



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

# Обзор приложений копул к задачам Байесовской классификации при машинном обучении

Кузнецов Никита Алексеевич

Научный руководитель  
Пеникас Генрих Иозович

### Основная цель:

Сравнение стандартных подходов к классификации с байесовской классификацией с использованием копул, в частности архимедовых копул.

### Используемые классификаторы:

Классификация по двум классам.

- Квадратичный дискриминант.
- Байесовский классификатор с копулой Клейтона для первого класса.
- Байесовский классификатор с копулой Гумбеля для второго класса.
- Logit регрессия.

### Данные:

Искусственно сгенерированные:

- Гауссовские
- Не гауссовские
  - Копула Клейтона для первого класса
  - Копула Гумбеля для второго класса



### Возможные задачи классификации:

- Кредитный скоринг
- Моделирование вероятностей дефолтов
- Классификация изображений [*Крылов 2010*], [*Крылов 2013*]
- Распознавание речи
- Медицинские исследования [*Han, Zhao, Liu 2013*]



## Байесовский классификатор

- $$a(x) = \operatorname{argmax} (P_y * p_y(x)) \quad y \in Y$$

$a(x)$  – Классификатор.

$P_y$  – вероятность класса  $y$ .

$p_y(x) = p(x|y)$  - функция правдоподобия/вероятности для класса  $y$ .

С использованием функции потерь:

$$A(x) = \operatorname{argmax} (\lambda_y P_y * p_y(x))$$

$\lambda_y$  – штраф за ошибку на классе  $y$ .



## Квадратичный дискриминант

- $$a_{quadratic}(x) = \operatorname{argmax} \left( P_y * \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma_y|}} e^{-\frac{1}{2}(x-u)^T \Sigma_y^{-1}(x-u)} \right)$$

$p_y(x) = p(x|y)$  - Подставляется формула плотности нормального распределения -

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma_y|}} e^{-\frac{1}{2}(x-u)^T \Sigma_y^{-1}(x-u)}$$

Логарифмируя и убирая константы:

$$a_{quadratic}(x) = \operatorname{argmax} \left( \ln(P_y) - \frac{1}{2}(x-u)^T \Sigma^{-1}(x-u) - \frac{1}{2} \ln(|\Sigma_y|) \right)$$

Предложена *Sathe* в 2006.

Производя замену:

$$p_y(x) = f^y(x_1, \dots, x_d)$$

По теореме Склера:

$$f^y(x_1, \dots, x_d) = c^y(F_1^y(x_1|\theta_1^y), \dots, F_d^y(x_d|\theta_d^y)) * \prod_{i=1}^d f_i^y(x_i|\theta_i^y)$$

Подставляя в классификатор:

$$a(x) = \operatorname{argmax} \left( P_y * c^y(F_1^y(x_1|\theta_1^y), \dots, F_d^y(x_d|\theta_d^y)) * \prod_{i=1}^d f_i^y(x_i|\theta_i^y) \right)$$

Архимедова копула:

$$C = \varphi^{-1}(\varphi(F(x_1)) + \dots + \varphi(F(x_d)))$$

Тогда плотность архимедовой копулы:

$$c = \varphi^{-1[d]} \left( \sum_{i=1}^d \varphi(F_i(x_i)) \right) * \prod_{j=1}^d \varphi'(F_j(x_j))$$

Подставляя плотность копулы в классификатор получается:

$$a(x) = \operatorname{argmax} \left( P_y * \varphi^{-1[d]y} \left( \sum_{i=1}^d \varphi^y(F_i^y(x_i|\theta_i^y)) \right) * \prod_{j=1}^d \varphi'^y(F_j^y(x_j|\theta_j^y)) * \prod_{i=1}^d f_i^y(x_i|\theta_i^y) \right)$$

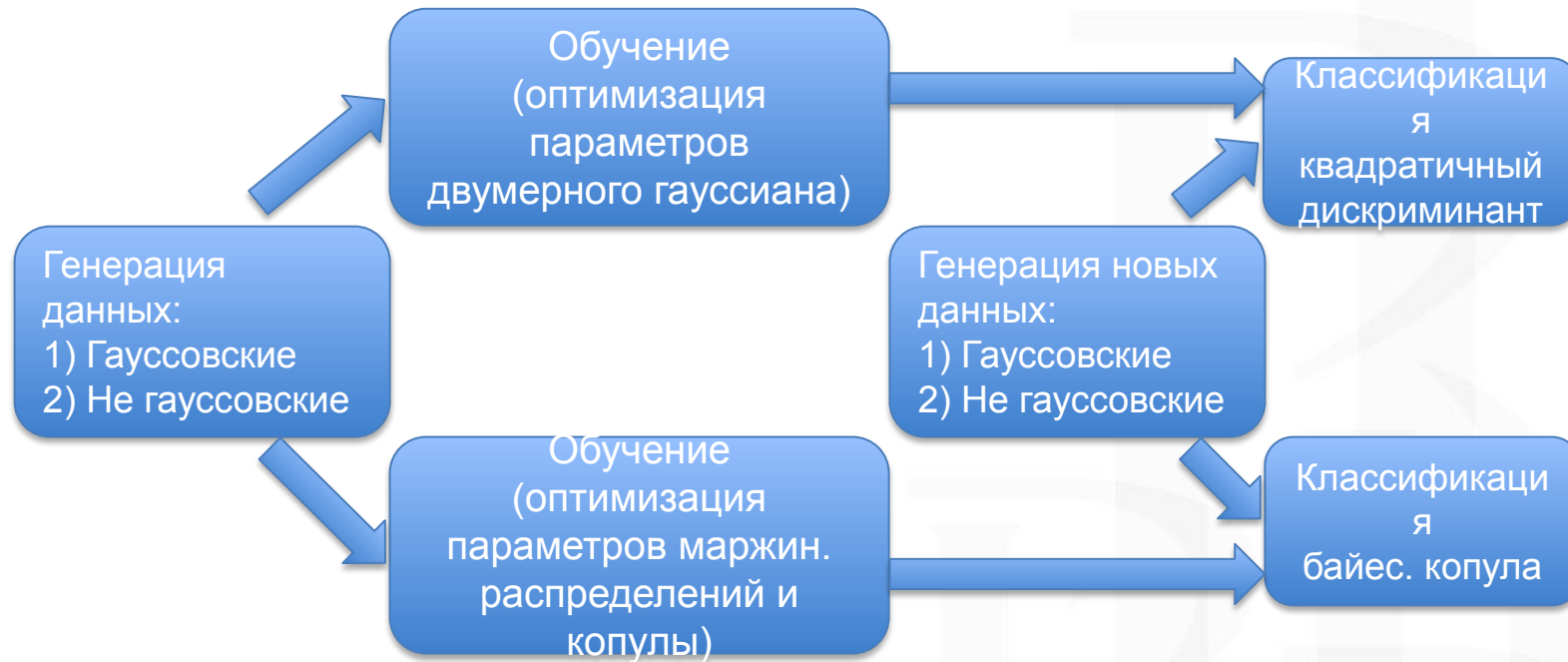
Происходила генерация двух типов данных:

