Математический анализ

1 семестр

Лекция 9

Лектор: Михайлов Ю. А.
Кафедра 812

1 семестр

Раздел 1. Введение в математический анализ.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Раздел 3. Применение производных к исследованию функций.

Раздел 4. Неопределенный интеграл.

- Формула Тейлора
- Остаточный член в форме Пеано и Лагранжа.
- Разложение элементарных функций по формуле Маклорена.
- Применение формулы Тейлора.

Формула Тейлора

Формула Тейлора представляет собой приближение функции с помощью многочлена (причем наилучшего среди многочленов не выше данной степени с точки зрения минимизации погрешности).

Формула Тейлора для функции $f(x)$ выглядит

так:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_n\,,$$

$$\text{где } P_n(x,a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k =$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

называется многочленом Тейлора, r_n называется

остаточным членом формулы Тейлора.

- При $a = 0$ формула Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n$$

называется формулой Маклорена.

Очевидно, что для разложения функции $f(x)$ по формуле Тейлора она должна, как минимум, быть n раз дифференцируемой в точке a.

Для остаточного члена (в зависимости от свойств $f(x)$ имеются различные формы записи.

- При минимальных требованиях ($f(x)$ n раз дифференцируема в окрестности точки a) $r_n = \bar{\bar{o}}\big((x-a)^n\big)$ при $x \to a$ (остаточный член в форме Пеано).

Если $f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в окрестности точки a, то $r_n = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$,

$t -$ некоторая точка между x и a (остаточный член в форме Лагранжа).

- Многочлен Тейлора – единственный многочлен степени не выше n, обладающий свойством

$$P_n^{(k)}(x,a) = f^{(k)}(x) \text{ в точке } a \ \forall\, k = 0, 1, \dots, n.$$

Поэтому из правила Лопиталя следует для остаточного члена

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x,a)$$

- $$\lim_{x\to a}\frac{r_n(x)}{(x-a)^n}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-P_n'(x,a)}{n(x-a)^{n-1}}=\cdots=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)-P_n^{(n)}(x,a)}{n!}=0,$$

т.е. $r_n(x)=\bar{\bar{\text{o}}}\big((x-a)^n\big)$ при $x\to a$.

Вид $r_n(x)$ в форме Лагранжа получается из

формулы конечных приращений Лагранжа

для $f^{(n)}(x)-P_n^{(n)}(x,a)$ с учётом того, что

$$P_n^{(n+1)}(x,a)=0.$$

Разложение элементарных функций

Имеется несколько разложений основных элементарных функций по формуле Маклорена.

1) $f(x) = e^x$. Самое простое разложение,

так как $(e^x)^{(k)} = e^x \ \forall k = 0, 1, \dots,$ поэтому

$f^{(k)}(0) = 1 \ \forall k = 0, 1, \dots$.

$$\text{Итак}, e^x = \sum_{K=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_n.$$

2) $f(x) = \sin x$. Тогда $f^{(k)}(x)$ есть одна из

функций $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$

(циклически), т.е. $f^{(k)}(0) = 0$ для чётных

k и ± 1 с чередованием−для нечётных.

Отсюда получается формула

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + r_{2n+1}.$$

3) $f(x) = \cos x$. Аналогично

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + r_{2n}.$$

4) $f(x) = \ln(1+x)$. Тогда

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2};$$

$$f'''(x) = \frac{(-1)(-2)}{(1+x)^3};$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)(-2)\ldots(-k+1)}{(1+x)^k},$$

где при $x = 0$ $(1+x)^k = 1$, поэтому

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + r_n.$$

5) $f(x) = (1+x)^{\alpha}$. Тогда

$$f'(x) = \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1}; f''(x) = \alpha(\alpha-1) \cdot$$

$$\cdot (1+x)^{\alpha-2};\ f^{(k)}(x) =$$

$$= \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \text{ и}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + r_n.$$

Частным случаем является

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + r_n$$

(геометрическая прогрессия).

Пример 1

Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x) = e^{-x^2}$.Отметим, что находить коэффициенты разложения по прямым формулам $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ весьма затруднительно. Однако можно воспользоваться известным разложением $e^t = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + r_n$

при $t = -x^2$.

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x^2)^k}{k!} + r_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} + r_{2n}.$$

Пример 2

Разложить по формуле Маклорена функцию
$f(x) = x\sin 2x$.

Так как $\sin t = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} + r_{2n+1}$,
то при $t = 2x$ получим

$$x\sin 2x = x\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2x)^{2k+1} + r_{2n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} 2^{2k+1} \cdot x^{2k+2} + r_{2n+2}.$$

Пример 3

Найти три первых члена разложения по формуле Маклорена функции $f(x) = arctg\, x$.

