

Аналіз моделі лісостану з континуальною розмірною структурою на основі рівнянь фон Форстера

Підготували студенти групи ОМ-4: Колодійчук Дмитро,
Кравець Анна



Модель на основі рівняння фон Форстера

Рівняння фон Форстера:

$$\partial_t u(t, s) = -\partial_s(g(R, s)u(t, s)) - \mu(R, s)u(t, s)$$

$$\text{З КУ } u(t, s_-)g(R, s_-) = \int_{s_-}^{+\infty} b(R, s)u(t, s) ds$$

Позначимо $A(t)$ – к-ть дорослих особин. Зробимо наступні припущення:

$$g(R, s) = f(A(t))$$

$$\mu(R, s) = \mu(s) \text{ – не залежить від к-ті ресурсу (світла)}$$

Модель на основі рівняння фон Форстера

За таких припущень модель динаміки популяції 1-видового лісостану матиме вигляд:

$$\partial_t u(t, s) + f(A(t))\partial_s u(t, s) = -\mu(s)u(t, s), \quad t > 0, \quad s > s_- \quad (1)$$

$$\text{З КУ: } u(t, s_-)f(A(t)) = \beta b(A(t)), \quad t > 0$$

$$\text{З ПУ: } u(0, \cdot) = u_0(\cdot) \in L_1(s_-, +\infty)$$

Як визначають ф-її μ , f , b ?

f можна визначати наступним чином: $f(x) = \frac{\alpha}{1 + \delta x}$

Дорослим будемо вважати дерево, що досягло розміру s^*

Інтенсивність відмирання визначимо: $\mu(s) = \begin{cases} \mu_j & s < s^* \\ \mu_A & s > s^* \end{cases}$

$b(x) = xe^{-\zeta x}$ — плодючість

Модель на основі рівняння фон Форстера

Позначимо $j(t, s)$ – щільність розподілу молодих дерев розміру $[s_-, s^*]$

Ураховуючи в (1), що $A(t) = \int_{s^*}^{+\infty} u(t, s) ds$, отримаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{dA(t)}{dt} = f(A(t))j(t, s^*) - \mu_A f(A(t)) & t > 0 \\ \partial_t j(t, s) + f(A(t))\partial_s j(t, s) = -\mu_j j(t, s) & s \in [s_-, s^*] \\ u(t, s_-)f(A(t)) = \beta b(A(t)) & t > 0 \\ A(0) = A_0 \geq 0 \\ j(0, s) = j_0(s) & s \in [s_-, s^*] \end{cases} \quad (2)$$

Виведення функціонального диф. рівн.

З рівняння (1) бачимо, що при $\frac{ds}{dt} = f(A(t))$, рівняння перетворюється на ЗДР

$$s(t) = \int_0^t f(A(\sigma)) d\sigma + C - \text{характеристична крива} \quad (3)$$

Позначимо t^* - такий час, що $\int_0^{t^*} f(A(\sigma)) d\sigma = s^* - s_-$

Припускаючи, $s - s_- \leq \int_0^t f(A(\sigma)) d\sigma$, оберемо $T(t, s)$, що

$$\int_{t-T(t,s)}^t f(A(\sigma)) d\sigma = s - s_-$$

Виведення функціонального диф. рівн.

Використовуючи (3), можна отримати

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u \left(t, \int_0^t f(A(\sigma)) d\sigma + C \right) &= \partial_t u(,) + f(A(t)) \partial_s u(,) = \\ &= -\mu \left(\int_0^t f(A(\sigma)) d\sigma + C \right) u(,) \quad - \text{ЗДР, розв'язуючи яке,} \end{aligned}$$

з використанням ПУ та КУ, маємо формулу (4):

$$u(t, s) = \begin{cases} u_0 \left(s - \int_0^t f(A(\sigma)) d\sigma \right) \exp \left(- \int_0^t \mu \left(s - \int_0^t f(A(\sigma)) d\sigma + \int_0^l f(A(\sigma)) d\sigma \right) dl \right) \\ \text{при } s - s_- > \int_0^t f(A(\sigma)) d\sigma \\ \frac{\beta b(A(t-T(t,s)))}{f(A(t-T(t,s)))} \exp \left(- \int_{t-T(t,s)}^t \mu \left(s_- + \int_{t-T(t,s)}^l f(A(\sigma)) d\sigma \right) dl \right) \\ \text{інакше} \end{cases}$$

Виведення функціонального диф. рівн.

