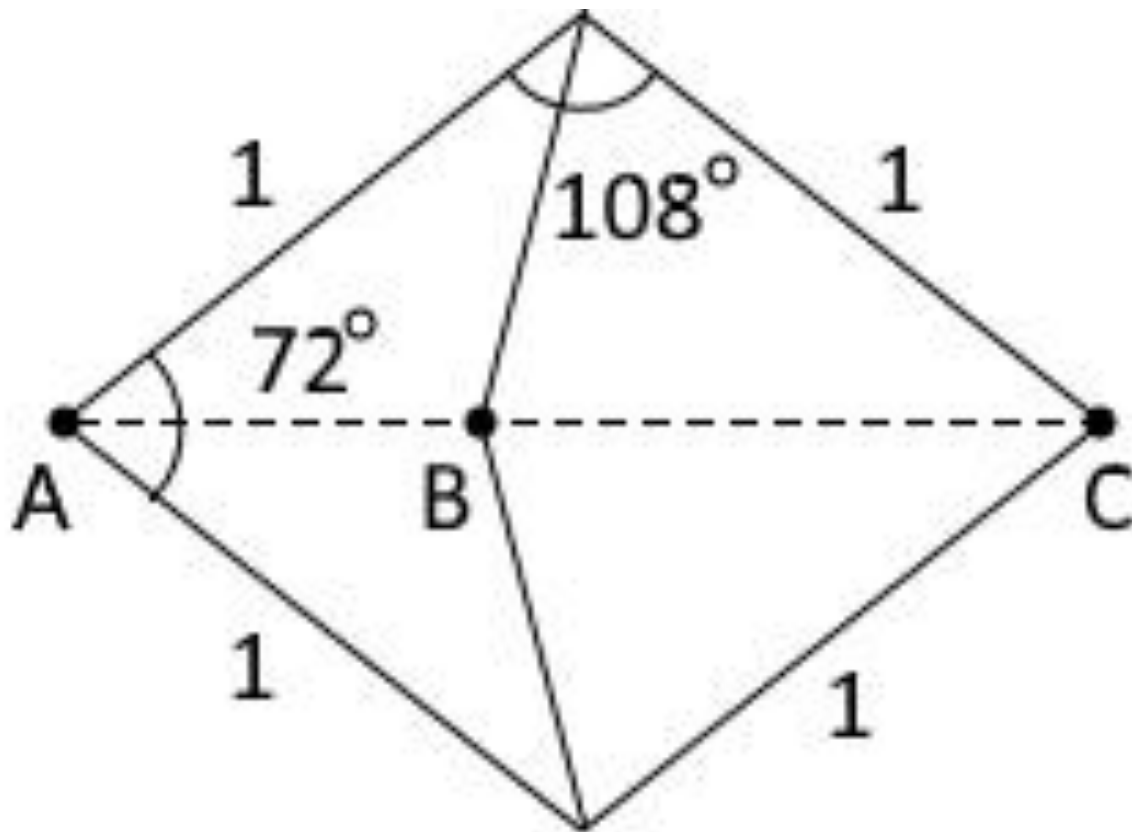


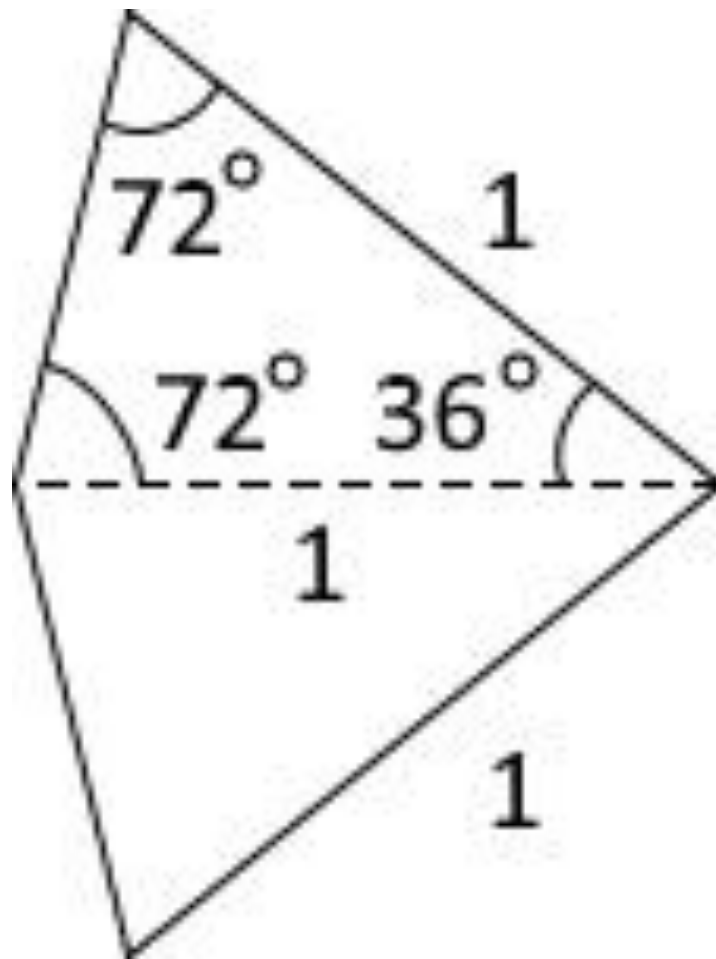
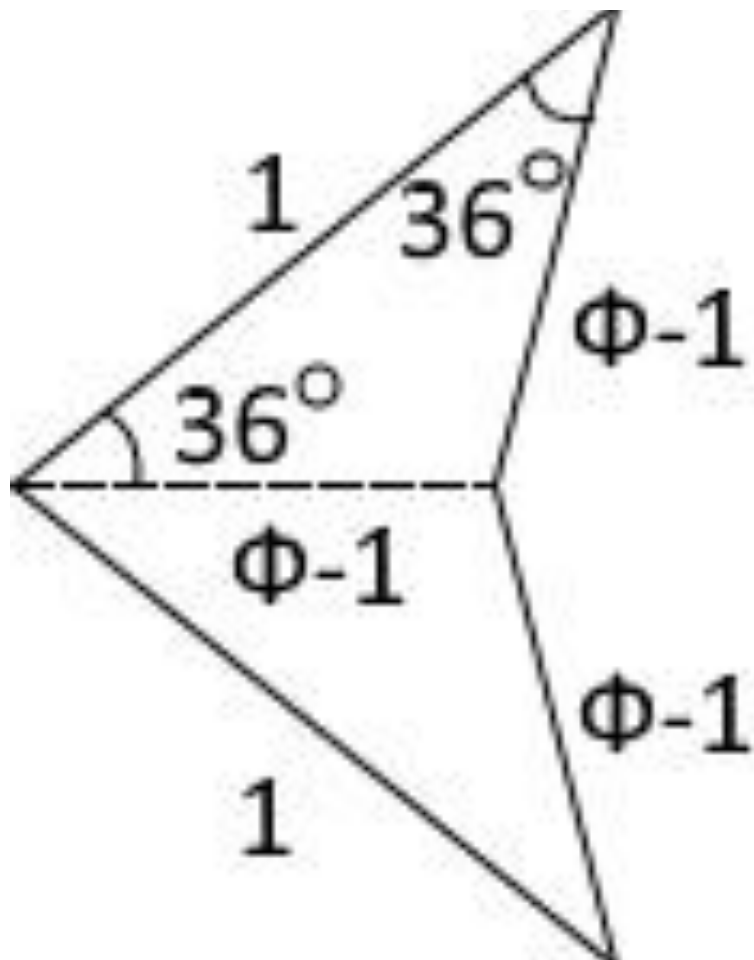
Концентрические замощения на основе ромбов Пенроуза