Прямое вычисление производных (с увеличением порядка все более затруднительно) дает:

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0,$$

$$f'''(0) = -2, f^{(4)}(0) = 0, f^{(5)}(0) = 24.$$

Можно доказать, что в разложении нечетной функции по формуле Маклорена присутствуют только нечетные степени x, т.е. $f^{(2k)}(0)$ $\forall k = 0,1 \dots$, а четная функция раскладывается только по четным степеням x. Итак,

$$arctg\, x = x - \frac{2}{3!}\, x^3 + \frac{24}{5!}\, x^5 + r_5 =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + r_5.$$

Есть, однако, способ получить сразу все разложение этой функции с помощью разложения ее производной

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \left[\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} t^k + r_n\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k + r_{2n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + r_{2n}.$$

Так как

$$f\,'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} x^k + r_n,$$

то коэффициенты этого разложения

$$c_k = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!}$$

связаны с коэффициентами разложения

функции

$$f\ (x)\colon a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Действительно,

$$f^{(k)}(0) = a_k k! = \mathrm{c}_{k-1}(k-1)!\,,$$

и значит, $a_k = \frac{\mathrm{c}_{k-1}}{k}$ или $a_{k+1} = \frac{\mathrm{c}_k}{k+1}$

Например, для $f(x) = arctg\ x$ получим ,

что $c_{2k} = (-1)^k, c_{2k+1} = 0$, и тогда

$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{2k+1}, a_{2k} = 0$, поэтому

$$arctgx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + r_{2n+1}.$$

Пример 4

Вычислить с точностью до 10^{-3} значение $\sqrt{e}$.

$$e^{1/2} = \left[e^t = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + r_n \right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} + r_n \, ,$$

где $r_n = \frac{e^\theta}{(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ должно удовлетворять

неравенству $|r_n| < 10^{-3}$, а число $\theta \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$,

при этом $e^\theta < 1{,}7$.

Тогда n подчиняется условию $\frac{1{,}7}{(n+1)!2^{n+1}} < 10^{-3}$.

Очевидно, достаточно взять $n = 4$. Получим

$$e^{1/2} = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{2^k k!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4 \cdot 2} + \frac{1}{8 \cdot 6} + \frac{1}{16 \cdot 24} =$$

$$= \frac{441}{384} = 1{,}148.$$

Пример 5

Вычислить с точностью до 10^{-3} значение $\sqrt[5]{33}$.

Во-первых, $\sqrt[5]{33} = \sqrt[5]{32 \cdot \frac{33}{32}} = 2 \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{1}{32}}$.

Во-вторых, функция $f(x) = (1 + x)^{1/5}$ при $x = \frac{1}{32}$

может быть разложена по формуле Маклорена

$$(1 + x)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5} - 1\right)x^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{5} - n + 1\right)x^n + r_n,$$

где $r_n = \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\dots\left(\frac{1}{5}-n\right)(1+\theta)^{\frac{1}{5}-n-1}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$;

$$|r_n| < \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5} \cdots \left(\frac{5n-1}{5}\right)}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{32^{n+1}}$$

Выберем n по условию $|r_n| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$,

получается

$n \geq 1$. При $n = 1$:

$$\sqrt[5]{33} \approx 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{32}\right) = 2,012.$$

Пример 6

Используя разложение по формуле Маклорена, вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\frac{x^2}{2}}{x^4+x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\bar{\bar{o}}(x^4)\right)-\frac{x^2}{2}}{x^4+x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{24}+\bar{\bar{o}}(x^4)}{x^4+\bar{\bar{o}}(x^4)}=-\frac{1}{24}.$$

Пример 7

Используя разложение по формуле Маклорена, вычислить предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt[4]{1-x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{4}x+\bar{\bar{o}}(x)-\left(1-\frac{1}{4}x+\bar{\bar{o}}(x)\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x+\bar{\bar{o}}(x)}{x}=\frac{1}{2}.$$

Пример 8

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1-\frac{x^{2}}{2}-x}{\sin x-x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\bar{\bar{o}}(x^{3})-1-\frac{x^{2}}{2}-x}{x-\frac{x^{3}}{3!}+\bar{\bar{o}}(x^{3})-x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^{3}}{6}+\bar{\bar{o}}(x^{3})}{-\frac{x^{3}}{6}+\bar{\bar{o}}(x^{3})}=-1,$$

так как при делении числителя и знаменателя на x^{3}

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\bar{\bar{o}}(x^{3})}{x^{3}}=0$ по определению $\bar{\bar{o}}$.