Для $s^* < s_- + \int_0^t f(A(\sigma))d\sigma$ можна позначити $\tau(t) = T(t, s^*)$, тоді

$$\int_{t-\tau(t)}^t f(A(\sigma))d\sigma = s^* - s_-$$

Також нехай t^* - таке, що $\int_0^{t^*} f(A(\sigma))d\sigma = s^* - s_-$

З (4) маємо

$$u(t, s^*) = \begin{cases} u_0 \left(s^* - \int_0^t f(A(\sigma))d\sigma \right) e^{-\mu_j t} & \text{при } t^* > t \\ \frac{\beta b(A(t-\tau(t)))}{f(A(t-\tau(t)))} e^{-\mu_j \tau(t)} & \text{при } t^* \leq t \end{cases} \quad (5)$$

Виведення функціонального диф. рівн.

Підставимо (5) у (2), отримаємо ФДР для $t > t^*$

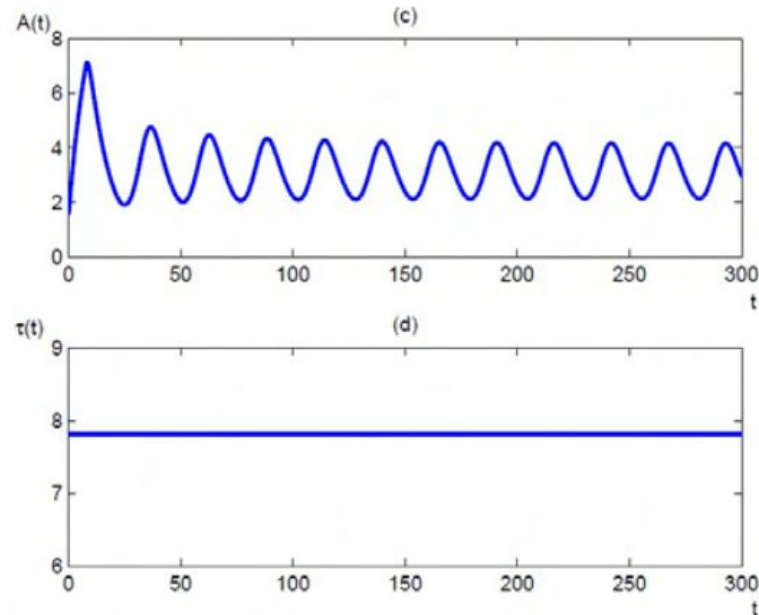
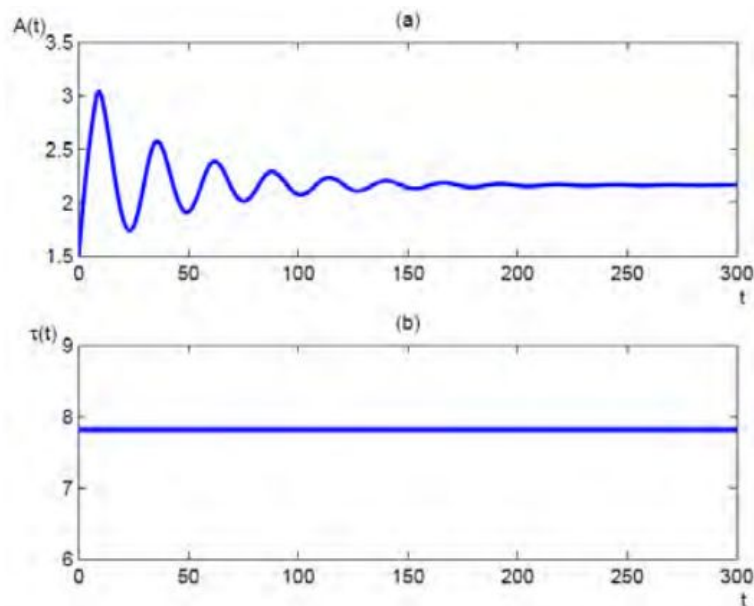
$$\begin{cases} \frac{dA(t)}{dt} = e^{-\mu_j \tau(t)} \frac{f(A(t))}{f(A(t-\tau(t)))} \beta b(A(t-\tau(t))) - \mu_A A(t) \\ \int_{t-\tau(t)}^t f(A(\sigma)) d\sigma = s^* - s_- \end{cases} \quad (6)$$