Известны 2 четырехугольника, получившие названия дротик и змей по своей форме, которые порождают только концентрические замощения. Их основой являются ромбы Пенроуза, форму которых имеют промежутки в симметрично отраженных рядах правильных 5-угольников. *) Чтобы получить дротик и змей, нужно разделить 1 промежуточный ромб в пропорции золотого сечения его большей диагонали как показано на следующих рисунках.

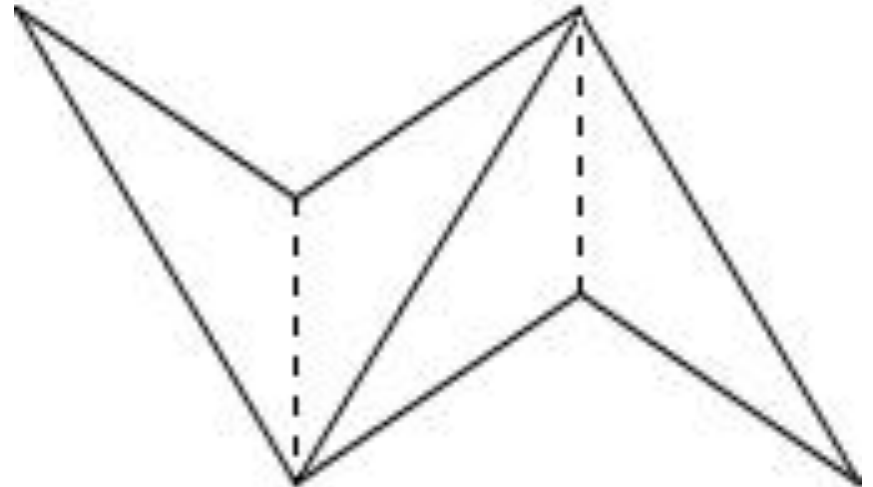
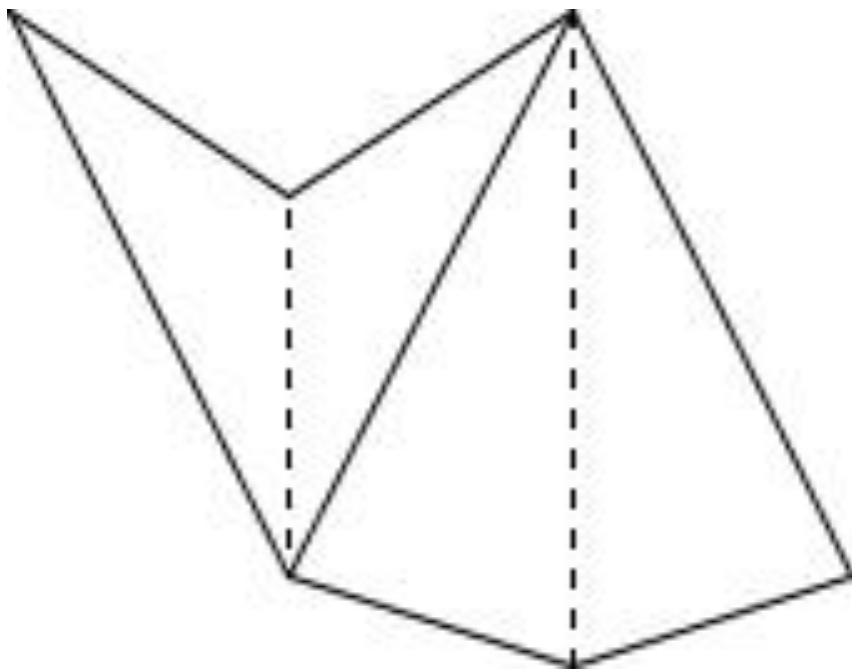
промежуточный ромб в пропорции золотого сечения его
большой диагонали $AC/DC=1,618\dots$



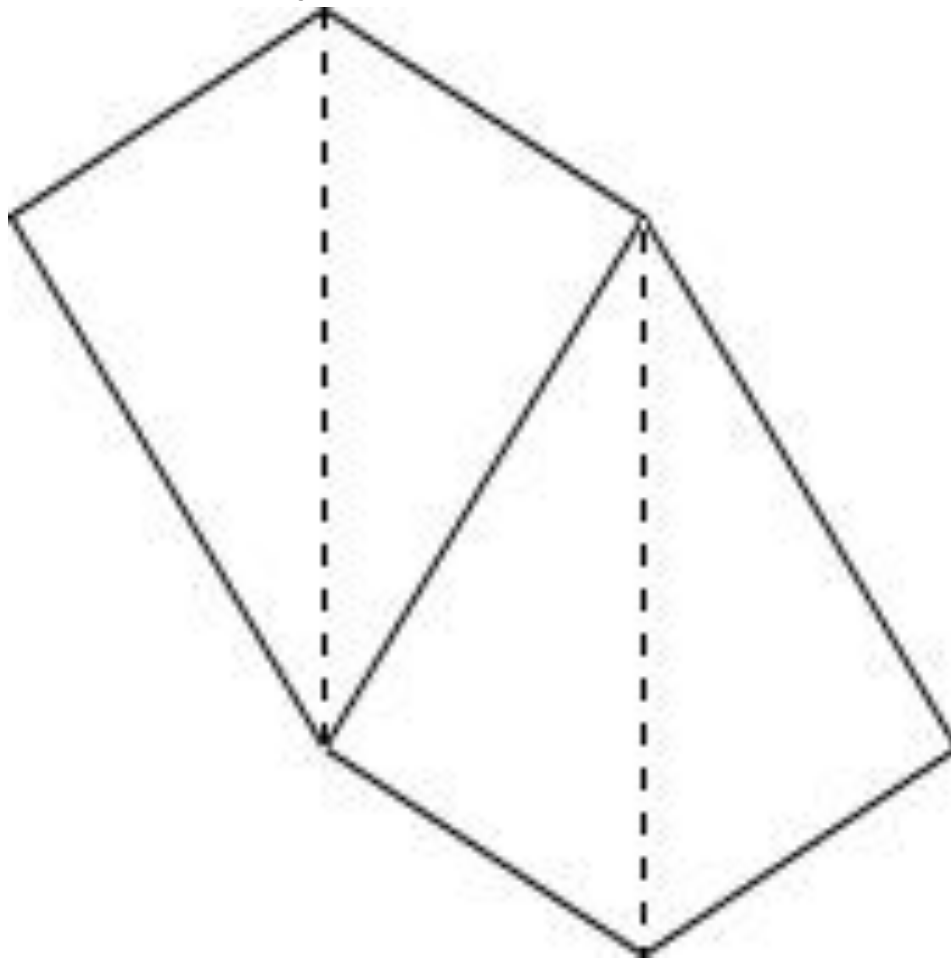
Дротик и Змей, полученные из промежуточного ромба



