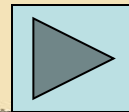


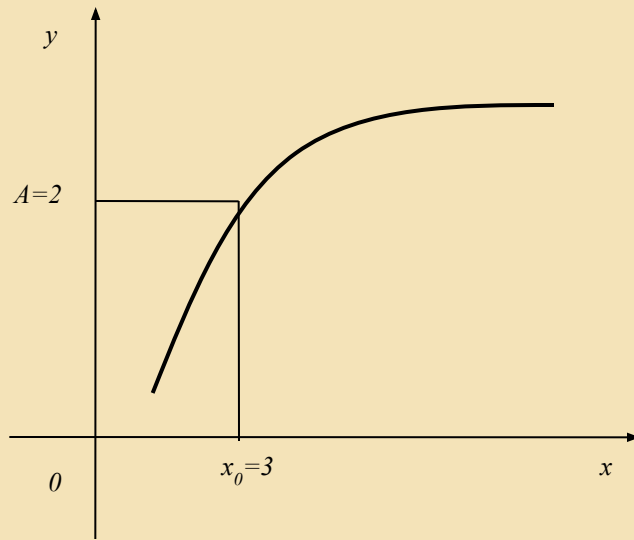
# Теория пределов

- Понятие предела
- Предел функции в точке
- Теоремы о пределах
- Замечательные пределы
- Бесконечно малые функции



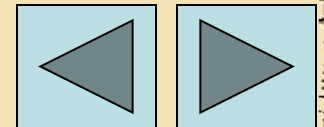
## Понятие предела

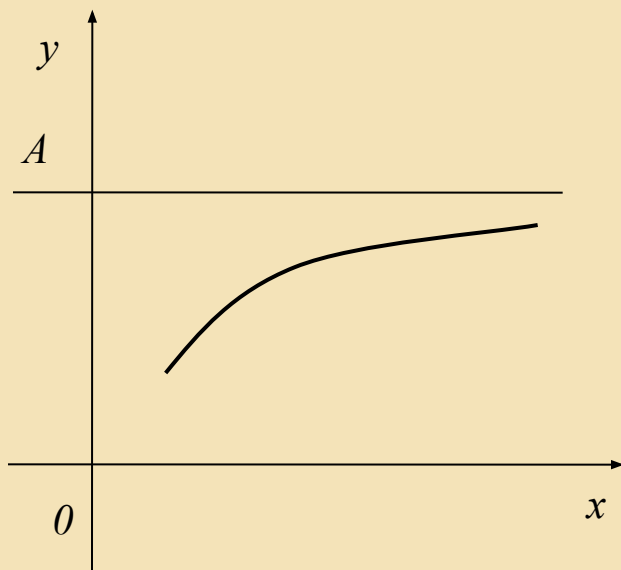
Рассмотрим функцию непрерывного аргумента  $y = f(x)$ . Проиллюстрируем понятие предела функции на примерах.



При приближении значения аргумента к числу  $x_0 = 3$  ( $x \rightarrow 3$ ), значение функции приближается к числу  $A = 2$  как угодно близко (в данном примере даже становится равной 2). Записывается это так:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$  или в общем случае:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

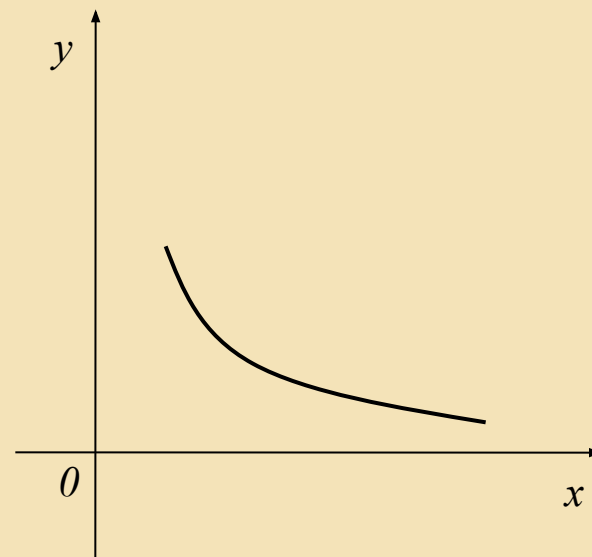




При неограниченном увеличении значения  $x$  ( $x \rightarrow \infty$ ) значение функции приближается к конечному числу  $A$ .

