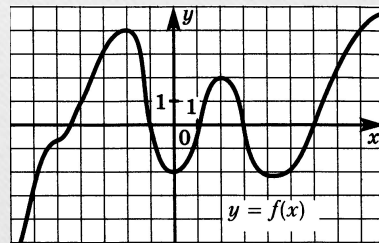


# Применение производной к исследованию функций

---

Признак возрастания (убывания) функции



# Признак возрастания (убывания) функции

---

- Постройте графики функций:

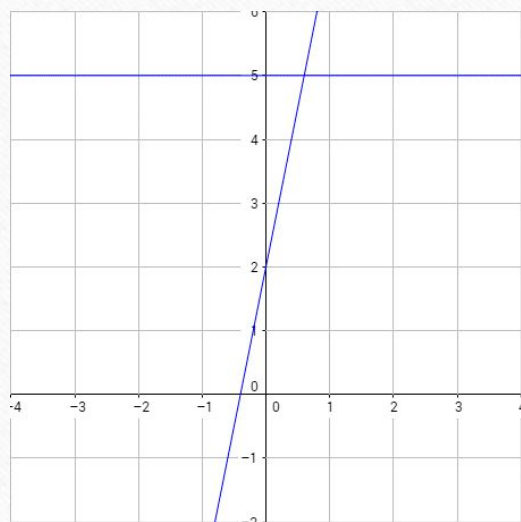
а)  $y = 5x + 2$       б)  $y = -\frac{1}{2}x + 4$       в)  $y = x^2 - 2$       г)  $y = x^3$

- Постройте графики производных данных функций (в тех же системах координат)
- Проанализируйте построенные графики. Сравните их расположения относительно оси  $Ox$ . На каких промежутках графики возрастают/убывают? Сделайте вывод о взаимосвязи возрастания/убывания функций и графиков их производных.

