

Дискретная математика

ЛЕКЦИЯ 3

Операции над множествами

Основные операции над множествами

Суммой или *объединением* двух множеств X и Y называется множество, состоящее из элементов, входящих или во множество X , или во множество Y , а может в оба множества одновременно (рис. 1.2). Обозначение: $Z = X \cup Y$.

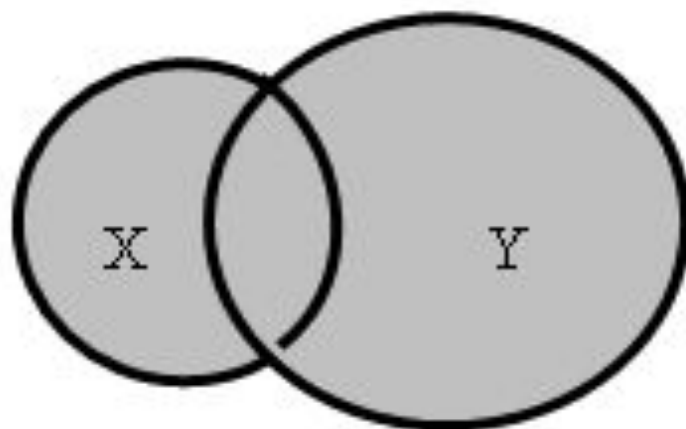


Рис. 1.2

Пересечением множеств X и Y называется множество, состоящее из элементов, входящих одновременно и во множество X , и во множество Y (рис. 1.3). Обозначение: $Z = X \cap Y$.

Разностью множеств X и Y называется множество Z , содержащее все элементы множества X , не содержащиеся в Y (рис. 1.4); эта разность обозначается $Z = X \setminus Y$.

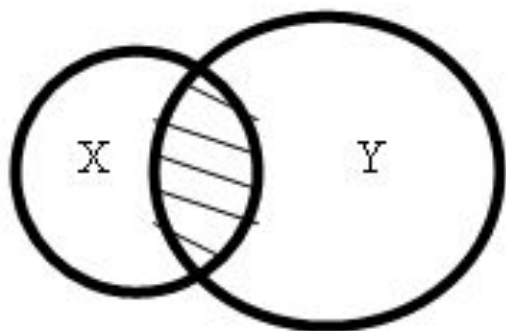


Рис. 1.3

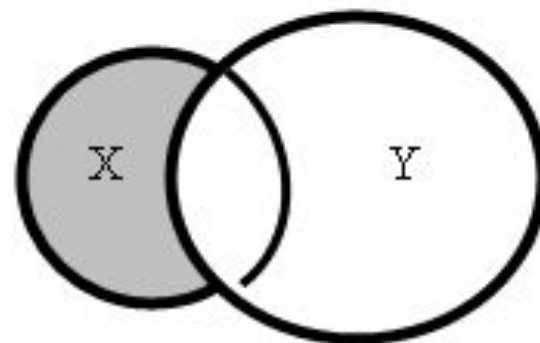


Рис. 1.4

Дополнением \overline{X} множества X до универсального множества U (рис. 1.6) является множество

$$\overline{X} = \{x_i \mid x_i \notin X, x_i \in U\}.$$

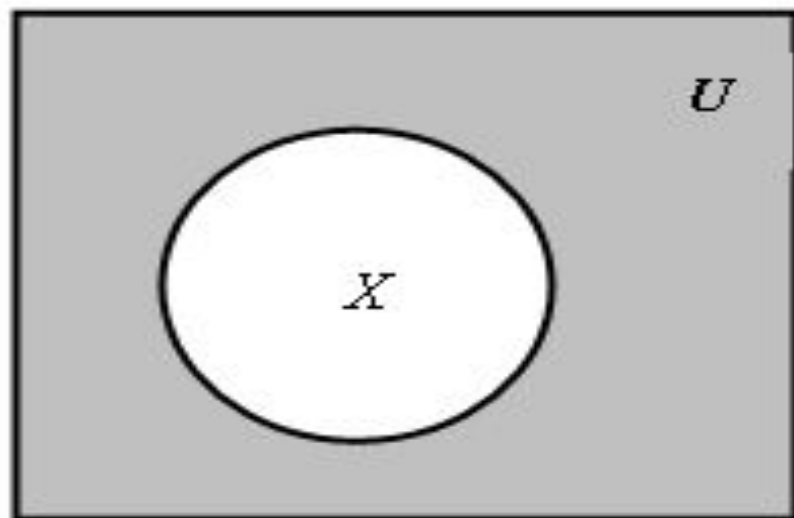


Рис. 1.5

Симметрической разностью множеств X и Y называется множество Z , содержащее **либо** элементы множества X , **либо** элементы множества Y , но не те и другие одновременно (*рис. 1.6*); эта разность обозначается $X \dot{\setminus} Y$.