Геометрические пропорции дротика и змея позволяют соединить их по равным сторонам в различных сочетаниях. Их примеры показаны на следующих рисунках: слева - змей + дротик , справа - дротик + дротик



Геометрические пропорции дротика и змея позволяют соединить их по равным сторонам в различных сочетаниях. Их примеры показаны на следующем рисунке: змей+змея

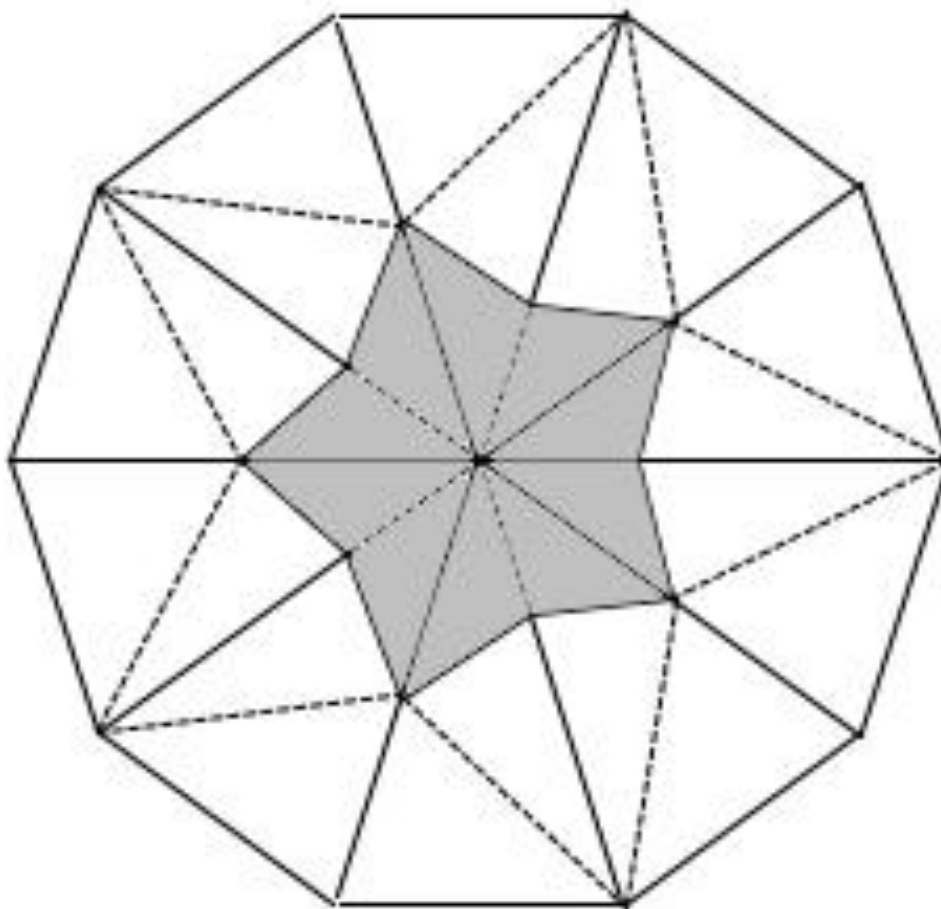


Звезда Пенроуза

На следующем рисунке показана концентрическая мозаика звезда из конгруэнтных дротиков и змеев.

Можно считать, что внутреннюю звезду составляют дротики. Ее внешнее обрамление образуют пары змеев, которые примыкают к дротикам.

Звезда Пенроуза



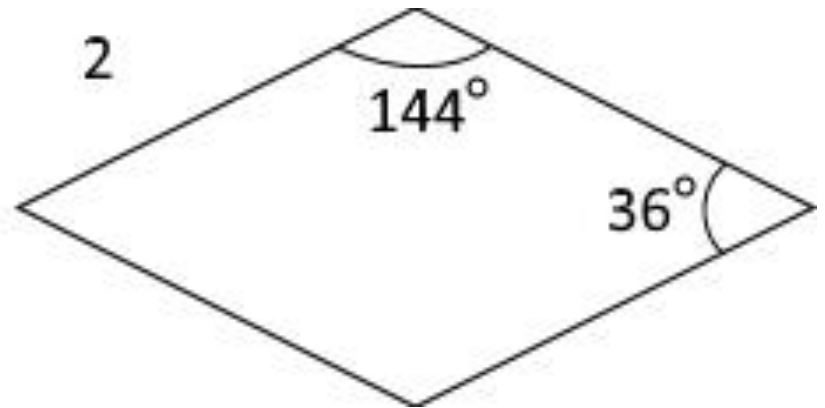
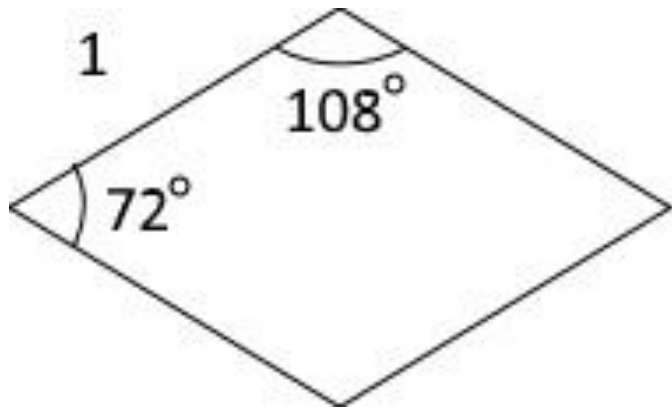
Промежуточные ромбы Пенроуза

Промежуточные ромбы Пенроуза имеют общие стороны со сторонами правильных 5-угольников (см. вводную мозаику Пенроуза), но различаются по углам.