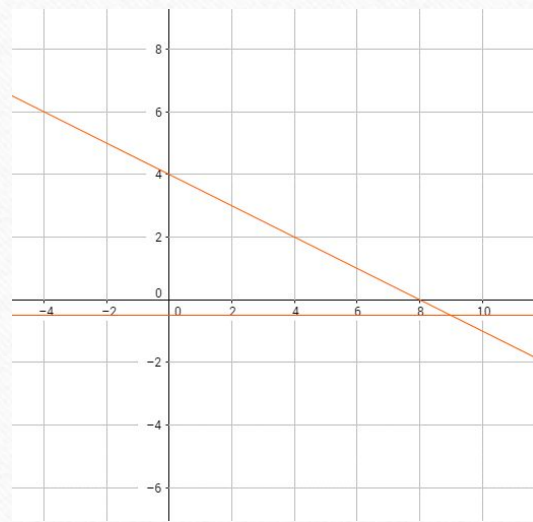


# Признак возрастания (убывания) функции

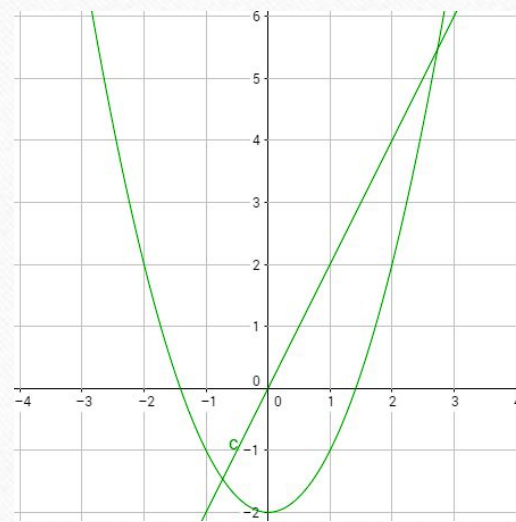
---



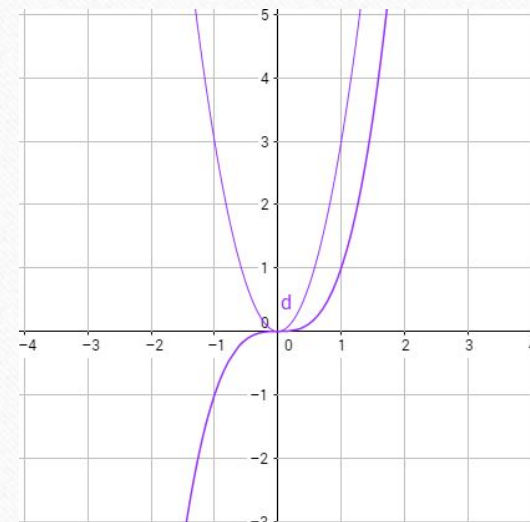
a)  $y = 5x + 2$   
 $y' = 5$



б)  $y = -\frac{1}{2}x + 4$   
 $y' = -\frac{1}{2}$



в)  $y = x^2 - 2$   
 $y' = 2x$



г)  $y = x^3$   
 $y' = 3x^2$

# Признак возрастания (убывания) функции

---

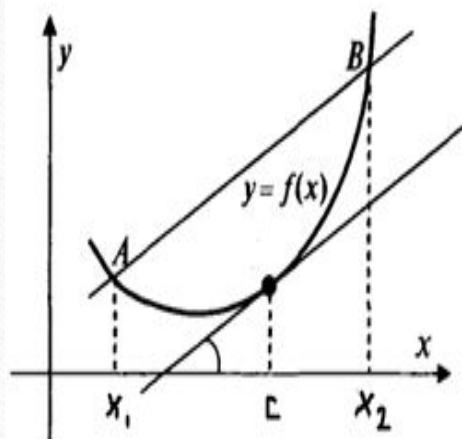
Достаточный признак возрастания функции. Если  $f'(x) > 0$  в каждой точке интервала  $I$ , то функция  $f$  возрастает на  $I$ .

Достаточный признак убывания функции. Если  $f'(x) < 0$  в каждой точке интервала  $I$ , то функция  $f$  убывает на  $I$ .



# Признак возрастания (убывания) функции

Доказательство (на основании формулы Лагранжа)



Возьмем два любых числа  $x_1$  и  $x_2$  из интервала. Пусть  $x_1 < x_2$ . По формуле Лагранжа существует число  $c \in (x_1; x_2)$ , такое, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c). \quad (1)$$

Число  $c$  принадлежит интервалу  $I$ , так как точки  $x_1$  и  $x_2$  принадлежат  $I$ . Если  $f'(x) > 0$  для  $x \in I$ , то  $f'(c) > 0$ , и поэтому  $f(x_1) < f(x_2)$  — это следует из формулы (1), так как  $x_2 - x_1 > 0$ . Этим доказано возрастание функции  $f$  на  $I$ . Если же  $f'(x) < 0$  для  $x \in I$ , то  $f'(c) < 0$ , и потому  $f(x_1) > f(x_2)$  — следует из формулы (1), так как  $x_2 - x_1 > 0$ . Доказано убывание функции  $f$  на  $I$ .

# Признак возрастания (убывания) функции

---

▽ Наглядный смысл признаков ясен из физических рассуждений (рассмотрим для определенности признак возрастания).

Пусть движущаяся по оси ординат точка в момент времени  $t$  имеет ординату  $y = f(t)$ . Тогда скорость этой точки в момент времени  $t$  равна  $f'(t)$  (см. п. 21). Если  $f'(t) > 0$  в каждый момент времени из промежутка  $I$ , то точка движется в положительном направлении оси ординат, т. е. если  $t_1 < t_2$ , то  $f(t_1) < f(t_2)$ . Это означает, что функция  $f$  возрастает на промежутке  $I$ . ▲



# Признак возрастания (убывания) функции

ПРИМЕР. Найдем промежутки возрастания/убывания и построим график функции  $f(x) = x - x^3$ .

