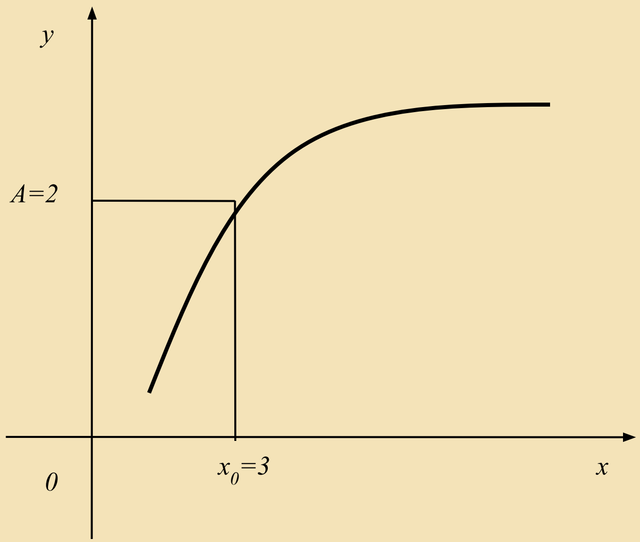
Теория пределов

- Понятие предела
- Предел функции в точке
- Теоремы о пределах
- Замечательные пределы
- Бесконечно малые функции

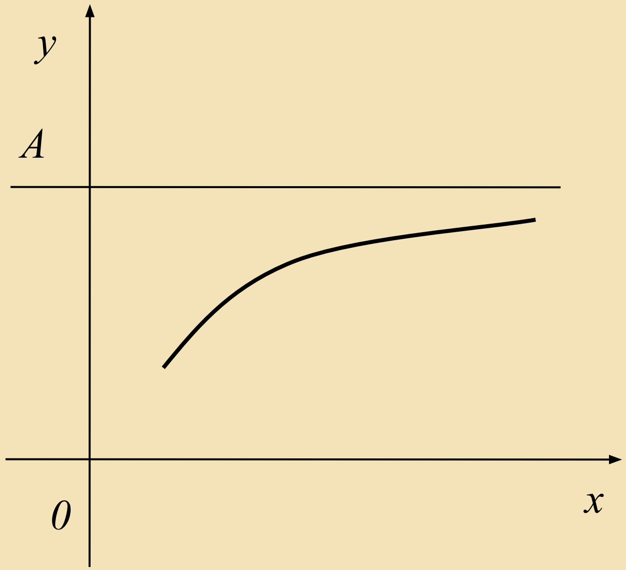
Понятие предела

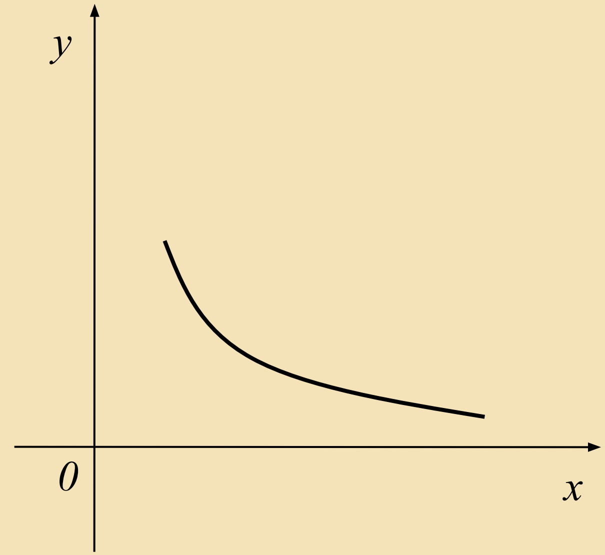
Рассмотрим функцию непрерывного аргумента $y = f(x)$. Проиллюстрируем понятие предела функции на примерах.



При приближении значения аргумента к числу $x_0 = 3$ ($x \to 3$), значение функции приближается к числу $A = 2$ как угодно близко (в данном примере даже становится равной 2). Записывается это так: $\lim f(x) = 2$ или в общем случае:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$





При неограниченном увеличении значения x $(x \to \infty)$ значение функции приближается к конечному числу A.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

Прямая $y = A$ является горизонтальной асимптотой к кривой $y = f(x)$.

Аргумент x неограниченно увеличивается $(x \to \infty)$ и значение функции при этом стремится к нулю:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

Теоремы о пределах

Теорема 1. Предел суммы функций $f(x)$ и $g(x)$

при $x \to +\infty$ равен сумме их пределов:

$$\lim_{x\to+\infty}\bigl(f(x)+g(x)\bigr)=\lim_{x\to+\infty}f(x)+\lim_{x\to+\infty}g(x)$$

Теорема 2. Предел произведения функций $f(x)$ и $g(x)$

при $x \to +\infty$ равен произведению их пределов:

$$\lim_{x\to+\infty}\bigl(f(x)\cdot g(x)\bigr)=\lim_{x\to+\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to+\infty}g(x)$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to+\infty}Cf(x)=C\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