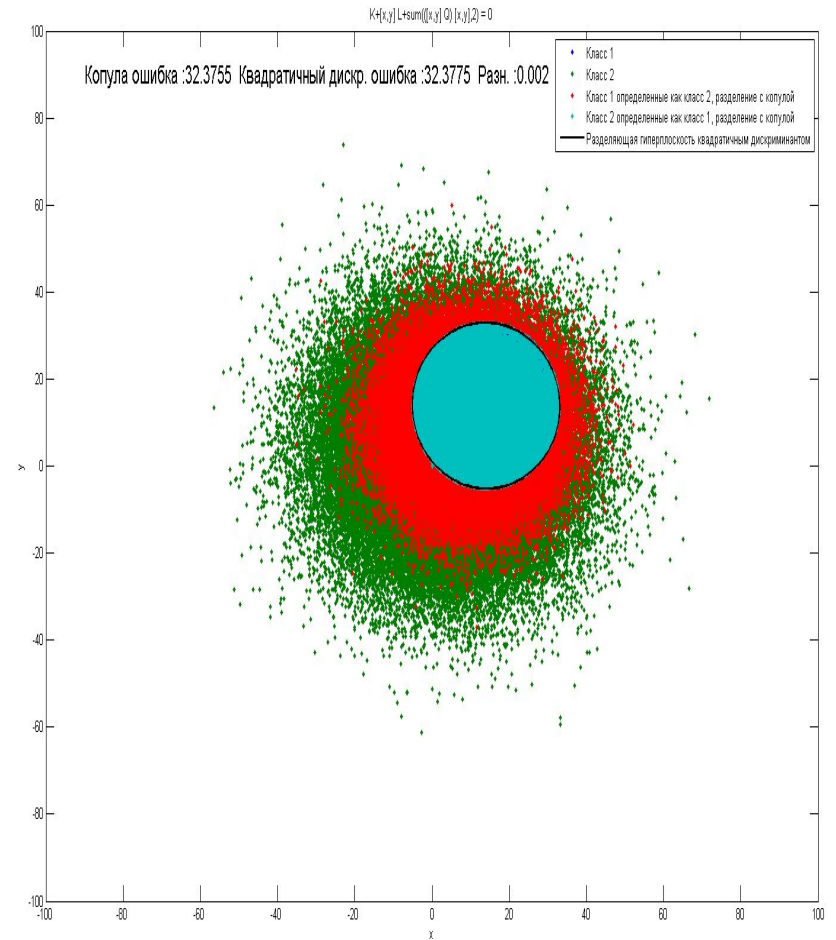
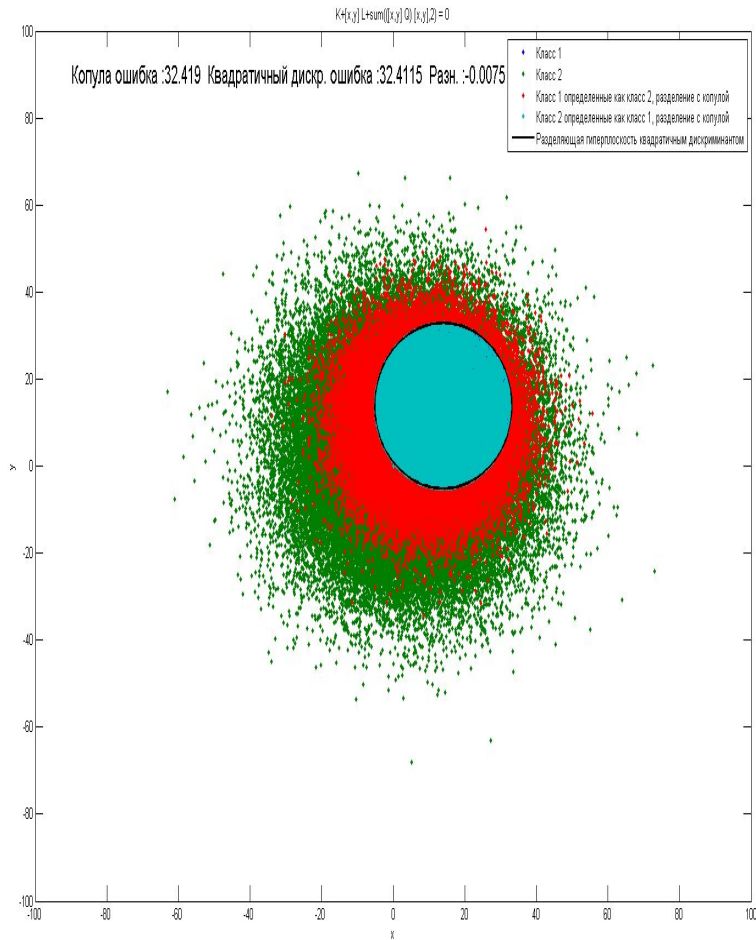
- Гауссовские
- Не гауссовские
  - Копула Клейтона для первого класса.
  - Копула Гумбеля для второго класса.

