

# Математический анализ

1 семестр

Лекция 9

Лектор: Михайлов Ю. А.  
Кафедра 812

# 1 семестр

Раздел 1. Введение в математический анализ.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Раздел 3. Применение производных к исследованию функций.

Раздел 4. Неопределенный интеграл.

- Формула Тейлора
- Остаточный член в форме Пеано и Лагранжа.
- Разложение элементарных функций по формуле Маклорена.
- Применение формулы Тейлора.

# Формула Тейлора

Формула Тейлора представляет собой приближение функции с помощью многочлена (причем наилучшего среди многочленов не выше данной степени с точки зрения минимизации погрешности).

Формула Тейлора для функции  $f(x)$  выглядит

так:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + r_n,$$

$$\begin{aligned} \text{где } P_n(x, a) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k = \\ &= f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \end{aligned}$$

называется многочленом Тейлора,  $r_n$  называется остаточным членом формулы Тейлора.

При  $a = 0$  формула Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n$$

называется формулой Маклорена.

Очевидно, что для разложения функции  $f(x)$  по формуле Тейлора она должна, как минимум, быть  $n$  раз дифференцируемой в точке  $a$ .

Для остаточного члена (в зависимости от свойств  $f(x)$ ) имеются различные формы записи.

• При минимальных требованиях ( $f(x)$   $n$  раз дифференцируема в окрестности точки  $a$ )  $r_n = \bar{o}((x - a)^n)$  при  $x \rightarrow a$  (остаточный член в форме Пеано).

Если  $f(x)$   $(n + 1)$  раз дифференцируема в окрестности точки  $a$ , то  $r_n = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$ ,

$t$  — некоторая точка между  $x$  и  $a$  (остаточный член в форме Лагранжа).

• Многочлен Тейлора – единственный  
многочлен степени не выше  $n$ , обладающий  
СВОЙСТВОМ

$$P_n^{(k)}(x, a) = f^{(k)}(x) \text{ в точке } a \quad \forall k = 0, 1, \dots, n.$$

Поэтому из правила Лопиталя следует для  
остаточного члена

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x, a)$$



- $$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - P_n'(x, a)}{n(x-a)^{n-1}} = \dots =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x, a)}{n!} = 0,$$

т.е.  $r_n(x) = \bar{o}((x-a)^n)$  при  $x \rightarrow a$ .

Вид  $r_n(x)$  в форме Лагранжа получается из формулы конечных приращений Лагранжа

для  $f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x, a)$  с учётом того, что

$$P_n^{(n+1)}(x, a) = 0.$$

# Разложение элементарных функций

Имеется несколько разложений основных элементарных функций по формуле Маклорена.

1)  $f(x) = e^x$ . Самое простое разложение, так как  $(e^x)^{(k)} = e^x \quad \forall k = 0, 1, \dots$ , поэтому  $f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k = 0, 1, \dots$ .

$$\text{Итак, } e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + r_n.$$

2)  $f(x) = \sin x$ . Тогда  $f^{(k)}(x)$  есть одна из функций  $\cos x$ ,  $-\sin x$ ,  $-\cos x$ ,  $\sin x$  (циклически), т.е.  $f^{(k)}(0) = 0$  для чётных  $k$  и  $\pm 1$  с чередованием — для нечётных.

Отсюда получается формула

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + r_{2n+1}.$$

3)  $f(x) = \cos x$ . Аналогично

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + r_{2n}.$$

4)  $f(x) = \ln(1 + x)$ . Тогда

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2};$$

$$f'''(x) = \frac{(-1)(-2)}{(1+x)^3};$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)(-2) \dots (-k+1)}{(1+x)^k},$$

где при  $x = 0$   $(1+x)^k = 1$ , поэтому

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + r_n.$$

5)  $f(x) = (1 + x)^\alpha$ . Тогда

$$f'(x) = \alpha \cdot (1 + x)^{\alpha-1}; f''(x) = \alpha(\alpha - 1) \cdot$$

$$\cdot (1 + x)^{\alpha-2}; f^{(k)}(x) =$$

$$= \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)(1 + x)^{\alpha-k} \text{ и}$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)}{k!} x^k + r_n.$$

Частным случаем является

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{k=0}^n x^k + r_n$$

(геометрическая прогрессия).

# Пример 1

Разложить по формуле Маклорена функцию

$f(x) = e^{-x^2}$ . Отметим, что находить

коэффициенты разложения по прямым

формулам  $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$  весьма затруднительно.

Однако можно воспользоваться известным

разложением  $e^t = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} + r_n$

при  $t = -x^2$ .

