

# Аналіз моделі лісостану з континуальною розмірною структурою на основі рівнянь фон Форстера

Підготували студенти групи ОМ-4: Колодійчук Дмитро,  
Кравець Анна



# Модель на основі рівняння фон Форстера

Рівняння фон Форстера:

$$\partial_t u(t, s) = -\partial_s (g(R, s)u(t, s)) - \mu(R, s)u(t, s)$$

$$\text{З КУ } u(t, s_-)g(R, s_-) = \int_{s_-}^{+\infty} b(R, s)u(t, s) ds$$

Позначимо  $A(t)$  – к-ть дорослих особин. Зробимо наступні припущення:

$$g(R, s) = f(A(t))$$

$$\mu(R, s) = \mu(s) \text{ – не залежить від к-ті ресурсу (світла)}$$

# Модель на основі рівняння фон Форстера

За таких припущень модель динаміки популяції 1-видового лісостану матиме вигляд:

$$\partial_t u(t, s) + f(A(t))\partial_s u(t, s) = -\mu(s)u(t, s), \quad t > 0, \quad s > s_- \quad (1)$$

$$\text{З КУ: } u(t, s_-)f(A(t)) = \beta b(A(t)), \quad t > 0$$

$$\text{З ПУ: } u(0, \cdot) = u_0(\cdot) \in L_1(s_-, +\infty)$$

Як визначають ф-її  $\mu$ ,  $f$ ,  $b$ ?

$f$  можна визначати наступним чином:  $f(x) = \frac{\alpha}{1 + \delta x}$

Дорослим будемо вважати дерево, що досягло розміру  $s^*$

Інтенсивність відмирання визначимо:  $\mu(s) = \begin{cases} \mu_j & s < s^* \\ \mu_A & s > s^* \end{cases}$

$b(x) = xe^{-\zeta x}$  — плодючість

# Модель на основі рівняння фон Форстера

Позначимо  $j(t, s)$  – щільність розподілу молодих дерев розміру  $[s_-, s^*]$

Ураховуючи в (1), що  $A(t) = \int_{s^*}^{+\infty} u(t, s) ds$ , отримаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{dA(t)}{dt} = f(A(t))j(t, s^*) - \mu_A f(A(t)) & t > 0 \\ \partial_t j(t, s) + f(A(t))\partial_s j(t, s) = -\mu_j j(t, s) & s \in [s_-, s^*] \\ u(t, s_-)f(A(t)) = \beta b(A(t)) & t > 0 \\ A(0) = A_0 \geq 0 \\ j(0, s) = j_0(s) & s \in [s_-, s^*] \end{cases} \quad (2)$$

# Виведення функціонального диф. рівн.

З рівняння (1) бачимо, що при  $\frac{ds}{dt} = f(A(t))$ , рівняння перетворюється на ЗДР

$$s(t) = \int_0^t f(A(\sigma)) d\sigma + C - \text{характеристична крива} \quad (3)$$

Позначимо  $t^*$  - такий час, що  $\int_0^{t^*} f(A(\sigma)) d\sigma = s^* - s_-$

Припускаючи,  $s - s_- \leq \int_0^t f(A(\sigma)) d\sigma$ , оберемо  $T(t, s)$ , що

$$\int_{t-T(t,s)}^t f(A(\sigma)) d\sigma = s - s_-$$

# Виведення функціонального диф. рівн.

Використовуючи (3), можна отримати

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u \left( t, \int_0^t f(A(\sigma)) d\sigma + C \right) &= \partial_t u(, ) + f(A(t)) \partial_s u(, ) = \\ &= -\mu \left( \int_0^t f(A(\sigma)) d\sigma + C \right) u(, ) \quad - \text{ЗДР, розв'язуючи яке,} \end{aligned}$$

з використанням ПУ та КУ, маємо формулу (4):

$$u(t, s) = \begin{cases} u_0 \left( s - \int_0^t f(A(\sigma)) d\sigma \right) \exp \left( - \int_0^t \mu \left( s - \int_0^t f(A(\sigma)) d\sigma + \int_0^l f(A(\sigma)) d\sigma \right) dl \right) \\ \text{при } s - s_- > \int_0^t f(A(\sigma)) d\sigma \\ \frac{\beta b(A(t-T(t,s)))}{f(A(t-T(t,s)))} \exp \left( - \int_{t-T(t,s)}^t \mu \left( s_- + \int_{t-T(t,s)}^l f(A(\sigma)) d\sigma \right) dl \right) \\ \text{інакше} \end{cases}$$