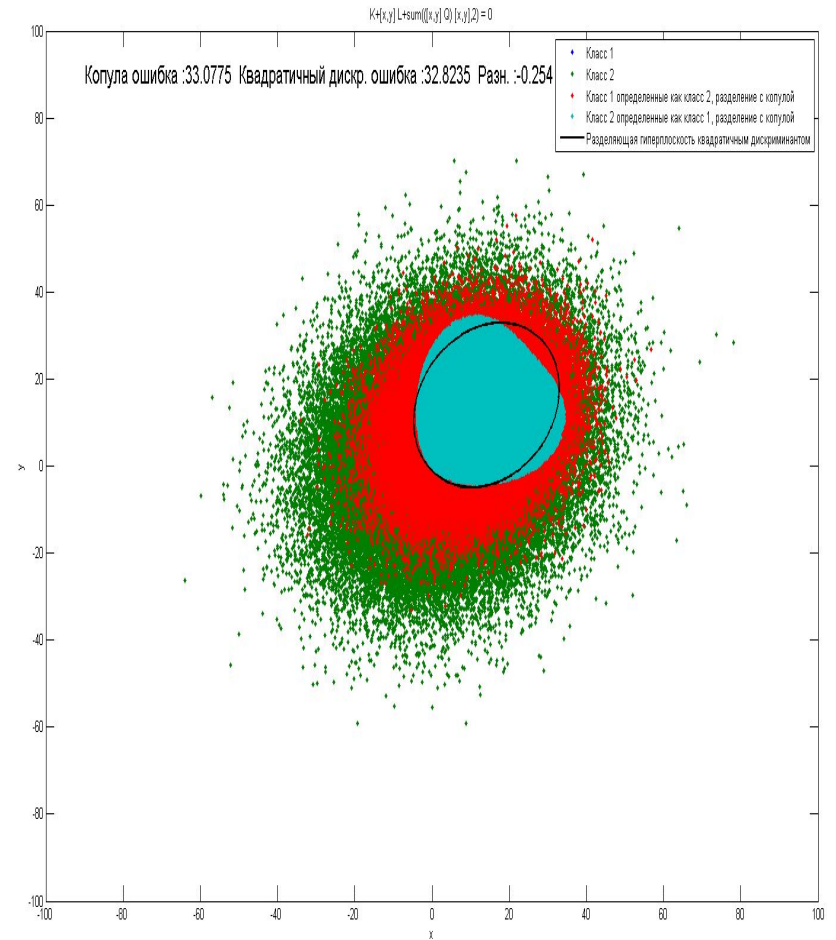
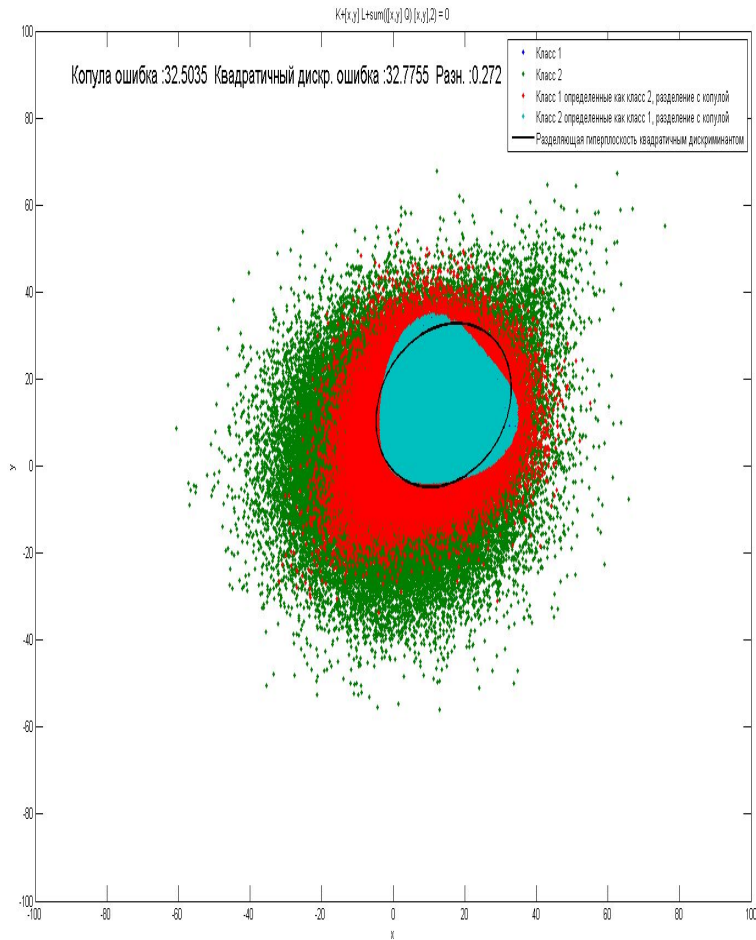
В обоих случаях маргинальные распределения:

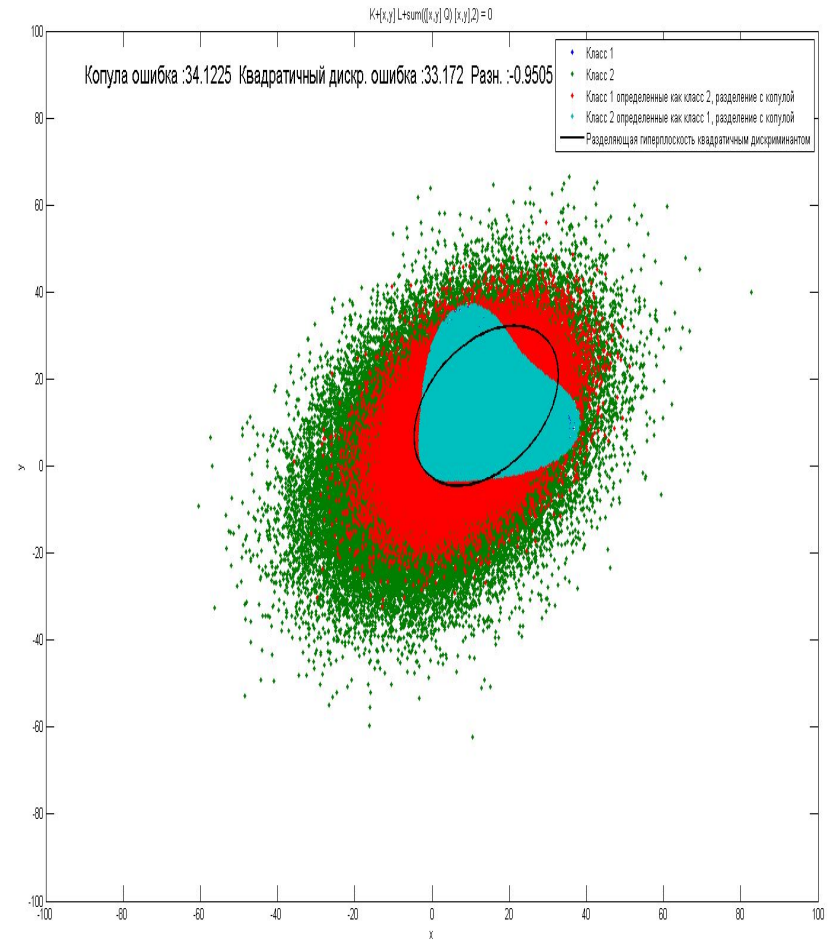
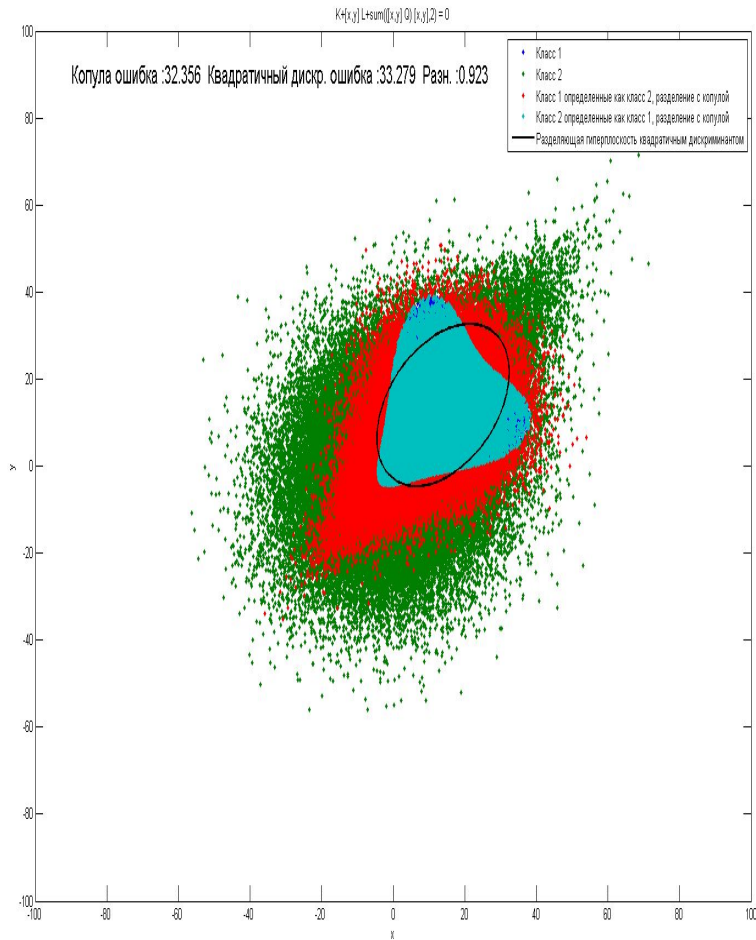
Класс 1		Класс 2	
Среднее X	10	Среднее X	5
Среднее Y	10	Среднее Y	5
Ст. откл. X	10	Ст. откл. X	15
Ст. откл. Y	10	Ст. откл. Y	15