Продиференціювавши останнє рівн. у (6) по t , одержуємо систему

$$\begin{cases} A'(t) = e^{-\mu_j \tau(t)} \frac{f(A(t))}{f(A(t-\tau(t)))} \beta b(A(t-\tau(t))) - \mu_A A(t) \\ \tau'(t) = 1 - \frac{f(A(t))}{f(A(t-\tau(t)))} \end{cases} \quad (7)$$

ПУ: $A(t) = A_0(t) \geq 0, \forall t \in (-\infty, 0]; \tau(0) = \tau_0 \geq 0$,
де $A_0(t)$ – неперервна та експоненційно обмежена, тобто
 $\sup_{t \leq 0} e^{\nu t} A_0(t) < +\infty$, для деякого $\nu > 0$.

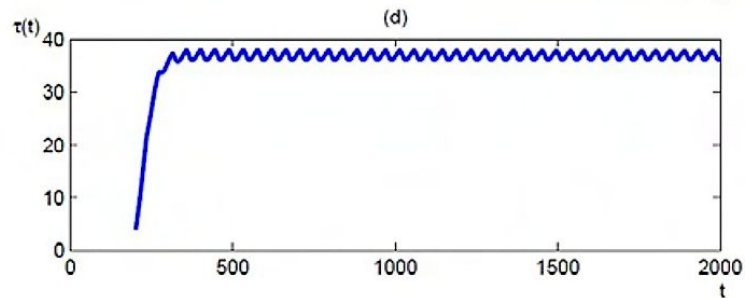
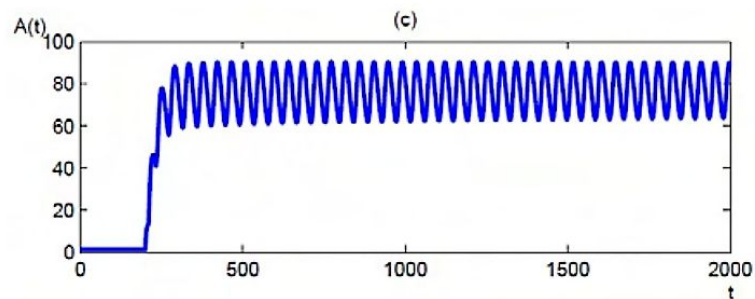
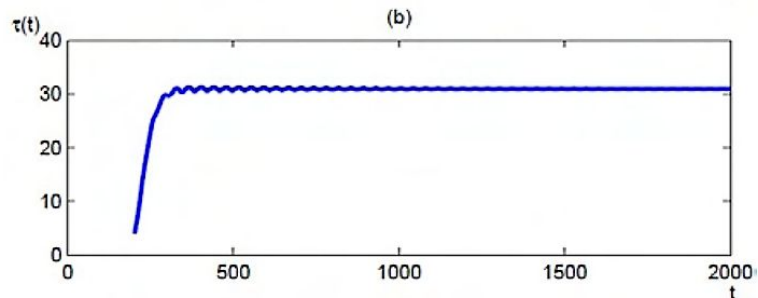
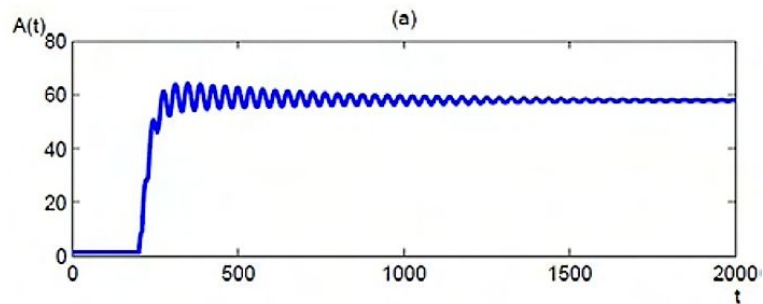
Чисельне моделювання



Результати моделювання (6) при $f(x) \equiv 0.5$, $b(x) = xe^{-x}$, $\mu_j = 0.2$, $\mu_A = 0.1$,
 $s^* = \ln 50$, $s_- = 0$, $A_0(t) = 1.5, \forall t \in [-100, 0]$.