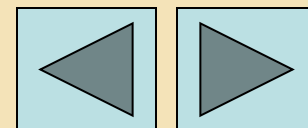
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

Прямая  $y = A$  является горизонтальной асимптотой к кривой  $y = f(x)$ .



Аргумент  $x$  неограниченно увеличивается ( $x \rightarrow \infty$ ) и значение функции при этом стремится к нулю:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$



## Теоремы о пределах

**Теорема 1.** Предел суммы функций  $f(x)$  и  $g(x)$

при  $x \rightarrow +\infty$  равен сумме их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

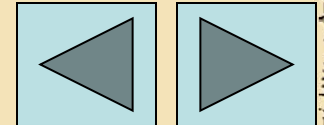
**Теорема 2.** Предел произведения функций  $f(x)$  и  $g(x)$

при  $x \rightarrow +\infty$  равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

**Следствие.** Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Cf(x) = C \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$



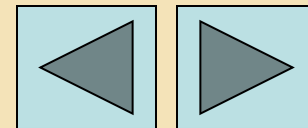
**Теорема 3.** Если предел знаменателя  $g(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  отличен от нуля, то предел дроби при  $x \rightarrow +\infty$  равен отношению пределов числителя и знаменателя:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)}$$

### Предел функции в точке

Число  $b$  называется пределом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если разность  $f(x) - b$ , бесконечно малая функция при  $x \rightarrow a$ . Пишут

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$



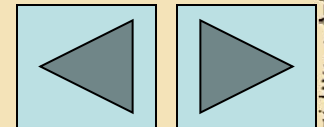
## Пример 1. Вычислим

Решение:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 3x + 8) &= \lim_{x \rightarrow 4} x^2 - \lim_{x \rightarrow 4} 3x + \lim_{x \rightarrow 4} 8 = \\ &= (\lim_{x \rightarrow 4} x)^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 4} x + \lim_{x \rightarrow 4} 8 = 4^2 - 3 \cdot 4 + 8 = 12\end{aligned}$$

## Пример 2. Вычислим

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 7}{x + 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 7)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)} = \frac{2 + 7}{2 + 3} = \frac{9}{5} = 1,8$$



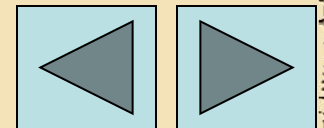
## Раскрытие неопределенностей вида

$$\frac{0}{0} \text{ и } \frac{\infty}{\infty}$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 16} = \frac{4^3 + 1}{4^2 - 16} = \frac{65}{0} = \infty$$

**Вывод:** если числитель дроби  $\frac{f(x)}{g(x)}$  при  $x = a$  отличен от нуля, а ее знаменатель при  $x = a$  обращается в ноль, то предел  $\frac{f(x)}{g(x)}$  при  $x = a$  не существует или равен  $\infty$ .

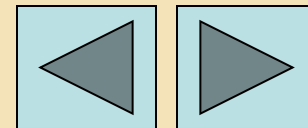


**Пример 3. Вычислим**  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25}$

**Решение:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \left[ \begin{array}{l} D = 36 - 20 = 16 \\ x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2} = 5; 1 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1}{x+5} \\ &= \frac{5-1}{5+5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

**Замечание**  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$   
 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$



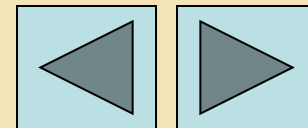


**Пример 4.** Вычислим  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

**Решение:**  $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$



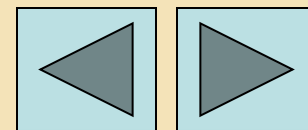
**Пример 5. Вычислим**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x^2 - 1) = \infty^3 + 2 \cdot \infty^2 - 1 = \infty$$

**Пример 6. Вычислим**

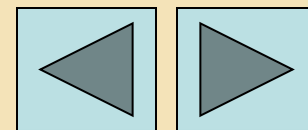
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 3x^2 + 1}{5x^3 + 6x^2 - 7} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left( \frac{4x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left( \frac{5x^3}{x^3} + \frac{6x^2}{x^3} - \frac{7}{x^3} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}}{5 + \frac{6}{x} - \frac{7}{x^3}} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