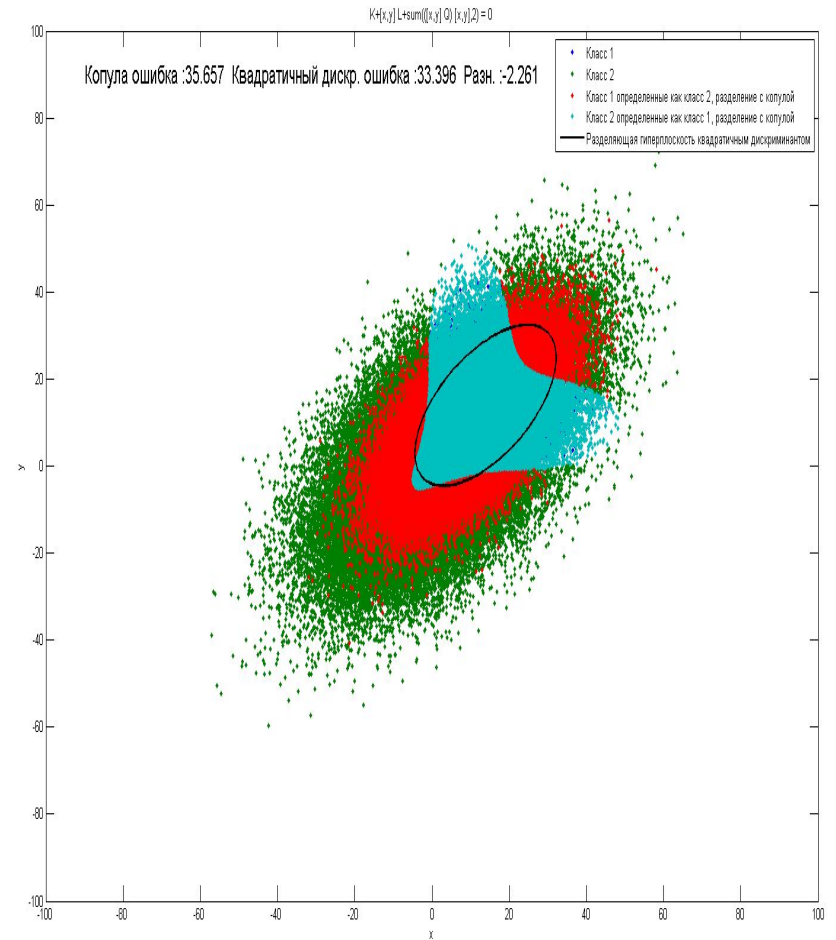
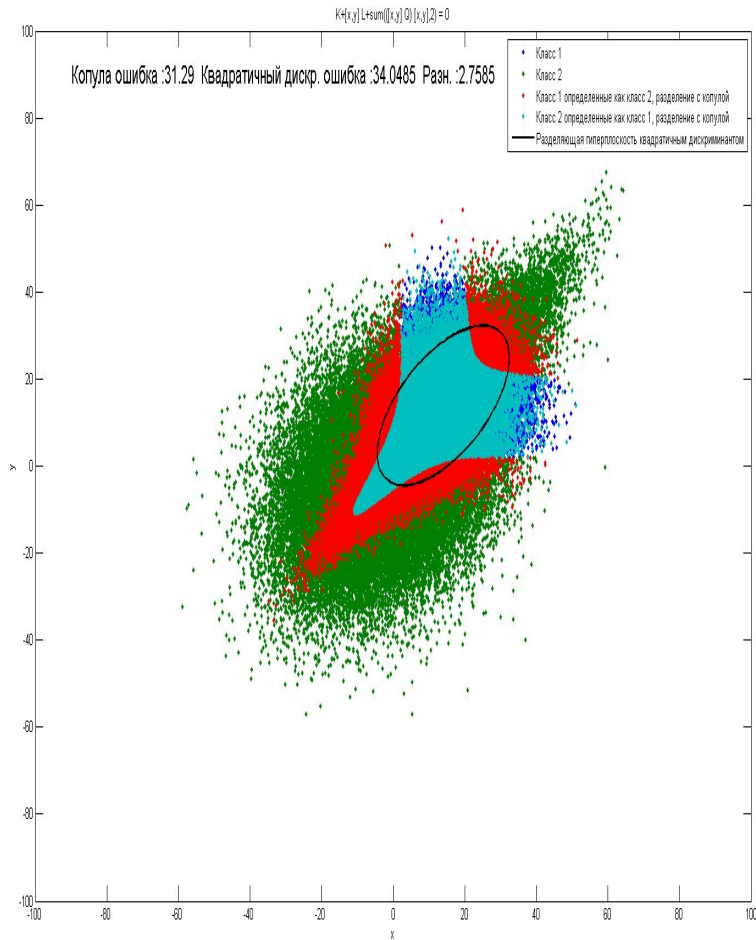


