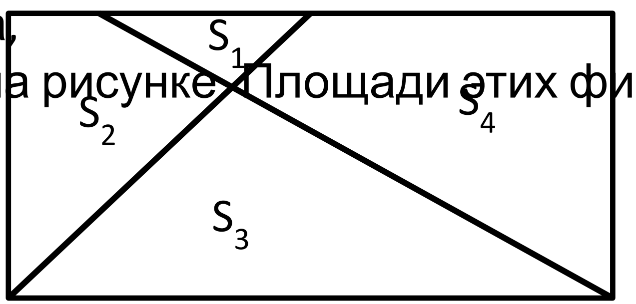
Контрольная работа по геометрии
треугольника

1. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и

C_2 – середины отрезков MA, MB и MC соответственно.
а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади
треугольника ABC.
б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, AB=4, BC=7 и AC=8.

2. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 10$.

3. Два отрезка разбивают прямоугольник на два треугольника и два четырехугольника,
так как показано на рисунке. Площади этих фигур S1=2, S2=5, S3=8. Найдите S4

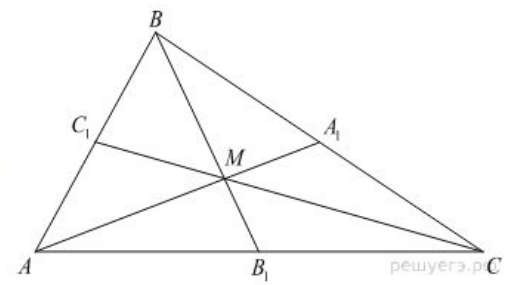


https://youtu.be/5_vE-JmKXjs решение №1

Решение.

Известно, что медианы делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины. Значит,

$$BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC.$$



Поэтому треугольники AB_1B и CB_1B равнобедренные, причём $\angle B_1AB = \angle ABB_1$ и $\angle B_1CB = \angle CBB_1$. Сумма всех этих четырёх углов равна 180°. Тогда $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle CBB_1 = 90°$. Следовательно, треугольник ABC — прямоугольный.

б) Треугольник A_1BA прямоугольный. Поэтому

$$AA_1^2 = A_1B^2 + BA^2 = \frac{1}{4}CB^2 + BA^2.$$

Аналогично из прямоугольного треугольника C_1BC находим:

$$CC_1^2 = C_1B^2 + BC^2 = \frac{1}{4}AB^2 + BC^2.$$

Тогда $AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{5}{4}BC^2 = \frac{5}{4}(AB^2 + BC^2) = \frac{5}{4}AC^2 = 125.$

Ответ: 125.

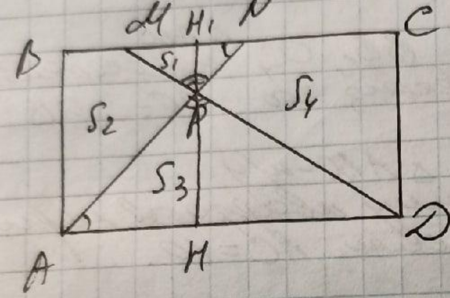
Приведём другое решение пункта а).

Покажем, что медиана, проведенная к стороне AC, равна половине этой стороны. Тогда угол, противолежащий стороне AC, равен 90°, что и требуется доказать. Действительно, медианы делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины. Значит, $BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC.$

Аналоги к заданию № 505537: 508974 509003 511579 Все

Методы геометрии: Свойства медиан

№3. Прямоугольник $ABCD$ разделен на 4 части так как показано на рисунке
$S_1=2$; $S_2=5$; $S_3=8$. Найдите S_4



1) $\triangle APD \overset{k}{\sim} \triangle NMP$ (по 2 углам) $\Rightarrow$

$$\frac{AD}{MN} = \frac{PH}{PH_1} = k$$

$$k^2 = \frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle MNP}} = \frac{8}{2} = 4$$

$\Rightarrow k = 2.$

2) Пусть $MN = a$, тогда
$AD = 2a$
$H_1P = b$, тогда
$PH = 2b$ и $H_1H = 3b$.

$BA = 3b$ $\quad S_{ABCD} = AB \cdot BC = 3b \cdot 2a = 6ab$

3) $S_{\triangle MPN} = \frac{a \cdot b}{2} = 2$ $\quad ab = 4$

4) $S_{ABCD} = 6 \cdot 4 = 24.$

Ответ: 24