У (а) та (б) $\beta = 9$, а у (с) та (д) $\beta = 25$ (біфуркація Гопфа).

Чисельне моделювання



Результати моделювання (6) при $f(x) = \frac{0.5}{1 + 0.1x}$, $b(x) = x$, $\mu_j = \mu_A = 0.1$, $\tau_0 = 4$,

$$A_0(t) = 1.5, \forall t \in [0, 200].$$

У (a) та (b) $\beta = 2.2$ (затухаючі коливання), а у (c) та (d) $\beta = 4$ (біфуркація Гопфа).

Порівняння з симулятором SORTIE

Порівняння результатів чисельного моделювання та симуляції SORTIE для популяції американського буку.

МНК були встановлені наступні параметри:

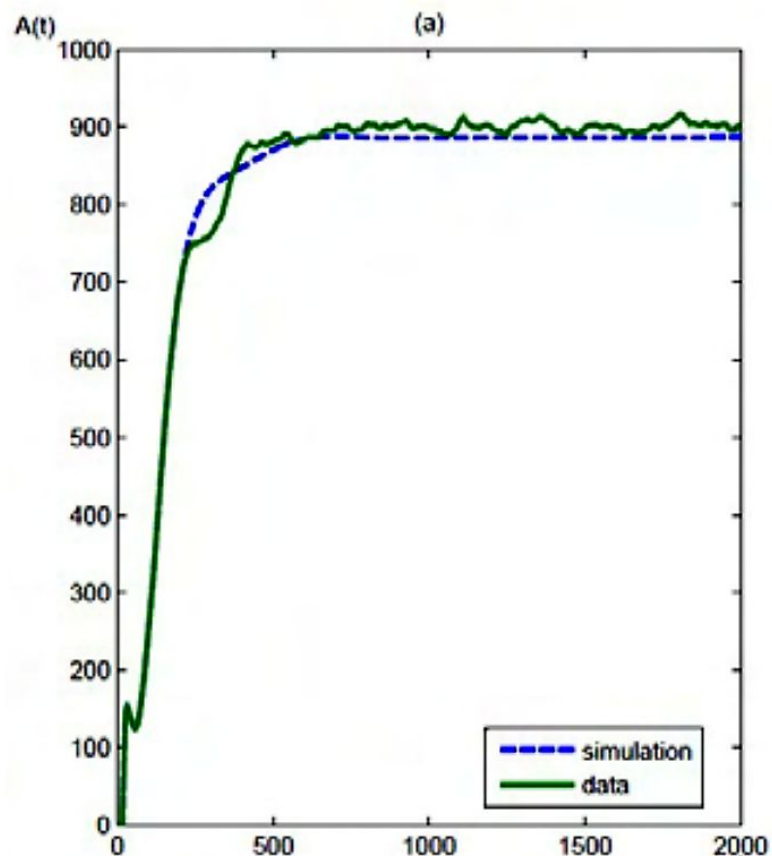
$\mu_j = 0.03$ – інтенсивність відмирання молодих дерев

$\mu_A = 0.001$ – інтенсивність відмирання дорослих дерев

$\beta = 2$ – плодючість

$\alpha = 0.1709$ – швидкість росту за відсутності дорослих

$\delta = 0.1$



Порівняння з симулятором SORTIE

Порівняння результатів чисельного моделювання та симуляції SORTIE для популяції тсуги.

МНК були встановлені наступні параметри:

$\mu_j = 0.031$ — інтенсивність відмирання молодих дерев

$\mu_A = 0.0037$ — інтенсивність відмирання дорослих дерев

$\beta = 4$ — плодючість

$\alpha = 0.249$ — швидкість росту за відсутності дорослих

$\delta = 0.1$

Зауваження: для обох видів $\zeta = 0$ ($b(x) = x$),
тобто немає обмежень по появі нащадків