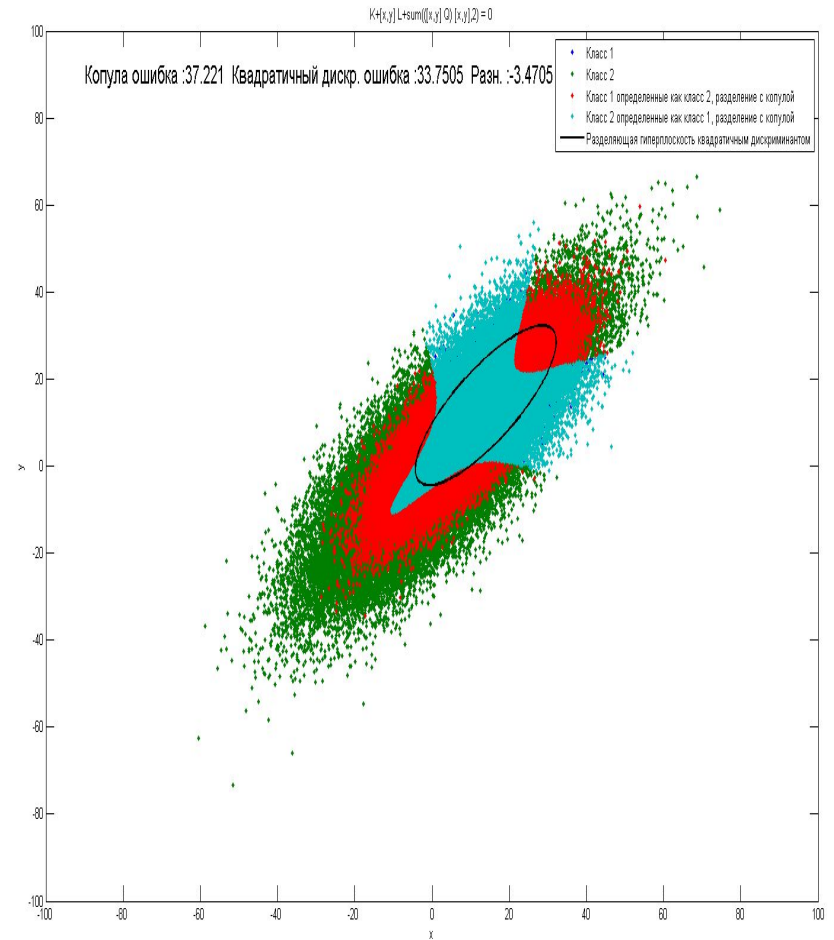
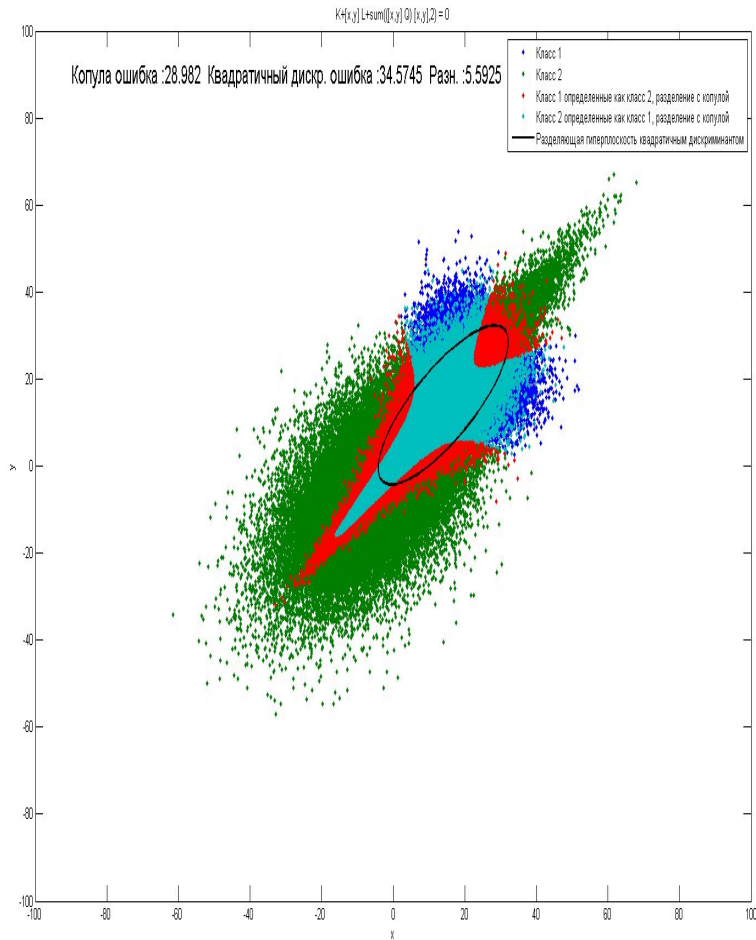


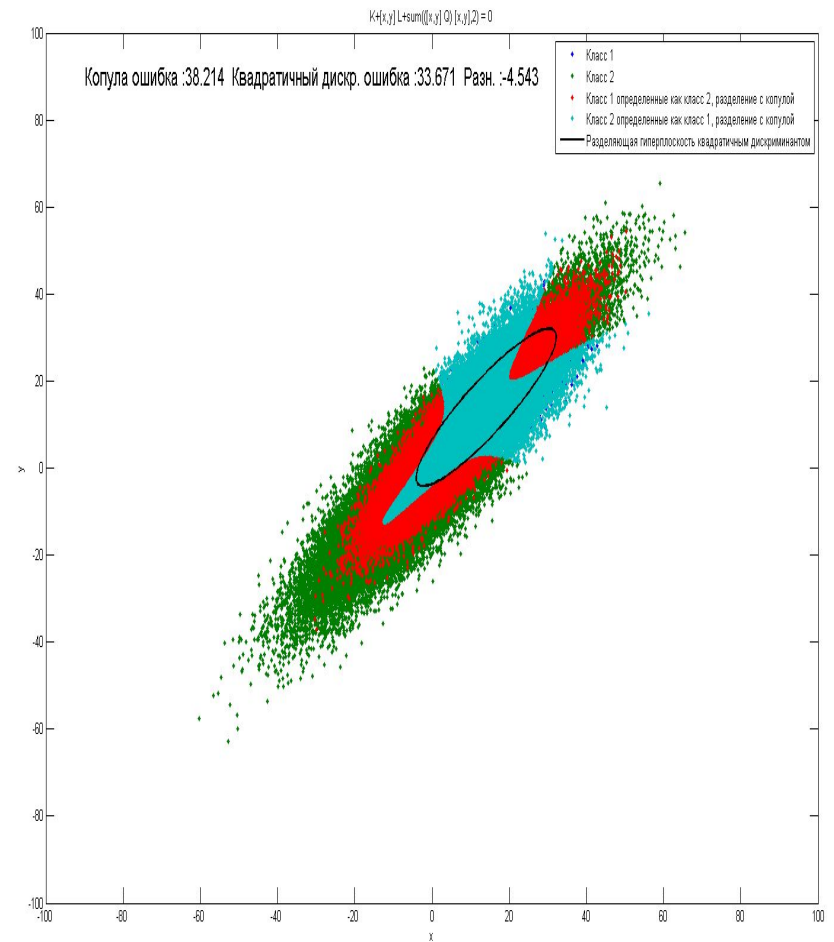
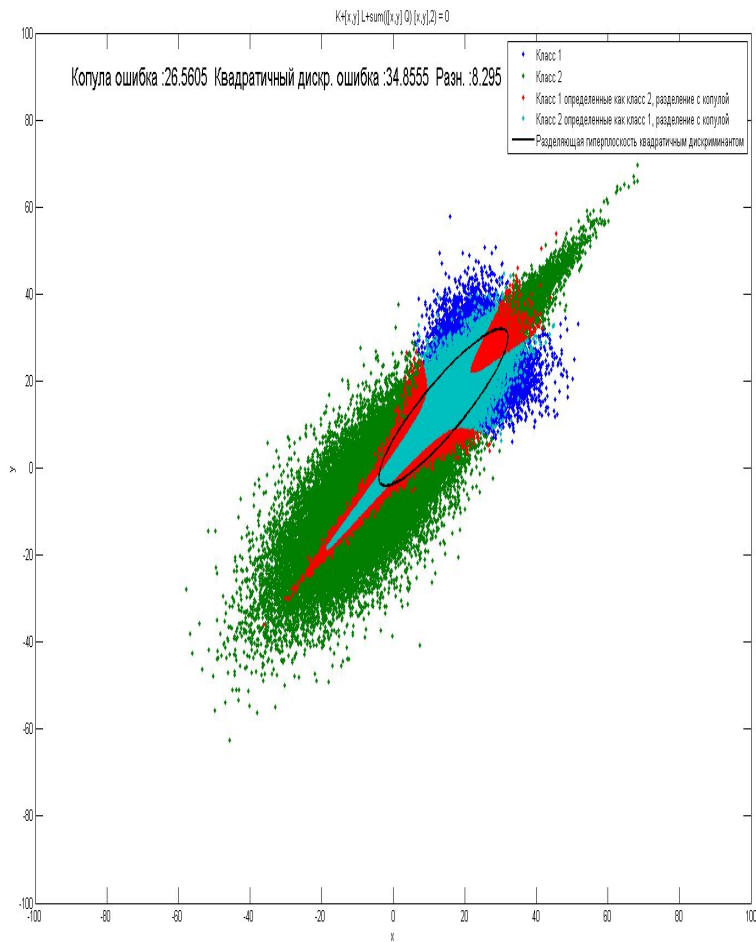