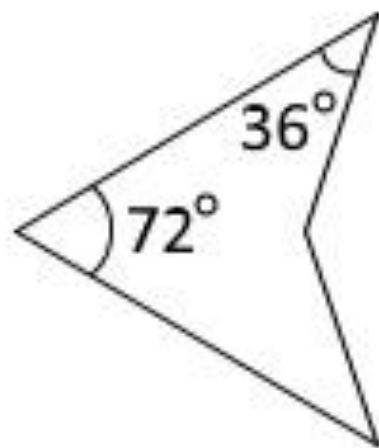
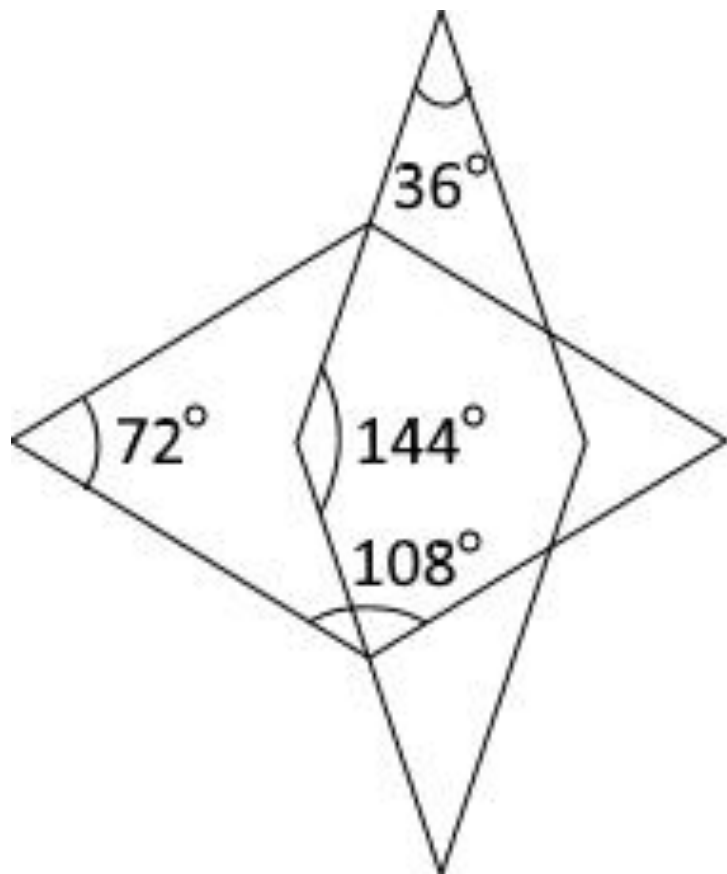
В одном ромбе внутренние углы: 72 и 108 градусов.

В другом ромбе внутренние углы: 36 и 144 градуса.

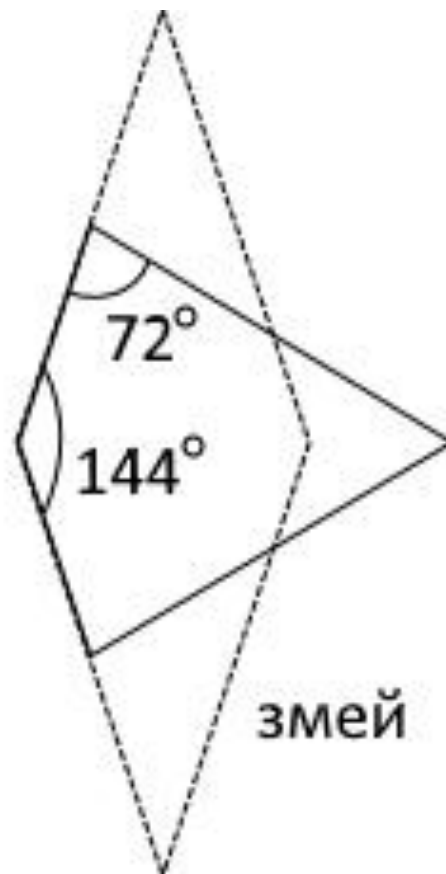
Промежуточные ромбы Пенроуза



Аналогичное разделение получается из наложения ромбов Пенроуза как показано на следующем рисунке

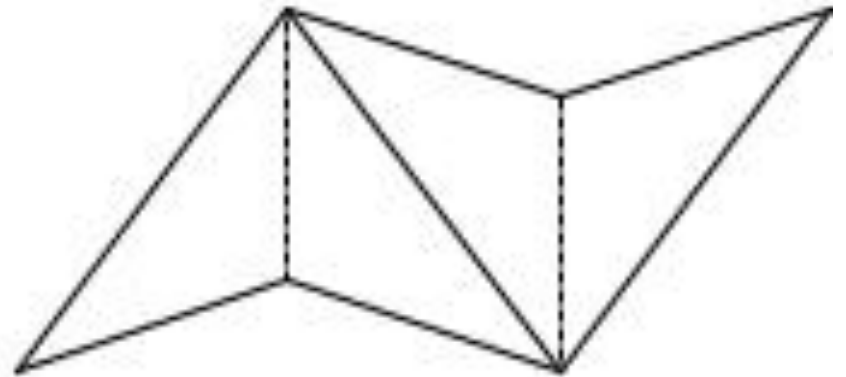
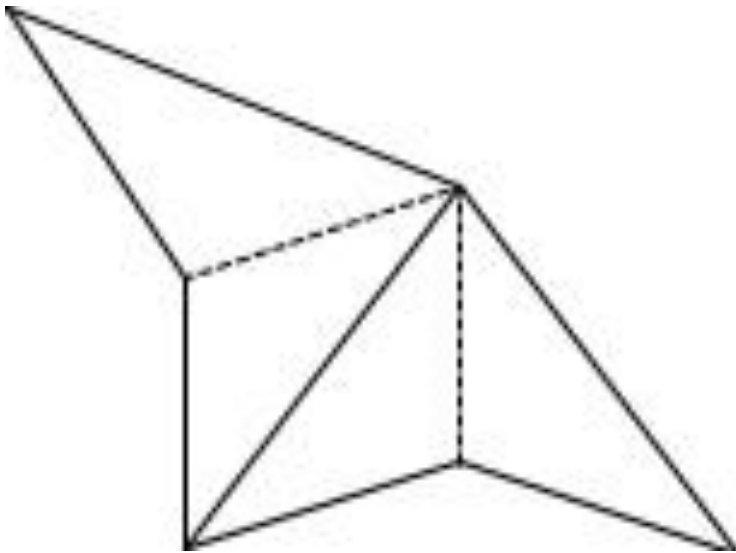


