Если же $f'(x) < 0$ для $x \in I$, то $f'(c) < 0$, и потому $f(x_1) > f(x_2)$ — следует из формулы (1), так как $x_2 - x_1 > 0$. Доказано убывание функции f на I.

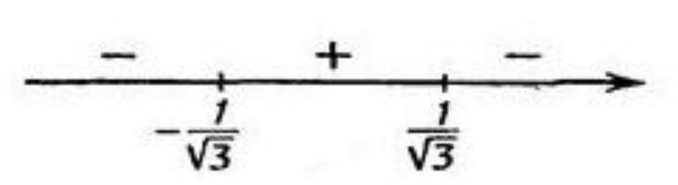
Признак возрастания (убывания) функции

∇ Наглядный смысл признаков ясен из физических рассуждений (рассмотрим для определенности признак возрастания).

Пусть движущаяся по оси ординат точка в момент времени t имеет ординату $y=f(t)$. Тогда скорость этой точки в момент времени t равна $f'(t)$ (см. п. 21). Если $f'(t)>0$ в каждый момент времени из промежутка I, то точка движется в положительном направлении оси ординат, т. е. если $t_1<t_2$, то $f(t_1)<f(t_2)$. Это означает, что функция f возрастает на промежутке I. ▲

Признак возрастания (убывания) функции

- ПРИМЕР. Найдем промежутки возрастания/убывания и построим график функции $f(x) = x - x^3$.
D(y)=(-∞;+∞), $f'(x) = 1 - 3x^2$
Решим неравенство $1 - 3x^2 > 0$.
Получаем, что $f'(x) > 0$ на интервале
$(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}})$. Значит, на этом интервале *f* возрастает.
Аналогично $f'(x) < 0$ на интервалах (-∞; $-\frac{1}{\sqrt{3}}$) и ($\frac{1}{\sqrt{3}}$; +∞), поэтому на этих интервалах *f* убывает.



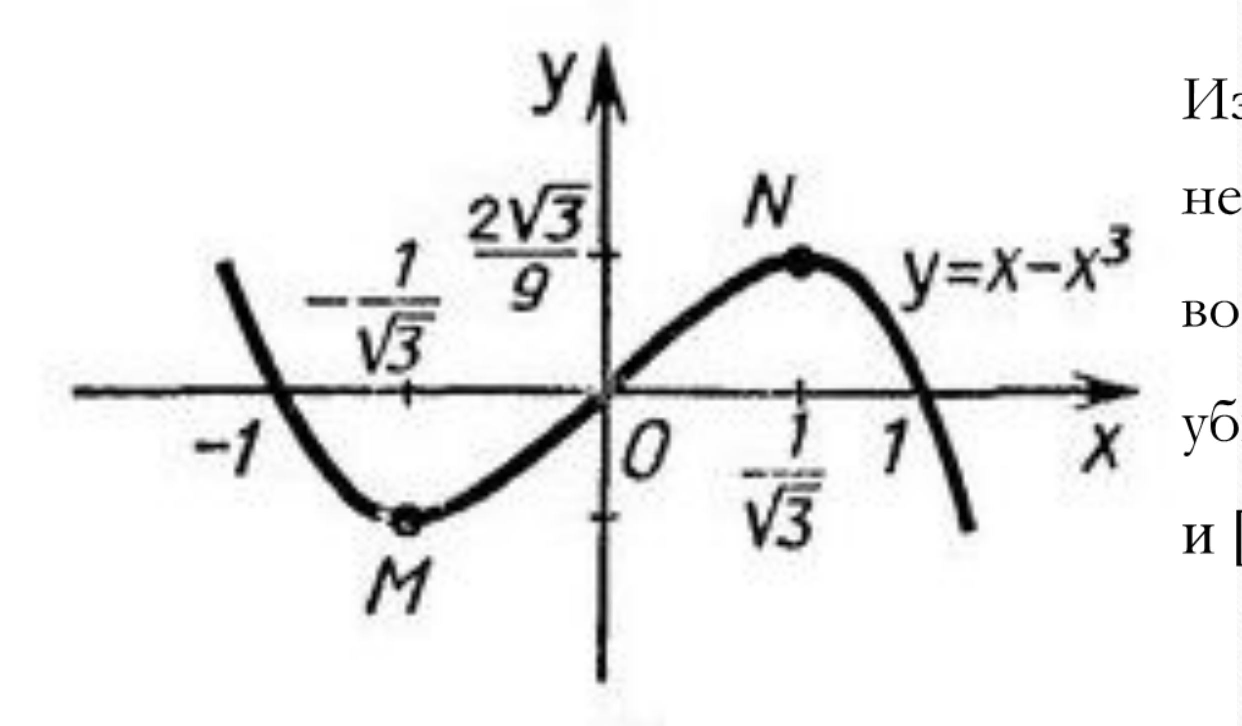
Признак возрастания (убывания) функции

- Вычислим значения f в точках $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=-\frac{2}{3\sqrt{3}}; \qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Отметим данные точки на координатной плоскости и начертим график, проходящий через данные точки с полученными условиями возрастания и убывания.

Признак возрастания (убывания) функции



Из рисунка видно, что функция *f*, непрерывная в точках $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{\sqrt{3}}$, возрастает на отрезке $[-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}]$ и убывает на промежутках (-∞; $-\frac{1}{\sqrt{3}}$] и [$\frac{1}{\sqrt{3}}$; +∞).

Признак возрастания (убывания) функции

- ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если функция *f* непрерывна в каком-либо из концов промежутка возрастания/убывания, то эта точка тоже входит в промежуток возрастная/убывания.
- ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для решения неравенств $f'^{(x)} > 0$ и $f'^{(x)} < 0$ удобно пользоваться методом интервалов (теоремой Дарбу): точки, в которых производная равна 0 или не существует, разбивают область определения функции *f* на промежутки, в каждом из которых *f'* сохраняет постоянный знак. Знак можно определить, вычислив значение *f'* в какой-нибудь точке промежутка.