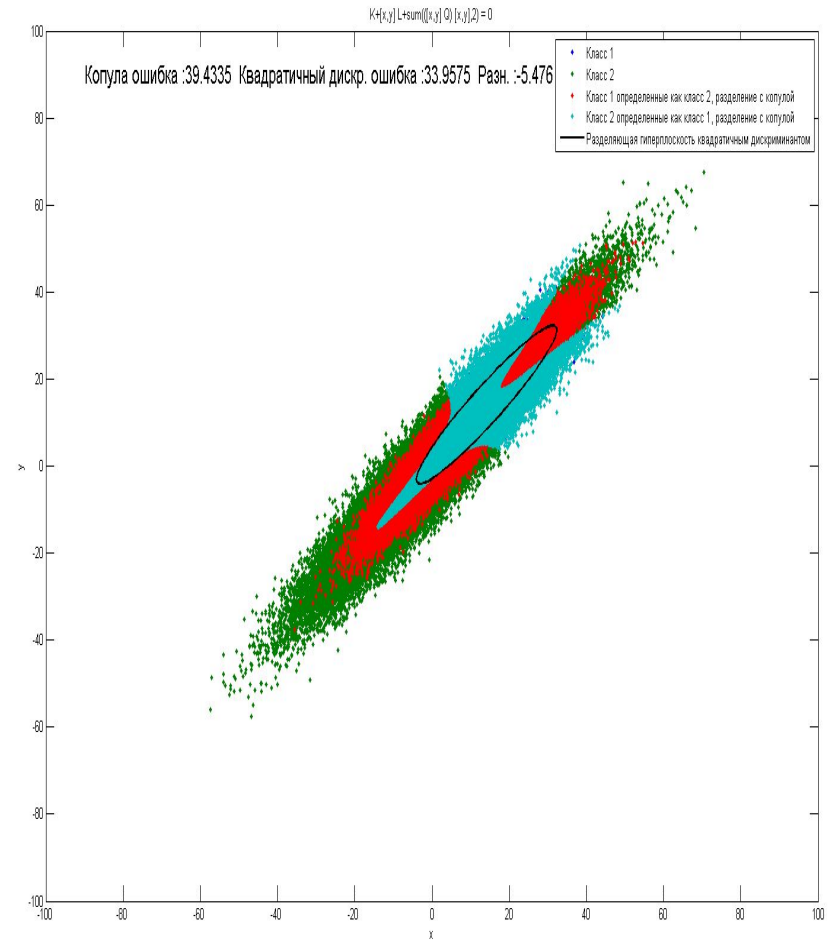
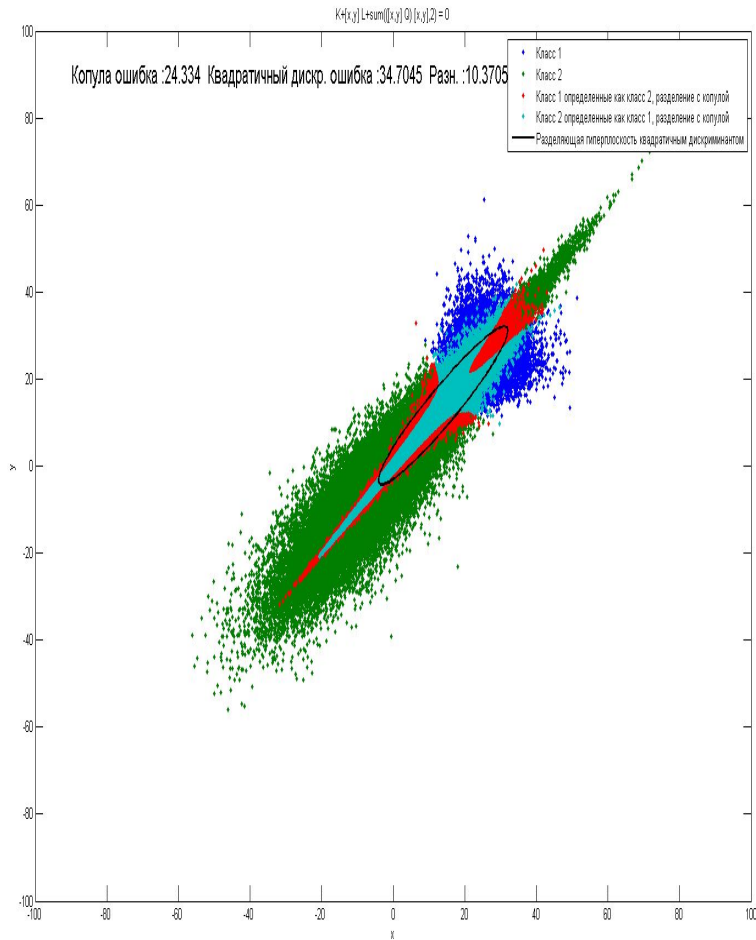