дротик

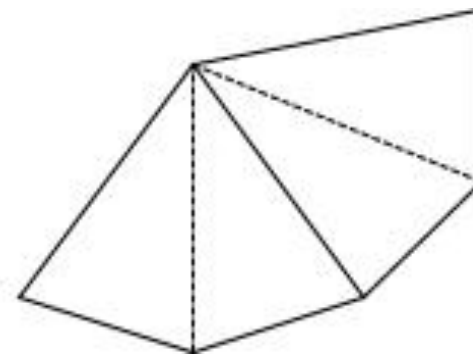
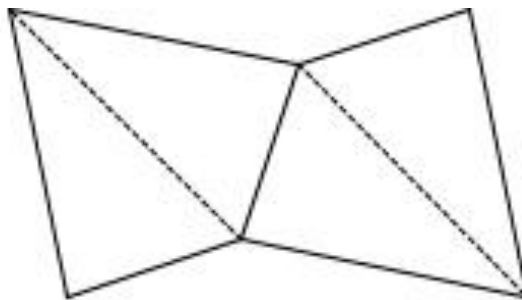
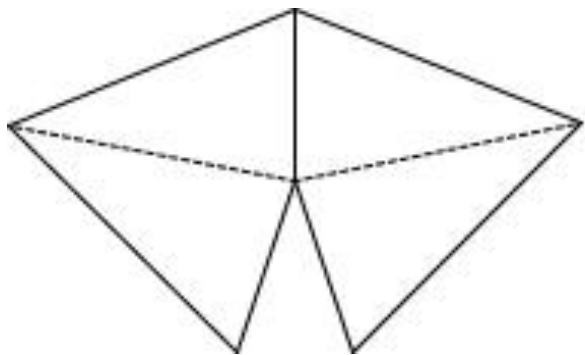


змея

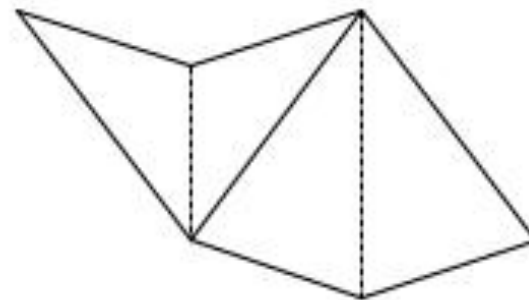
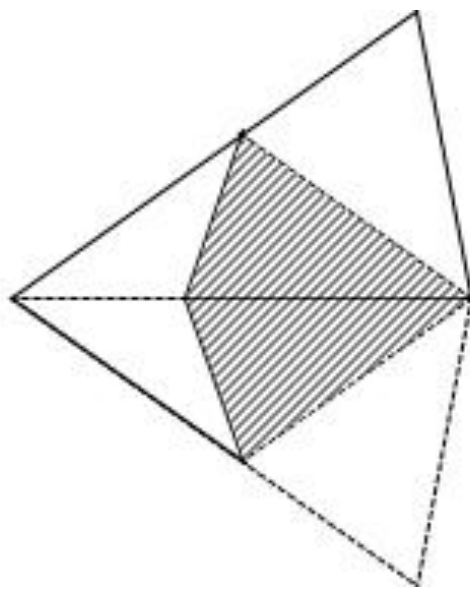
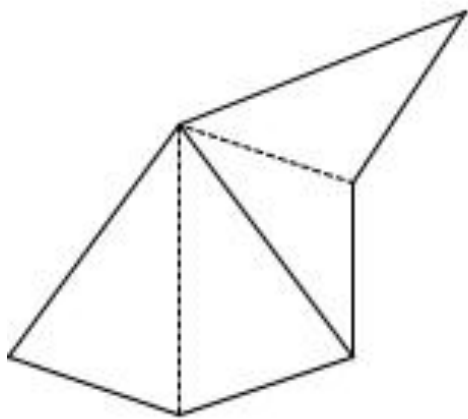
На следующих рисунках показаны еще 2 варианта, как можно соединить 2 дротика: дротик+дротик



3 возможные комбинации пары змеев:
змея+змея.



3 возможных варианта сочетаний дротик + змей без
исходной комбинации.



КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ЗАМОЩЕНИЯ

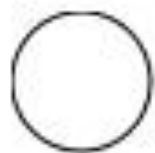
Это замощения, где грани являются криволинейными многоугольниками или геометрическими фигурами с криволинейными контурами.

Типичным примером криволинейных замощений являются геометрические узоры японских кимоно.

Одна из их разновидностей называется сашико (маленький стежок).

Ее образуют различные сочетания дуг $1/4$ окружности на квадратной сетке, сторона любой клетки которой равна радиусу дуги. Когда контур грани образуют 4 дуги 90° , можно составить $2^4 = 16$ выпукло – вогнутых фигур.

6 фигур являются изометрически различными и не могут быть получены друг из друга поворотами и отражениями