## Виведення функціонального диф. рівн.

Для  $s^* < s_- + \int_0^t f(A(\sigma))d\sigma$  можна позначити  $\tau(t) = T(t, s^*)$ , тоді

$$\int_{t-\tau(t)}^t f(A(\sigma))d\sigma = s^* - s_-$$

Також нехай  $t^*$  - таке, що  $\int_0^{t^*} f(A(\sigma))d\sigma = s^* - s_-$

З (4) маємо

$$u(t, s^*) = \begin{cases} u_0 \left( s^* - \int_0^t f(A(\sigma))d\sigma \right) e^{-\mu_j t} & \text{при } t^* > t \\ \frac{\beta b(A(t-\tau(t)))}{f(A(t-\tau(t)))} e^{-\mu_j \tau(t)} & \text{при } t^* \leq t \end{cases} \quad (5)$$



## Виведення функціонального диф. рівн.

Підставимо (5) у (2), отримаємо ФДР для  $t > t^*$

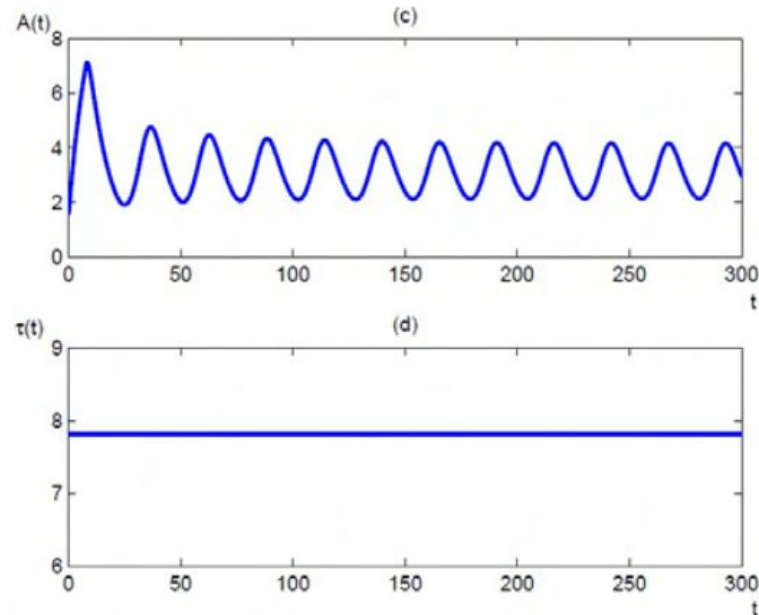
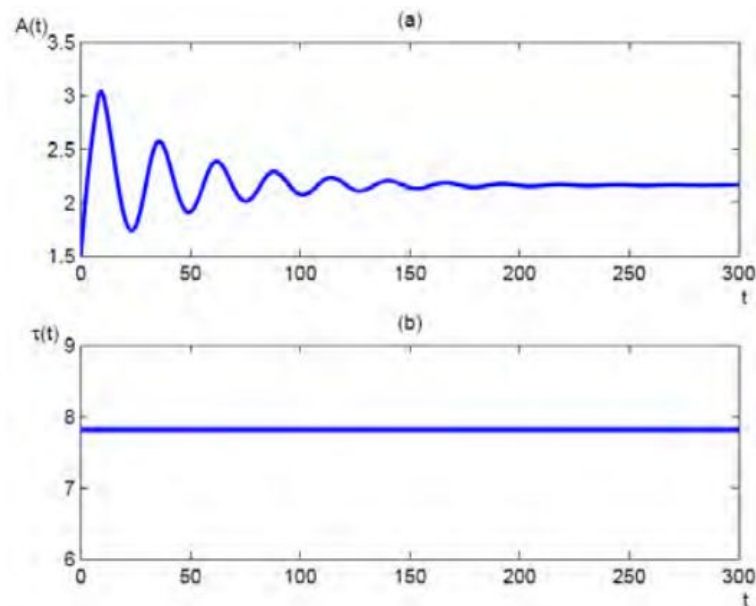
$$\begin{cases} \frac{dA(t)}{dt} = e^{-\mu_j \tau(t)} \frac{f(A(t))}{f(A(t-\tau(t)))} \beta b(A(t-\tau(t))) - \mu_A A(t) \\ \int_{t-\tau(t)}^t f(A(\sigma)) d\sigma = s^* - s_- \end{cases} \quad (6)$$