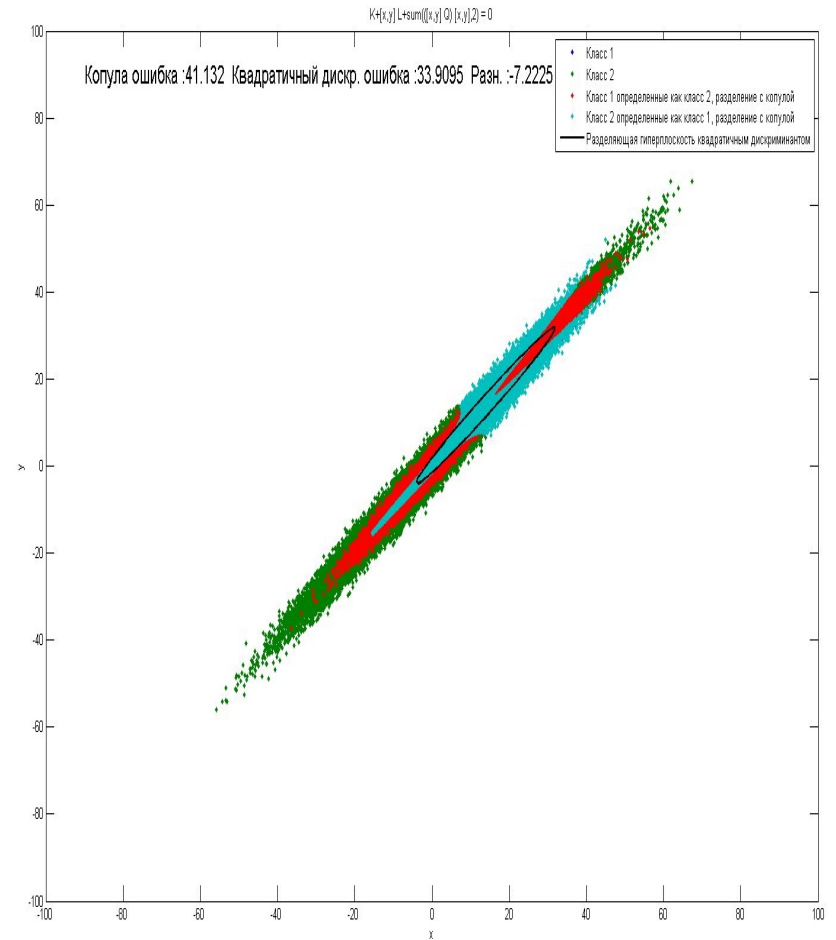
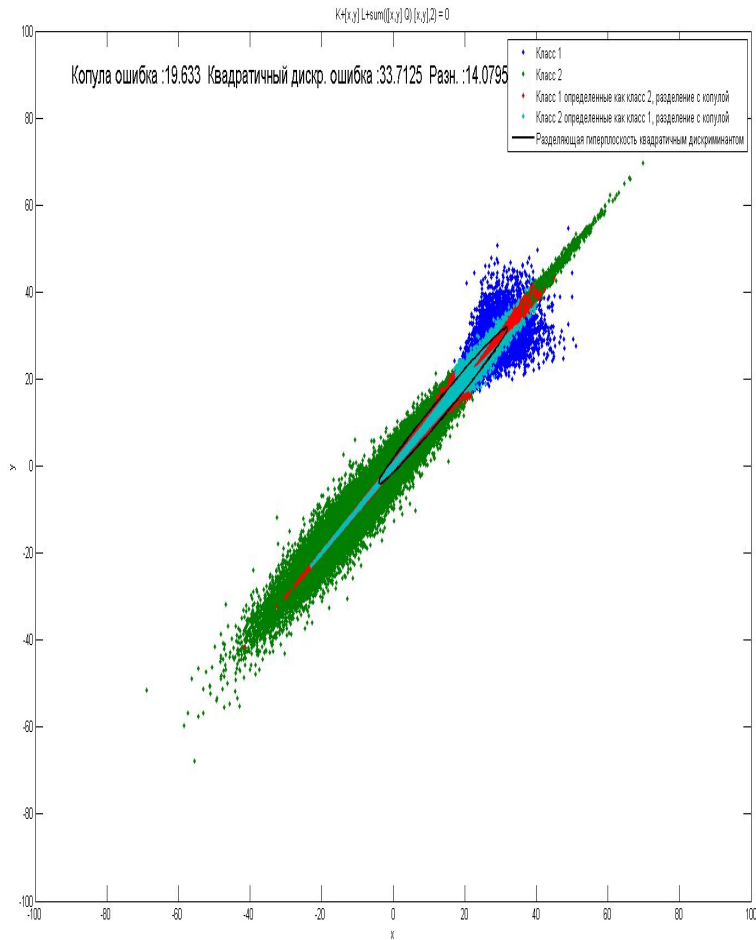