КРУГ



ЛУНА



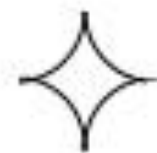
ЛЕПЕСТОК



КОСТЬ

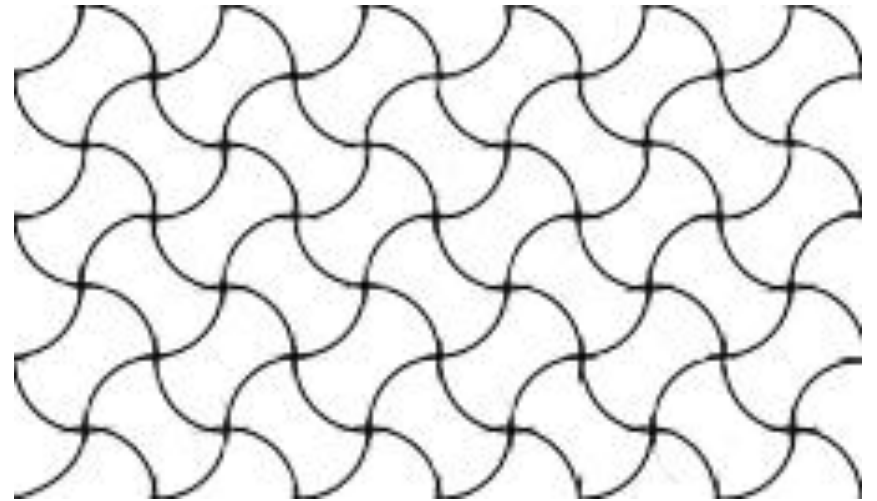
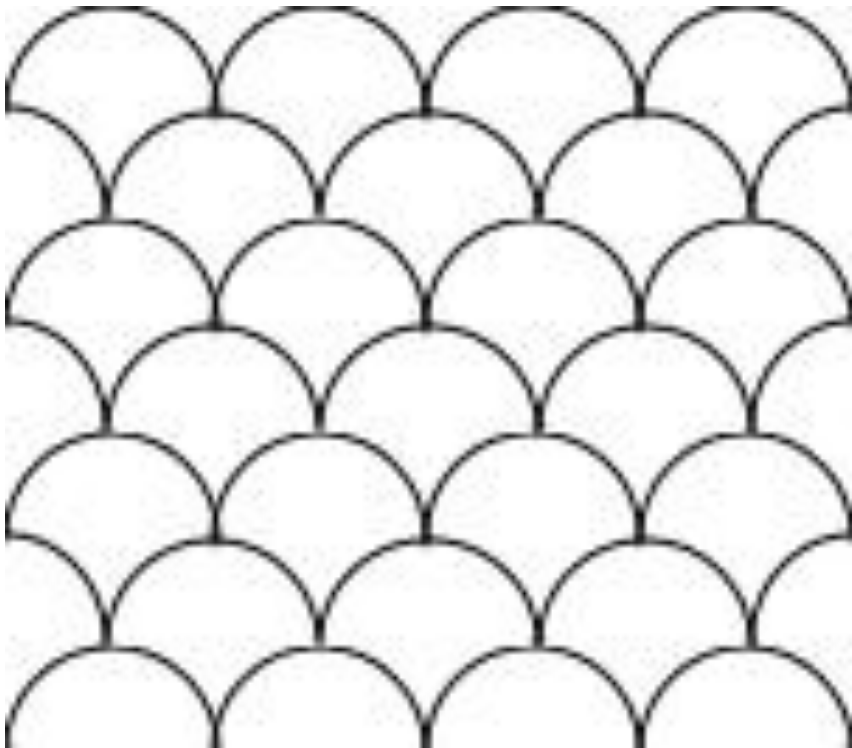


БАБКА



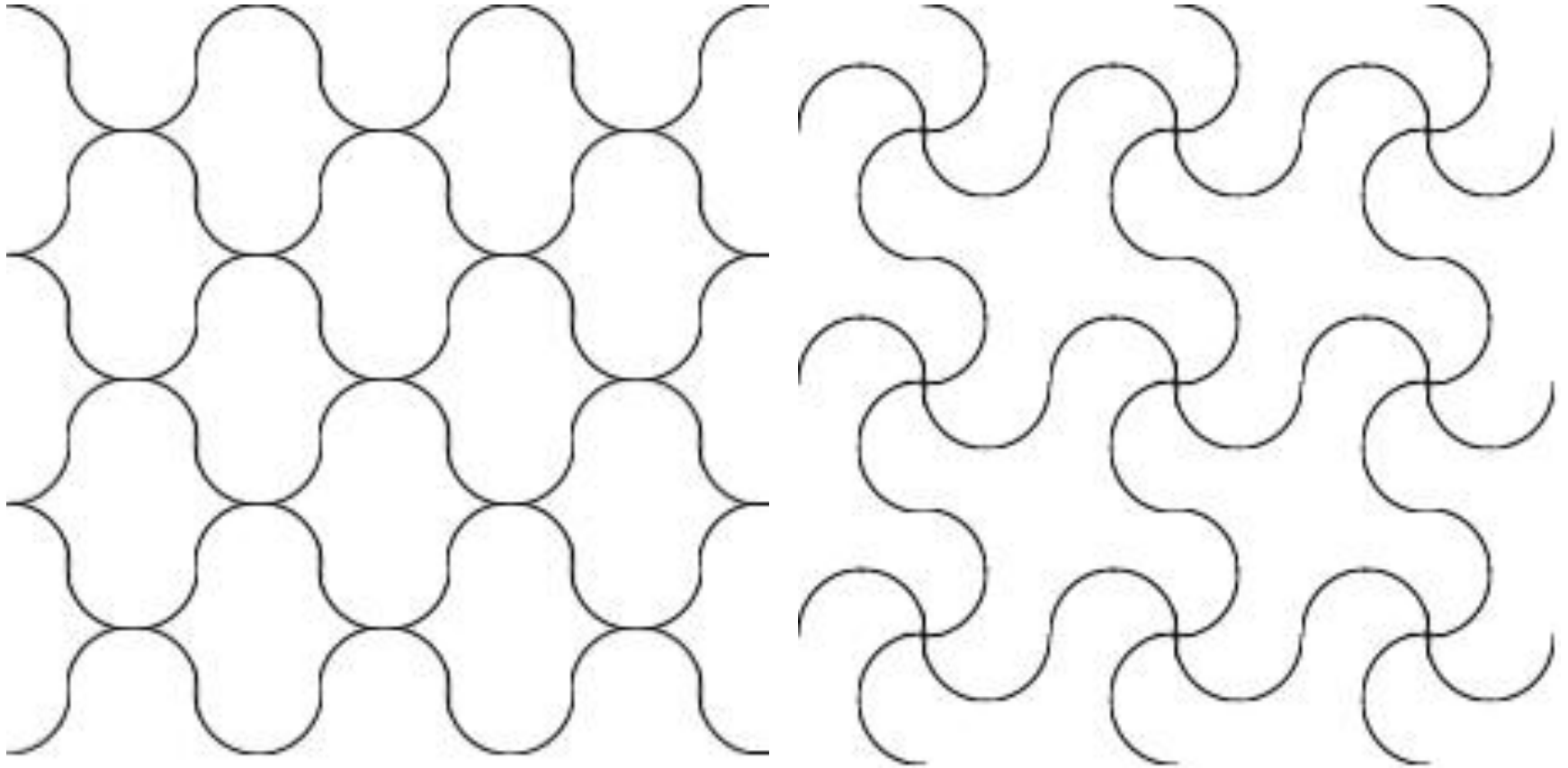
ЗВЕЗДА

2 узора, составленные из криволинейных 4-угольников с периметром 2π и площадью 2 единицы типа лепестков и Кость .