$$= X \dot{\setminus} Y \quad (X \setminus Y) \sqcup (Y \setminus X)$$

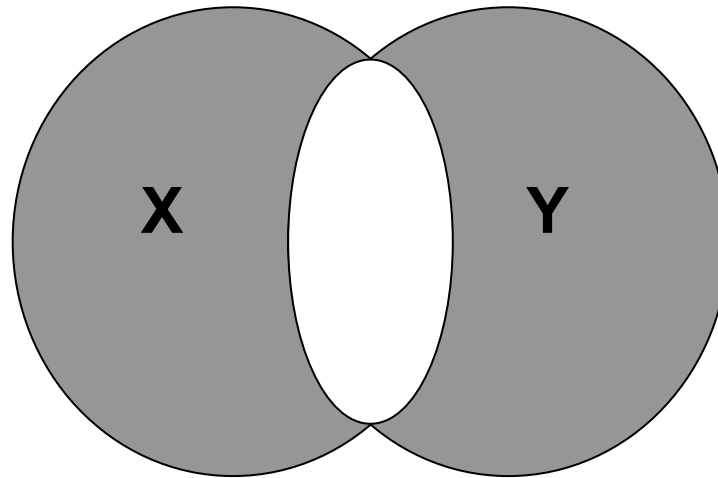
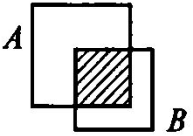
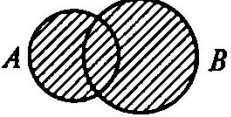
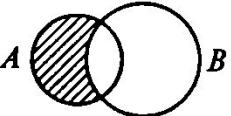
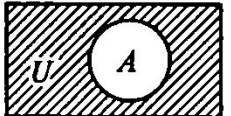
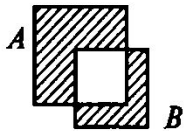


Рис. 1.6.

Основные операции над множествами

Название операции	Обозначение	Изображение кругами Эйлера	Определение	Символическая запись
Пересечение множеств	$A \cap B$		Те и только те элементы, которые принадлежат <i>одновременно</i> A и B	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$
Объединение множеств	$A \cup B$		Те и только те элементы, которые принадлежат <i>хотя бы одному</i> из множеств A и B	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$
Разность множеств	$A \setminus B$		Те и только те элементы множества A , которые <i>не</i> принадлежат B	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$
Дополнение к множеству A	$\bar{A} = A' = U \setminus A$		Те и только те элементы, которые <i>не</i> принадлежат множеству A (т.е. дополняют его до универсального U)	$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\} = U \setminus A$
Симметрическая разность	$A \Delta B$		Те и только те элементы, которые принадлежат одному из множеств: A <i>либо</i> B , но не являются общими элементами	$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Вместо выражения

«любое x из множества X »

можно писать $\forall x \in X$, где перевёрнутая латинская буква \forall взята от начала английского слова **Any** – любой.

Вместо выражения

«существует элемент x из множества X »

кратко пишут: $\exists x \in X$, где перевёрнутая латинская буква \exists является начальной в английском слове **Existence** – существование.

Для операций над множествами справедливы следующие тождества:

- *законы коммутативности объединения и пересечения*

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A,$$

- *законы ассоциативности объединения и пересечения*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

- *законы дистрибутивности пересечения относительно объединения и объединения относительно пересечения*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

- *законы поглощения*

$$A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A;$$

- *законы склеивания*

$$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A, \quad (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A;$$

- *законы Порецкого*

$$A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B, \quad A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B;$$

Операция \cap имеет преимущество перед операцией \cup . Скобки - для наглядности.

- *законы идемпотентности объединения и пересечения* $A \cap A = A, \quad A \cup A = A;$
- *законы действия с универсальным (U) и пустым (\emptyset) множествами*

$$A \cap \emptyset = A, \quad A \cup \emptyset = \emptyset,$$

$$A \cap U = U, \quad A \cup U = A,$$

$$A \cap \bar{A} = U, \quad A \cup \bar{A} = \emptyset;$$

- *законы де Моргана*

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B};$$

- *закон двойного дополнения*

$$\overline{\bar{A}} = A.$$

- Универсальное (U) и пустое (\emptyset) множества являются дополнениями друг друга

$$U = \overline{\emptyset},$$

$$\emptyset = \overline{U},$$

Кортежи. Декартовы произведения

В повседневной жизни и математике нам часто приходится иметь дело с упорядоченными множествами — кортежами.