Теорема 3. Если предел знаменателя $g(x)$ при $x \to +\infty$ отличен от нуля, то предел дроби при $x \to +\infty$ равен отношению пределов числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)}$$

Предел функции в точке

Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если разность $f(x) - b$, бесконечно малая функция при $x \to a$. Пишут

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

Пример 1. Вычислим

Решение:

$$\lim_{x\to 4}(x^2-3x+8)=\lim_{x\to 4}x^2-\lim_{x\to 4}3x+\lim_{x\to 4}8=$$

$$=(\lim_{x\to 4}x)^2-3\lim_{x\to 4}x+\lim_{x\to 4}8=4^2-3\cdot 4+8=12$$

Пример 2. Вычислим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+7}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+7)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+3)}=\frac{2+7}{2+3}=\frac{9}{5}=1{,}8$$

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3+1}{x^2-16}=\frac{4^3+1}{4^2-16}=\frac{65}{0}=\infty$$

Вывод: если числитель дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ при *x* = *a* отличен от нуля, а ее знаменатель при *x* = *a* обращается в ноль, то предел $\frac{f(x)}{g(x)}$ при *x* = *a* не существует или равен ∞.

Пример 3. Вычислим $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-25}$

Решение:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-25}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{l} D=36-20=16 \\ x_{1,2}=\dfrac{6\pm 4}{2}=5;1 \end{array}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+5)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-1}{x+5}=$$

$$=\frac{5-1}{5+5}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

Замечание $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2);$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$

Пример 4. Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Решение:

(a-b)(a+b)=a^2-b^2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

Пример 5. Вычислим

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2-1)=\infty^3+2\cdot\infty^2-1=\infty$$

Пример 6. Вычислим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3-3x^2+1}{5x^3+6x^2-7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(\frac{4x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{5x^3}{x^3}+\frac{6x^2}{x^3}-\frac{7}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\overset{0}{\frac{3}{x}}+\overset{0}{\frac{1}{x^3}}}{5+\underset{0}{\frac{6}{x}}-\underset{0}{\frac{7}{x^3}}}=\frac{4}{5}$$

Пример 7. Вычислим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+6x^2-1}{2-3x^3+7x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(\frac{x^4}{x^4}+\overbrace{\frac{6x^2}{x^4}}^{0}-\overbrace{\frac{1}{x^4}}^{0}\right)}{x^4\left(\underbrace{\frac{2}{x^4}}_{0}-\underbrace{\frac{3x^3}{x^4}}_{0}+\underbrace{\frac{7x}{x^4}}_{0}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x^4}-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^3}}=\frac{1}{0}=\infty$$

Пример 8. Вычислим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+1}{4-3x^3+5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{x^2}{x^3}-\frac{6x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{4}{x^3}-\frac{3x^3}{x^3}+\frac{5x}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{4}{x^3}-3+\frac{5}{x^2}}=\frac{0}{-3}=0$$

Вообще справедлива следующая теорема:

Теорема 4. **Если числитель и знаменатель алгебраической дроби имеют одинаковые степени**, то **предел этой дроби при $x \to +\infty$ равен отношению коэффициентов при старших членах:**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n}{b_n}$$

где $a_n \neq 0,\ b_n \neq 0.$

Если же ***степень числителя меньше степени знаменателя***, то дробь бесконечно мала при $x \to +\infty$, т.е. ***ее предел равен нулю***.

Наконец, ***если степень числителя больше степени знаменателя***, то в этом случае предела нет, но говорят, что ***дробь стремится к бесконечности*** при $x \to +\infty$, и пишут

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Первый и второй замечательные пределы

Большое практическое приложение имеют следующие пределы:

1-ый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$$

2-й замечательный предел:

***e*=2,72**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

1-я форма

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

2-я форма

Пример 1. Вычислим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Пример 2. Вычислим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin 7x}{4x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{4x}-\frac{\sin 7x}{4x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{4\cdot 3x}-\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{4\cdot 7x}=\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}-\frac{7}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot 1-\frac{7}{4}\cdot 1=-\frac{4}{4}=-1$$

Пример 3. Вычислим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{tg^2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{tgx}\cdot\frac{x}{tgx}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x}{tgx}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{tgx}=1\cdot1=1$$

Пример 4. Вычислим

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{5x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{5x^2}=\frac{1}{5}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{5}\cdot1\cdot1=\frac{1}{5}$$

Пример 5. Вычислим

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}\cdot 5}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}}\right)^{5}=e^{5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Пример 6. Вычислим

$$\lim_{x\to 0}(1-7x)^{\frac{9}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+(-7x))^{-\frac{1}{7x}\cdot 7\cdot 9}=$$

$$=(\lim_{x\to 0}(1+(-7x))^{-\frac{1}{7x}})^{-63}=e^{-63}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

Пример 7. Вычислим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{2x}\right)^{-3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{-3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{-\frac{3}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение предела функции
2. Сформулируйте теоремы о пределах
3. Назовите формулы первого и второго замечательных пределов
4. Сформулируйте правила раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0} и \frac{\infty}{\infty}$