0      0  
0      0



Пример 7. Вычислим

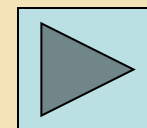
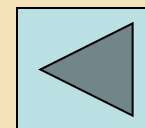
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 6x^2 - 1}{2 - 3x^3 + 7x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \left( \frac{x^4}{x^4} + \frac{6x^2}{x^4} - \frac{1}{x^4} \right)}{x^4 \left( \frac{2}{x^4} - \frac{3x^3}{x^4} + \frac{7x}{x^4} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{6}{x^2} - \frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x^4} - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^3}} = \frac{1}{0} = \infty \end{aligned}$$



**Пример 8. Вычислим**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 1}{4 - 3x^3 + 5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left( \frac{x^2}{x^3} - \frac{6x}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left( \frac{4}{x^3} - \frac{3x^3}{x^3} + \frac{5x}{x^3} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{4}{x^3} - 3 + \frac{5}{x^2}} = \frac{0}{-3} = 0$$

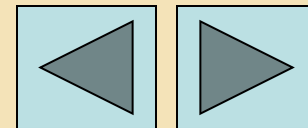


Вообще справедлива следующая теорема:

**Теорема 4. Если числитель и знаменатель алгебраической дроби имеют одинаковые степени, то предел этой дроби при  $x \rightarrow +\infty$  равен отношению коэффициентов при старших членах:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n}{b_n}$$

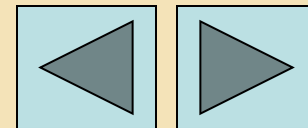
где  $a_n \neq 0, b_n \neq 0$ .



Если же **степень числителя меньше степени знаменателя**, то дробь бесконечно мала при  $x \rightarrow +\infty$ , т.е. **ее предел равен нулю**.

Наконец, **если степень числителя больше степени знаменателя**, то в этом случае предела нет, но говорят, что **дробь стремится к бесконечности** при  $x \rightarrow +\infty$ , и пишут

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$



## Первый и второй замечательные пределы

Большое практическое приложение имеют следующие пределы:

**1-ый замечательный предел:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

**2-й замечательный предел:**

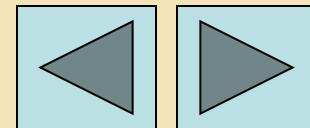
$e=2,72$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

1-я форма

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

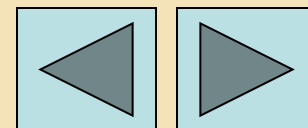
2-я форма



**Пример 1. Вычислим**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5.$$

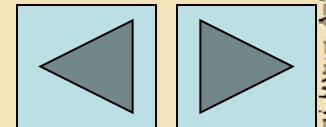
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$





## Пример 2. Вычислим

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 7x}{4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{4x} - \frac{\sin 7x}{4x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{4 \cdot 3x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \sin 7x}{4 \cdot 7x} = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} - \frac{7}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \\ &= \frac{3}{4} \cdot 1 - \frac{7}{4} \cdot 1 = -\frac{4}{4} = -1\end{aligned}$$

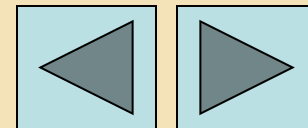


**Пример 3. Вычислим**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{x}{\operatorname{tg} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1 \cdot 1 = 1$$

**Пример 4. Вычислим**

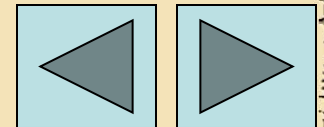
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{5x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{5x^2} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$



## Пример 5. Вычислим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5} \cdot 5} = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}} \right)^5 = e^5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

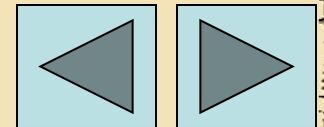


Пример 6. Вычислим

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 7x)^{\frac{9}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (-7x))^{-\frac{1}{7x} \cdot 7 \cdot 9} =$$

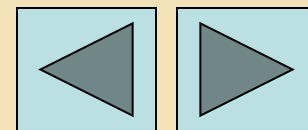
$$= \left( \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (-7x))^{-\frac{1}{7x}} \right)^{-63} = e^{-63}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$



## Пример 7. Вычислим

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{1+2x} \right)^{3x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2x}{2x} \right)^{-3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2x} \right)^{-3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2x} \right)^{2x \cdot \left( -\frac{3}{2} \right)} = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2x} \right)^{2x} \right)^{-\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$



## Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение предела функции
2. Сформулируйте теоремы о пределах
3. Назовите формулы первого и второго замечательных пределов
4. Сформулируйте правила раскрытия неопределенностей

$$\frac{0}{0} \text{ и } \frac{\infty}{\infty}$$