Слово кортеж переводится с французского *cortège* как торжественная процессия (например, свадебный кортеж).

Треугольник ABC на плоскости задается кортежем из 6 чисел $\langle x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \rangle$

Где $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$

— координаты вершин.

Слова в предложении, буквы в слове, предложения в тексте — все это примеры кортежей.

Двоичный код является кортежем, состоящим из цифр 0 и 1.

Кортежем длины n из элементов множества A называется упорядоченная последовательность $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ элементов этого множества.

Кортежи $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ и $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ называются **равными**, если они имеют одинаковую длину и их элементы с одинаковыми номерами совпадают, т. е.

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle \quad \text{и} \quad (k = n)$$

$\forall i \quad a_i = b_i.$

Например, равны кортежи

$$\langle 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 \rangle = \langle 2, 4, 8, 16, 32 \rangle$$

так как оба кортежа длины 5 и равны все пары соответствующих элементов данных множеств

$$2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32.$$

В отличие от элементов множества элементы кортежа могут совпадать.

Например, в прямоугольной системе координат координаты точек являются кортежами.

Операция, с помощью которой из двух кортежей длиной k и m можно составить новый кортеж длиной $k + m$, в котором сначала идут подряд элементы первого кортежа, а затем – элементы второго кортежа, называется **соединением кортежей**.

Пусть A - конечное множество, элементами которого являются некоторые символы, например цифры, буквы, знаки препинания.

Такие множества принято называть **алфавитом над заданным множеством** символов. **Алфавит** есть кортеж попарно различных символов, называемых **буквами** алфавита. Элементы множества A^n принято называть **словами длины n** в алфавите A . Слово над алфавитом есть просто некоторая конечная последовательность символов.

Так, шестизначный телефонный номер является словом длины 6 над алфавитом цифр $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Существуют кортежи, элементы которых являются только нулями или единицами.

Кортеж из нулей и единиц можно рассматривать как *двоичное представление натурального числа*.

Кортеж, состоящий из единиц и нулей, описывает *состояние памяти вычислительных машин*, причём память может содержать числа, тексты, команды и т.д.

Кортежи используются в штрих-кодах для сообщения нужной информации о характеристике объекта (белая полоска определённой ширины – 0, чёрная -1).

Декартово произведение

Декартовым (прямым) произведением

множеств A_1, A_2, \dots, A_n называется множество, состоящее из всех кортежей длины k , в которых $a_k \in A_k$

Поскольку для задания кортежа важен порядок, то порядок множителей важен в декартовом произведении.

Например декартовым произведением множеств A и B будет являться множество пар

$$A = \{0, 1\} \quad B = \{X, Y, Z\}$$

$$A \times B = \langle (0; X), (0; Y), (0; Z), (1; X), (1; Y), (1; Z) \rangle.$$

Если множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ конечны, то их декартово произведение может быть представлено в общем виде таблицей из m столбцов и k строк.

Например, декартово произведение $X \times Y$, где

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, а $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$,
можно представить в виде табл.

	Y		
X	Y ₁	Y ₂	Y ₃
X ₁	(x ₁ , y ₁)	(x ₁ , y ₂)	(x ₁ , y ₃)
X ₂	(x ₂ , y ₁)	(x ₂ , y ₂)	(x ₂ , y ₃)
X ₃	(x ₃ , y ₁)	(x ₃ , y ₂)	(x ₃ , y ₃)
X ₄	(x ₄ , y ₁)	(x ₄ , y ₂)	(x ₄ , y ₃)

Число элементов в декартовом произведении конечных множеств **A** и **B** равно произведению числа элементов множества **A** на число элементов множества **B**.

Варианты записи: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

или $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

Если $A_1 = A_2 = \dots = A_n$, то пишут

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n$$

A^n называют ***n*-й декартовой степенью** множества **A**.

Примерами декартовых произведений являются таблицы сложения и умножения, все возможные наборы пар координат на плоскости, троек координат некоторой точки в пространстве.

Железнодорожный билет тоже является кортежем, а совокупность всех билетов — декартовым произведением множеств паспортов, посадочных станций, станций прибытия, времени и других множеств.

Свое название декартово произведение получило в честь выдающегося французского математика и философа Рене Декарта (1596—1650), являющегося автором знаменитого метода координат.

Вспомните выражение «прямоугольная декартова система координат», причем координаты точек в этой системе также являются кортежами. На плоскости двумерные кортежи — это пара вида $(x; y)$, а в пространстве — трехмерные кортежи в виде тройки чисел $(x; y; z)$, где элементами кортежа являются соответствующие координаты точки.

В программировании декартово произведение встречается в некоторых способах представления данных (массивы, одно-, двух-, трех- и многомерные таблицы и др.).