Продиференціювавши останнє рівн. у (6) по  $t$ , одержуємо систему

$$\begin{cases} A'(t) = e^{-\mu_j \tau(t)} \frac{f(A(t))}{f(A(t-\tau(t)))} \beta b(A(t-\tau(t))) - \mu_A A(t) \\ \tau'(t) = 1 - \frac{f(A(t))}{f(A(t-\tau(t)))} \end{cases} \quad (7)$$

ПУ:  $A(t) = A_0(t) \geq 0, \forall t \in (-\infty, 0]; \tau(0) = \tau_0 \geq 0$ ,  
де  $A_0(t)$  – неперервна та експоненційно обмежена, тобто  
 $\sup_{t \leq 0} e^{\nu t} A_0(t) < +\infty$ , для деякого  $\nu > 0$ .

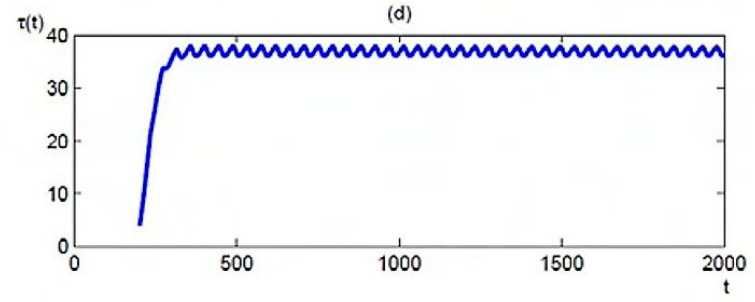
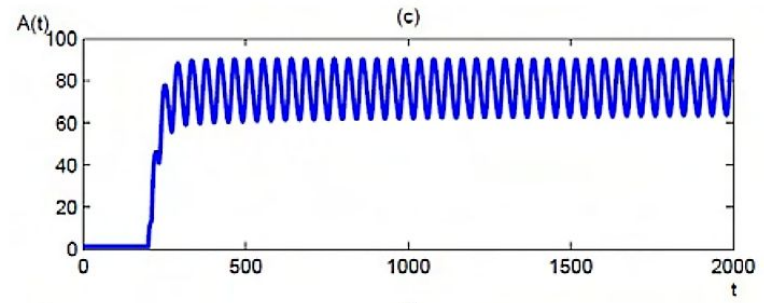
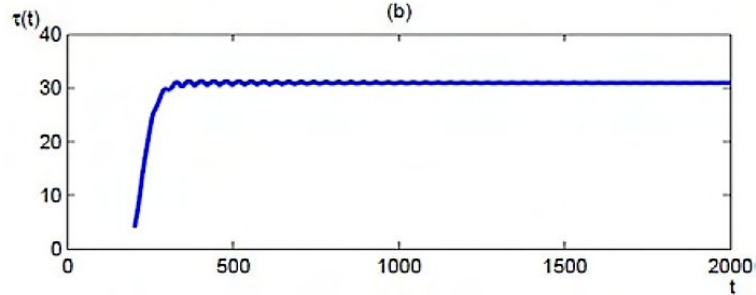
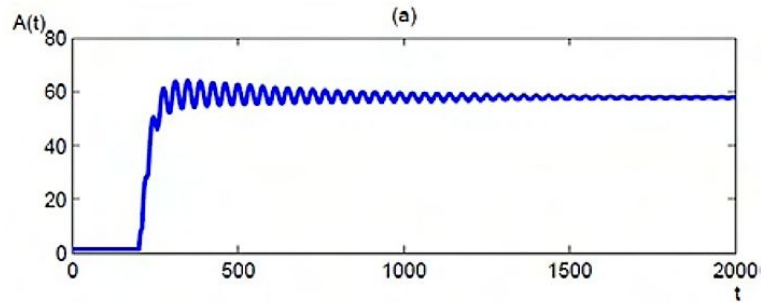
# Чисельне моделювання



Результати моделювання (6) при  $f(x) \equiv 0.5$ ,  $b(x) = xe^{-x}$ ,  $\mu_j = 0.2$ ,  $\mu_A = 0.1$ ,  
 $s^* = \ln 50$ ,  $s_- = 0$ ,  $A_0(t) = 1.5, \forall t \in [-100, 0]$ .