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^n \frac{(-x^2)^k}{k!} + r_{2n} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} + r_{2n}.$$

# Пример 2

Разложить по формуле Маклорена функцию

$$f(x) = x \sin 2x.$$

Так как  $\sin t = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} + r_{2n+1}$ ,

то при  $t = 2x$  получим

$$x \sin 2x = x \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (2x)^{2k+1} + r_{2n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} 2^{2k+1} \cdot x^{2k+2} + r_{2n+2}.$$

# Пример 3

Найти три первых члена разложения по формуле Маклорена функции  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ .

Прямое вычисление производных (с увеличением порядка все более затруднительно) дает:

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0,$$

$$f'''(0) = -2, f^{(4)}(0) = 0, f^{(5)}(0) = 24.$$



Можно доказать, что в разложении нечетной функции по формуле Маклорена

присутствуют только нечетные степени  $x$ ,

т.е.  $f^{(2k)}(0) \forall k = 0, 1 \dots$ , а четная функция

раскладывается только по четным степеням

$x$ . Итак,

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{2}{3!} x^3 + \frac{24}{5!} x^5 + r_5 =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + r_5.$$

Есть, однако, способ получить сразу все разложение этой функции с помощью разложения ее производной

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = \left[ \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^n t^k + r_n \right] = \\ &= \sum_{k=0}^n (-x^2)^k + r_{2n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + r_{2n}. \end{aligned}$$

Так как

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} x^k + r_n,$$

то коэффициенты этого разложения

$$c_k = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!}$$

связаны с коэффициентами разложения

функции

$$f(x): a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Действительно,

$$f^{(k)}(0) = a_k k! = c_{k-1} (k-1)!,$$

и значит,  $a_k = \frac{c_{k-1}}{k}$  ИЛИ  $a_{k+1} = \frac{c_k}{k+1}$

Например, для  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  получим ,

что  $c_{2k} = (-1)^k, c_{2k+1} = 0$ , и тогда

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{2k+1}, a_{2k} = 0, \text{ ПОЭТОМУ}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + r_{2n+1}.$$

# Пример 4

Вычислить с точностью до  $10^{-3}$  значение  $\sqrt{e}$ .

$$e^{1/2} = \left[ e^t = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} + r_n \right] = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k k!} + r_n,$$

где  $r_n = \frac{e^\theta}{(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$  должно удовлетворять

неравенству  $|r_n| < 10^{-3}$ , а число  $\theta \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ ,

при этом  $e^\theta < 1,7$ .

Тогда  $n$  подчиняется условию  $\frac{1,7}{(n+1)!2^{n+1}} < 10^{-3}$ .

Очевидно, достаточно взять  $n = 4$ . Получим

$$\begin{aligned} e^{1/2} &= \sum_{k=0}^4 \frac{1}{2^k k!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4 \cdot 2} + \frac{1}{8 \cdot 6} + \frac{1}{16 \cdot 24} = \\ &= \frac{441}{384} = 1,148. \end{aligned}$$

# Пример 5

Вычислить с точностью до  $10^{-3}$  значение  $\sqrt[5]{33}$ .

Во-первых,  $\sqrt[5]{33} = \sqrt[5]{32 \cdot \frac{33}{32}} = 2 \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{1}{32}}$ .

Во-вторых, функция  $f(x) = (1 + x)^{1/5}$  при  $x = \frac{1}{32}$  может быть разложена по формуле Маклорена

$$(1 + x)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5} - 1\right)x^2 + \dots + \\ + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{5} - n + 1\right)x^n + r_n,$$

где  $r_n = \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)\dots(\frac{1}{5}-n)(1+\theta)^{\frac{1}{5}-n-1}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1};$

$$|r_n| < \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5} \dots \left(\frac{5n-1}{5}\right)}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{32^{n+1}}$$

Выберем  $n$  по условию  $|r_n| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3},$

получается

$n \geq 1.$  При  $n = 1:$

$$\sqrt[5]{33} \approx 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{32}\right) = 2,012.$$

# Пример 6

Использую разложение по формуле  
Маклорена, вычислить предел

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}}{x^4 + x^5} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \bar{o}(x^4)\right) - \frac{x^2}{2}}{x^4 + x^5} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^4}{24} + \bar{o}(x^4)}{x^4 + \bar{o}(x^4)} = -\frac{1}{24}. \end{aligned}$$



# Пример 7

Используя разложение по формуле Маклорена, вычислить предел.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt[4]{1-x}}{x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{4}x + \bar{o}(x) - \left(1 - \frac{1}{4}x + \bar{o}(x)\right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x + \bar{o}(x)}{x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

# Пример 8

Найти предел

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \frac{x^2}{2} - x}{\sin x - x} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \bar{o}(x^3) - 1 - \frac{x^2}{2} - x}{x - \frac{x^3}{3!} + \bar{o}(x^3) - x} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + \bar{o}(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + \bar{o}(x^3)} = -1, \end{aligned}$$

так как при делении числителя и знаменателя на  $x^3$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\bar{o}(x^3)}{x^3} = 0 \text{ по определению } \bar{o}.$$