Новые варианты замощений можно получить, увеличив число дуг 90° в контурах граней. На следующем рисунке показаны 2 узора сашико, где контуры граней образуют, соответственно, 8 и 16 дуг 90° .

АМИМОН – слева, ЧИДОРИ ЦУНАГИ – справа.

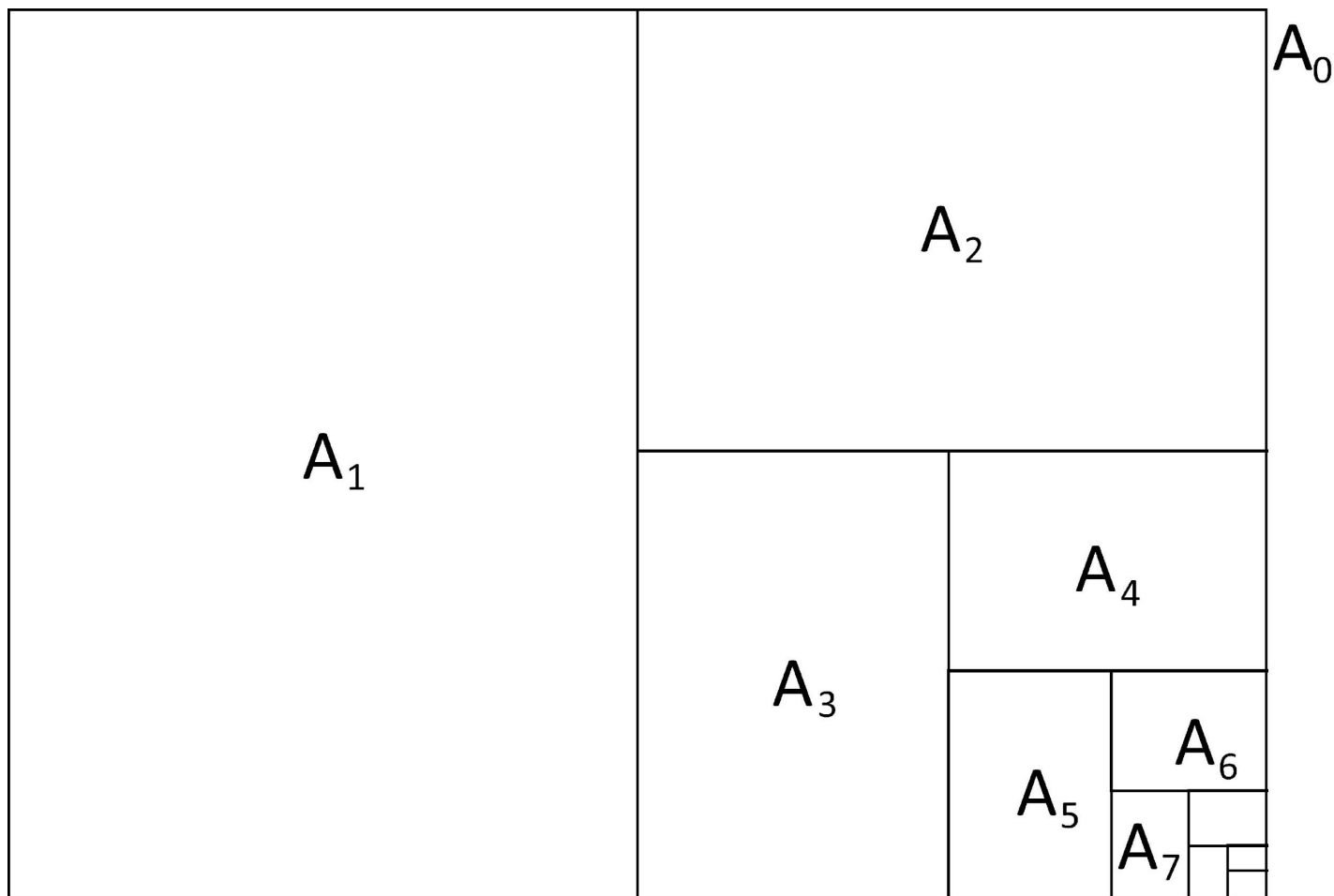


ЗАМОЩЕНИЕ ПЛОСКИХ ФИГУР

Бесконечное замощение неограниченной плоскости образует конечное число типов граней, которые могут повторяться произвольно много раз. Замощение плоских фигур с конечным размером может быть построено из бесконечного набора однотипных граней, габариты которых образуют монотонно убывающий ряд. Ниже рассмотрено построение бесконечных замощений для прямоугольника и квадрата.

Бесконечное замощение прямоугольника образует следующая последовательность его рекурсивных делений. Сначала исходный прямоугольник нужно разделить по большей стороне на 2 прямоугольника, которые подобны исходному и имеют площадь в 2 раза меньше, чем у него. Аналогичная процедура рекурсивно повторяется с любой (или с каждой) из полученных половин бесконечное число раз. Ограничив глубину рекурсии произвольным можно получить замощение из изотетичных (одинаково расположенных) прямоугольных плиток, стороны которых параллельны сторонам исходного прямоугольника.

замощение из изотетичных прямоугольных плиток



Половинное деление плиток

В технической практике такой принцип половинного деления плиток прямоугольного замощения применен для стандартизации форматов листов чертежей по ГОСТ 2.301-68. для справки размеры и обозначения их основных форматов представлены в следующей таблице.

Обозначения формата	44(A1)	24(A1)	22(A2)	12(A3)	11(A4)
Размеры формата	1189×841	594×841	594×420	297×420	297×210

Половинное деление плиток

Из сравнения размеров и обозначений видно, что основные форматы образуют нормативный ряд, где каждый следующий формат получается делением предыдущего на 2 равные части параллельно меньшей стороне. Цифры обозначения формата показывают кратность его сторон сторонам A4, а их произведения дают число форматов A4, которое нужно для замощения его площади.

Без потери общности можно считать, что площадь исходного прямоугольника (A0) равна 1 м^2 . Тогда формальным обоснование конвергенции замощения является равенство 1 суммы площадей его плиток.