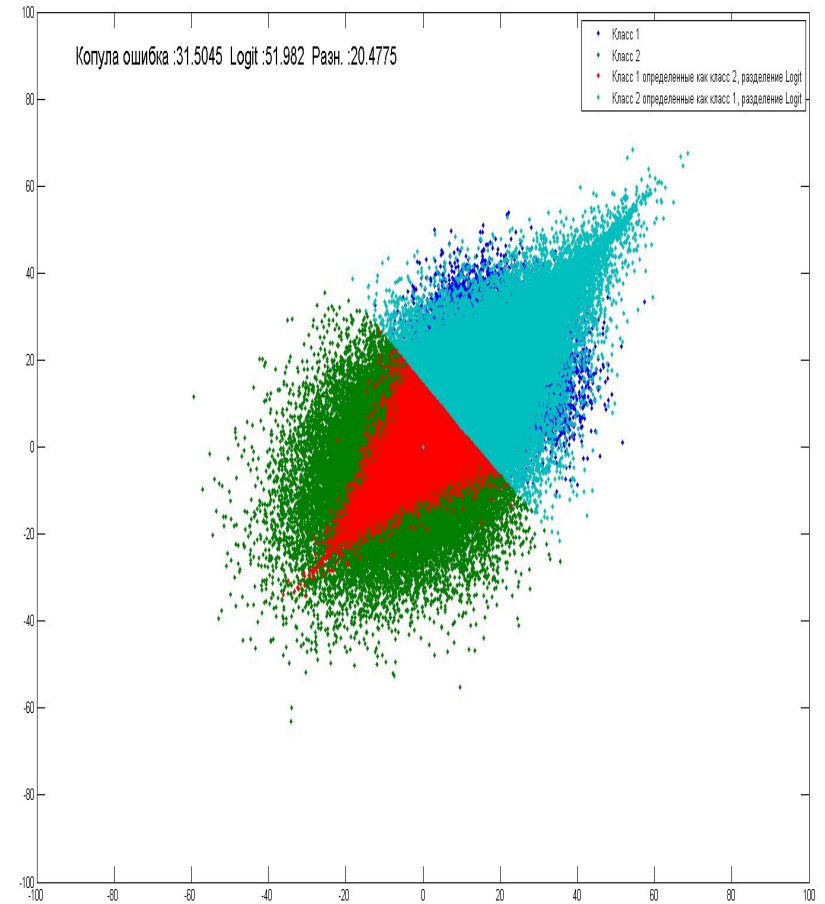
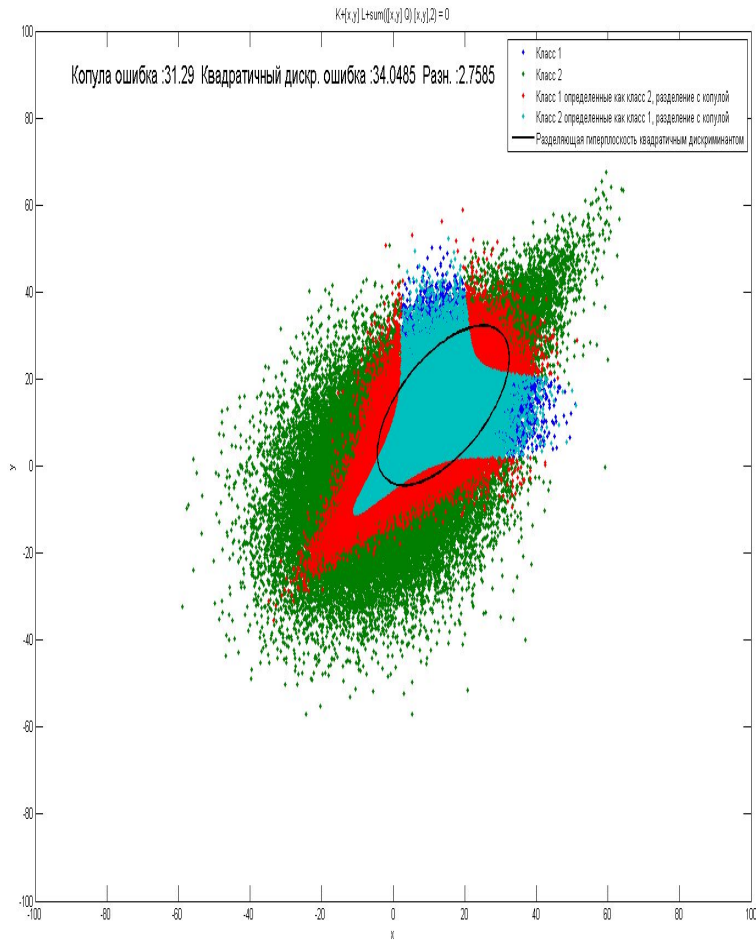














## Результаты таблица 1

Корреляция	Гауссовские данные		Не Гауссовские данные		
	Средняя ошибка в %		Параметр копулы	Средняя ошибка в %	
	Копула	Квадр. Дискр.		Копула	Квадр. Дискр.
0	32.38	32.38	0/1	32.42	32.41
0.1	32.58	32.54	0.14/1.07	32.41	32.51
0.2	33.08	32.82	0.29/1.14	32.50	32.78
0.3	33.54	33.04	0.47/1.24	32.59	33.15
0.4	34.12	33.17	0.7/1.35	32.36	33.28
0.5	34.91	33.24	1/1.5	32.07	33.65
0.6	35.66	33.40	1.45/1.7	31.29	34.05
0.7	36.26	33.45	2.15/2	30.34	34.49
0.8	37.22	33.75	3.4/2.5	28.98	34.57
0.9	38.21	33.67	6.8/3.65	26.56	34.86
0.95	39.43	33.96	12.8/5.25	24.33	34.70
0.99	41.13	33.91	50/12	19.63	33.71

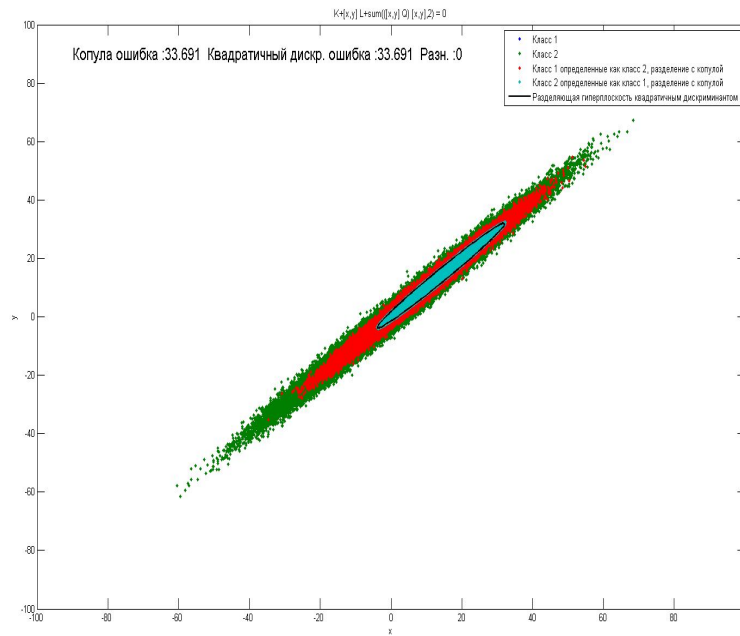


## Результаты таблица 2

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

Параметры	Разница гаусс.	Разница не гаусс.
0/0/1	0.00	- 0.01
0.1/0.14/1.07	- 0.03	0.11
0.2/0.29/1.14	- 0.25	0.27
0.3/0.47/1.24	- 0.50	0.56
0.4/0.7/1.35	- 0.95	0.92
0.5/1/1.5	- 1.67	1.58
0.6/1.45/1.7	- 2.26	2.76
0.7/2.15/2	- 2.82	4.15
0.8/3.4/2.5	- 3.47	5.59
0.9/6.8/3.65	- 4.54	8.30
0.95/12.8/5.25	- 5.48	10.37
0.99/50/12	- 7.22	14.08

- 1) На не гауссовских данных, классификатор с использованием копулы более точное чем стандартный квадратичный дискриминант.
- 2) На гауссовских данных происходит потеря точности, которую можно компенсировать «умным» использованием копулы.





НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

# Спасибо за внимание!

101000, Россия, Москва, Мясницкая ул., д. 20

Тел.: (495) 621-7983, факс: (495) 628-7931

[www.hse.ru](http://www.hse.ru)