У (а) та (б)  $\beta = 9$ , а у (с) та (д)  $\beta = 25$  (біфуркація Гопфа).

# Чисельне моделювання



Результати моделювання (6) при  $f(x) = \frac{0.5}{1 + 0.1x}$ ,  $b(x) = x$ ,  $\mu_j = \mu_A = 0.1$ ,  $\tau_0 = 4$ ,  
 $A_0(t) = 1.5, \forall t \in [0, 200]$ .

У (a) та (b)  $\beta = 2.2$  (затухаючі коливання), а у (c) та (d)  $\beta = 4$  (біфуркація Гопфа).

# Порівняння з симулятором SORTIE

Порівняння результатів чисельного моделювання та симуляції SORTIE для популяції американського буку.

МНК були встановлені наступні параметри:

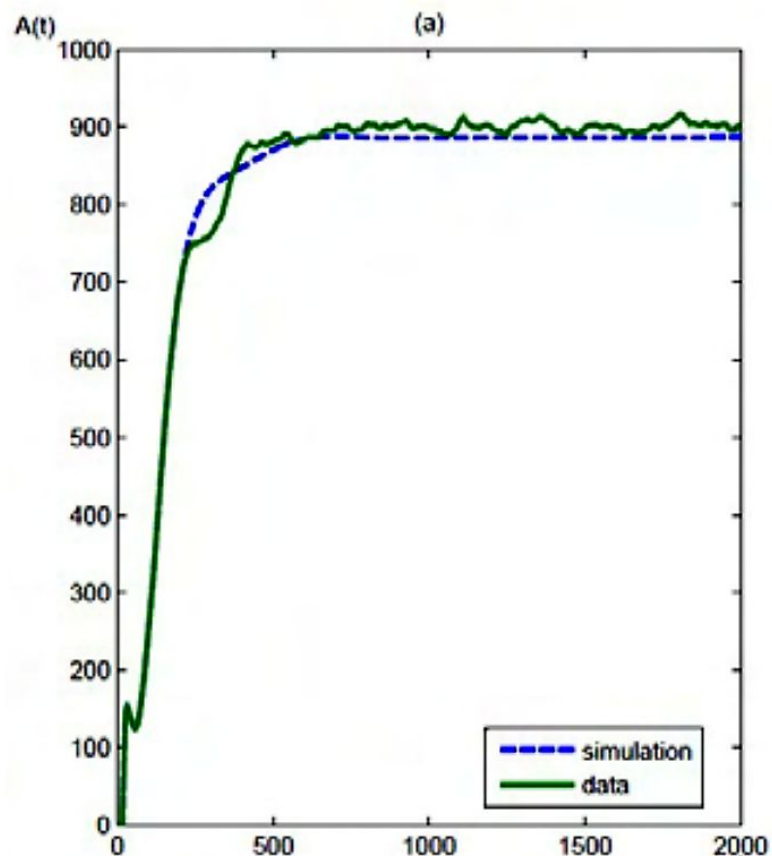
$\mu_j = 0.03$  – інтенсивність відмирання молодих дерев

$\mu_A = 0.001$  – інтенсивність відмирання дорослих дерев

$\beta = 2$  – плодючість

$\alpha = 0.1709$  – швидкість росту за відсутності дорослих

$\delta = 0.1$



# Порівняння з симулятором SORTIE

Порівняння результатів чисельного моделювання та симуляції SORTIE для популяції тсуги.

МНК були встановлені наступні параметри:

$\mu_j = 0.031$  — інтенсивність відмирання молодих дерев

$\mu_A = 0.0037$  — інтенсивність відмирання дорослих дерев

$\beta = 4$  — плодючість

$\alpha = 0.249$  — швидкість росту за відсутності дорослих

$\delta = 0.1$

Зауваження: для обох видів  $\zeta = 0$  ( $b(x) = x$ ),  
тобто немає обмежень по появі нащадків