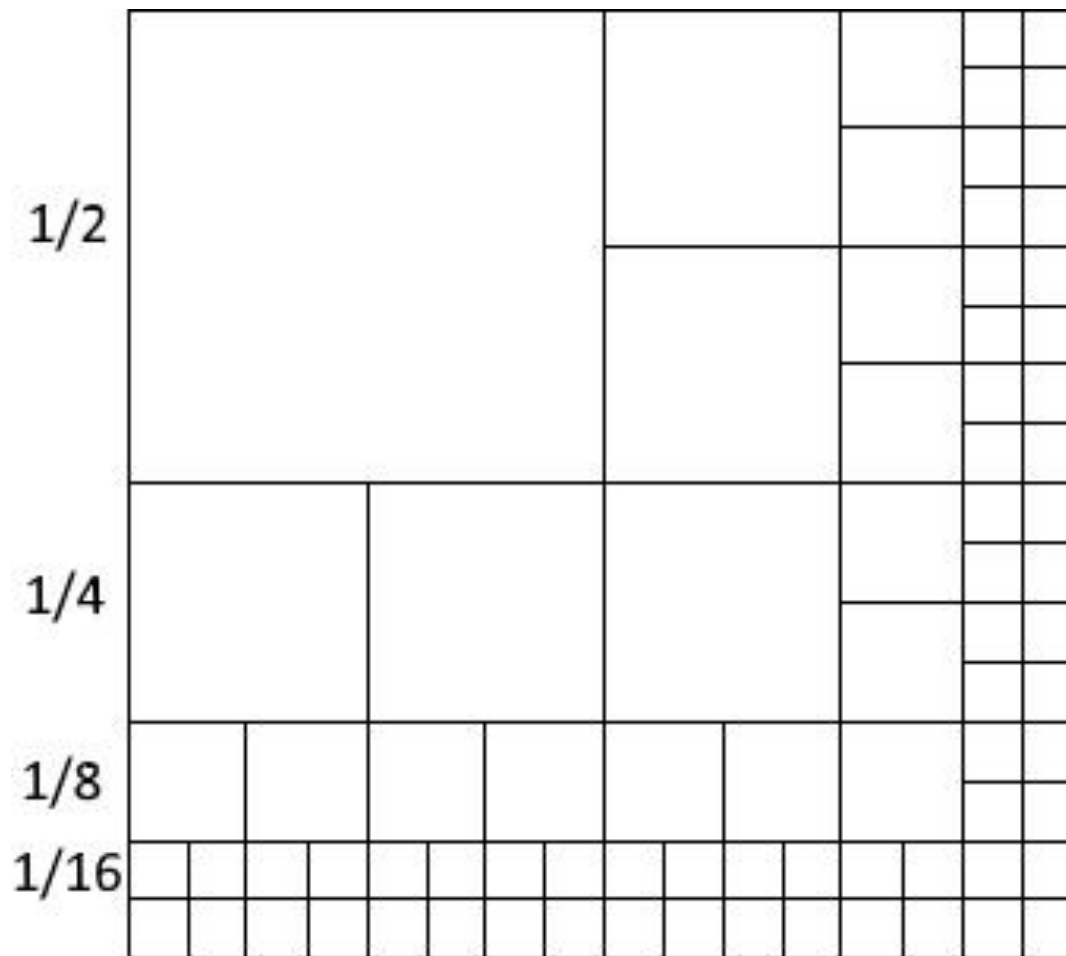
Половинное деление плиток

Они образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем и начальным членом равными $1/2$. как видно из следующей формулы ее сумма равна 1:

$$2^{-1}+2^{-2}+\dots+2^{-n}+\dots=(1/2)/[1-(1/2)]=1.$$

Для бесконечного замощения квадрата используется следующая техника срединных перпендикуляров сторон. Сначала исходный квадрат делится на 4 равных квадрата перпендикулярами его сторон. Каждый из них также делится на 4 квадрата. Далее аналогичным образом на 4 квадрата делится каждый квадрат текущего внешнего слоя, этот процесс может быть продолжен до бесконечности.

Процесс замощения для четверти исходного квадрата до уровня $n = 4$.



Метод бесконечного замощения квадратаа

Если считать длину стороны исходного квадрата равной 1, то стороны квадратов замощения образуют бесконечно убывающую последовательность степеней 2, предел которой равен 0, а сумма равна 1 (как для прямоугольного замощения выше), гарантируя сходимость замощения. Его количественными параметрами являются число квадратов по контуру и внутри каждого уровня n . Четверть числа квадратов замощения a_n по границе каждого уровня n определяют следующие рекуррентные соотношения:

$$a_1 = 1; a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 3.$$

Метод бесконечного замощения квадрата

Чтобы получить итерационную формулу нужно найти сумму разностей соседних элементов рекурсивной последовательности:

$$a_2 - a_1 = a_1 + 3$$

+

$$a_3 - a_2 = 2(a_1 + 3)$$

+

$$a_4 - a_3 = 2^2(a_1 + 3)$$

+

.....

+

$$a_n - a_{n-1} = 2^{n-2} \cdot (a_1 + 3)$$

$$a_n - a_1 = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2})(a_1 + 3)$$

Метод бесконечного замощения квадрата

С учетом значения суммы $(n - 2)$ последовательных степеней 2 и $a_1 = 1$ получается следующая формула числа квадратов канта n каждой четверти этого квадратного замощения:

$$a_n = (2^{n-1} - 1)(1 + 3) + 1 = 2^{n+1} - 3.$$

Например, в каждой четверти на уровне $n = 4$ по этой формуле получается 29 квадратов.

$$a_4 = 2^{4+1} - 3 = 29.$$

Общее число квадратов в каждой четверти до уровня n дает сумма S_n этих значений от 1 до n . В результате опять получается сумма последовательных степеней 2, но со смещением 3 и начиная с 2^2 , как видно из следующего соотношения:

$$S_n = a_1 + \dots + a_n = (2^{n+2} - 1) - 3n - (2^0 + 2^1) = 2^{n+2} - 3n - 4.$$

Метод бесконечного замощения квадрата

В частности общее число квадратов замощения до уровня этой формуле получается равно:

$$4 \cdot S_4 = 4 \cdot (2^{4+2} - 4 - 4 \cdot 3) = 4 \cdot 48 = 192.$$

Рассмотренный метод бесконечного замощения квадрата был предложен известным голландским графиком – формалистом М. Эшером. Он применил его для формирования модельной сетки квадратов, чтобы вписать в них изображения фигур, размер которых должен уменьшаться от центра к краям квадратного холста его гравюры «Предел квадрат».

Аналогичную структуру модельной сетки, размер ячеек которой бесконечно уменьшается на периферии, Эшер применил для замощения круга. Криволинейные многоугольники граней этого замощения ограничены круговыми дугами, которые перпендикулярны контуру круга замощения.