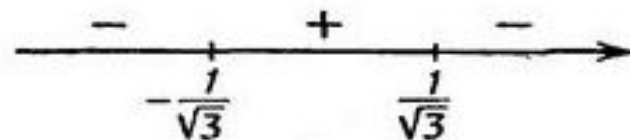
$$D(y) = (-\infty; +\infty), f'(x) = 1 - 3x^2$$

Решим неравенство  $1 - 3x^2 > 0$ .

Получаем, что  $f'(x) > 0$  на интервале

$(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$ . Значит, на этом интервале  $f$  возрастает.

Аналогично  $f'(x) < 0$  на интервалах  $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}})$  и  $(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$ , поэтому на этих интервалах  $f$  убывает.



# Признак возрастания (убывания) функции

---

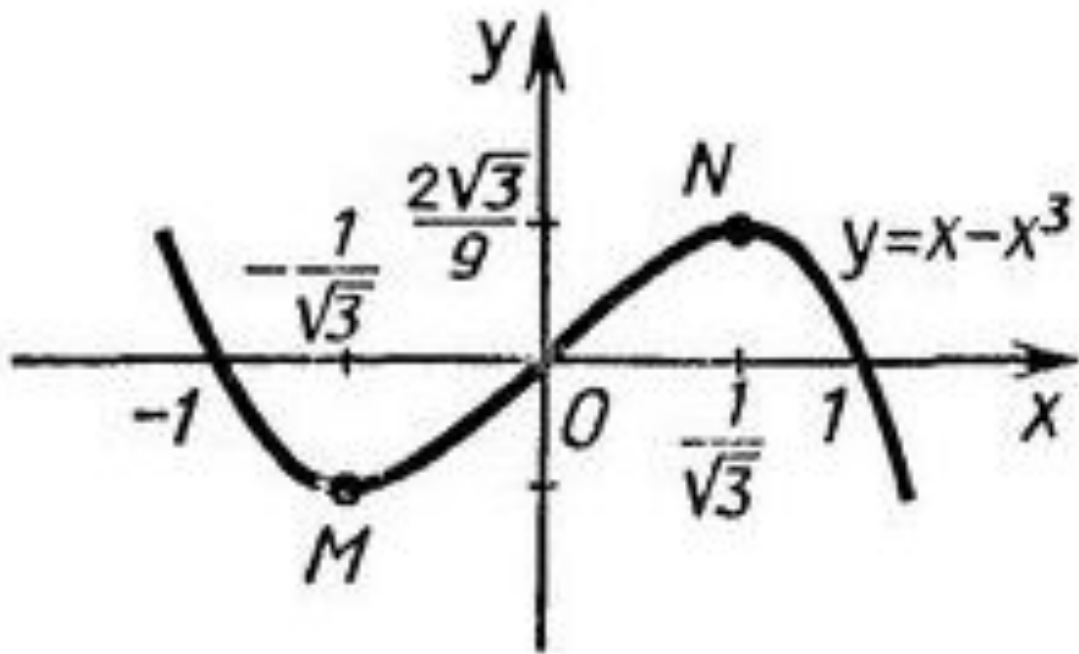
Вычислим значения  $f$  в точках  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$  и  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ :

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}; \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Отметим данные точки на координатной плоскости и начертим график, проходящий через данные точки с полученными условиями возрастания и убывания.



# Признак возрастания (убывания) функции



Из рисунка видно, что функция  $f$ , непрерывная в точках  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$  и  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ , возрастает на отрезке  $[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}]$  и убывает на промежутках  $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}]$  и  $[\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$ .

# Признак возрастания (убывания) функции

---

- ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если функция  $f$  непрерывна в каком-либо из концов промежутка возрастания/убывания, то эта точка тоже входит в промежуток возрастания/убывания.
- ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для решения неравенств  $f'(x) > 0$  и  $f'(x) < 0$  удобно пользоваться методом интервалов (теоремой Дарбу): точки, в которых производная равна 0 или не существует, разбивают область определения функции  $f$  на промежутки, в каждом из которых  $f'$  сохраняет постоянный знак. Знак можно определить, вычислив значение  $f'$  в какой-нибудь точке промежутка.