Дискретная математика

ЛЕКЦИЯ 3

Операции над множествами

Основные операции над множествами

Суммой или *объединением* двух множеств *X* и *Y* называется множество, состоящее из элементов, входящих или во множество *X*, или во множество *Y*, а может в оба множества одновременно (рис. 1.2). Обозначение: $Z = X \cup Y$.

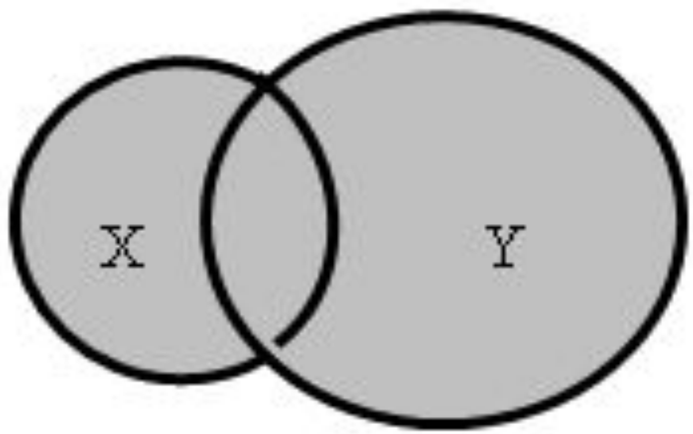


Рис. 1.2

Пересечением множеств X и Y называется множество, состоящее из элементов, входящих одновременно и во множество X, и во множество Y (рис. 1.3). Обозначение: $Z = X \cap Y$.

Разностью множеств X и Y называется множество Z, содержащее все элементы множества X, не содержащиеся в Y (рис. 1.4); эта разность обозначается $Z = X \setminus Y$.

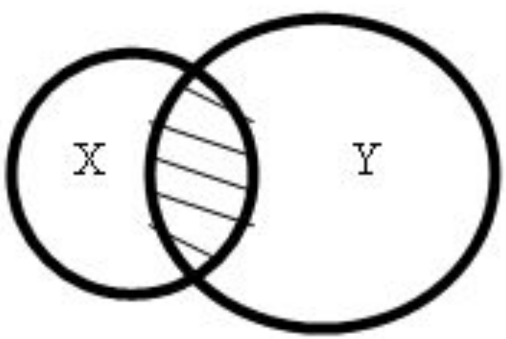


Рис. 1.3

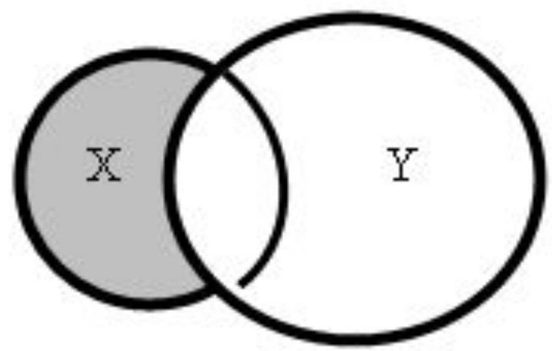


Рис. 1.4

Дополнением $\overline{X}$ множества X до универсального множества *U* *(рис. 1.6)* является множество

$$\overline{X} = \{x_i \mid x_i \notin X, x_i \in U\}.$$

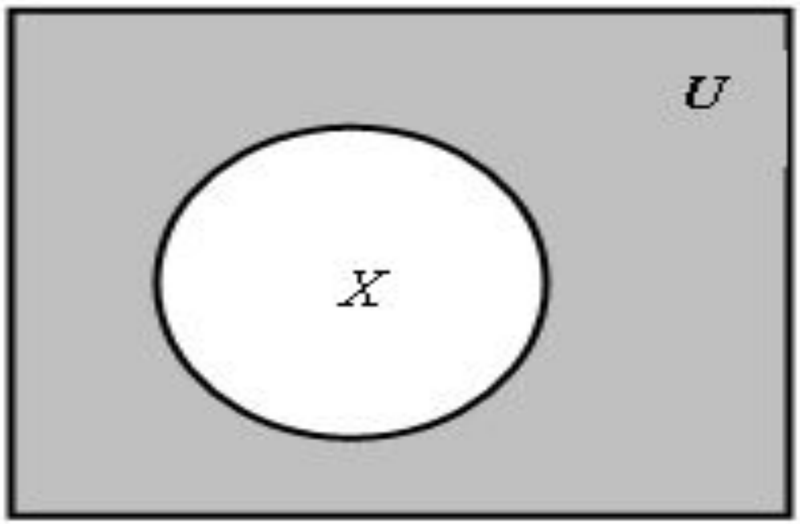


Рис. 1.5

Симметрической разностью множеств X и Y называется множество Z, содержащее либо элементы множества X, либо элементы множества Y, но не те и другие одновременно (*рис. 1.6*); эта разность обозначается $X \dot{\setminus} Y$.

$$= X \dot{\setminus} Y \quad (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$$

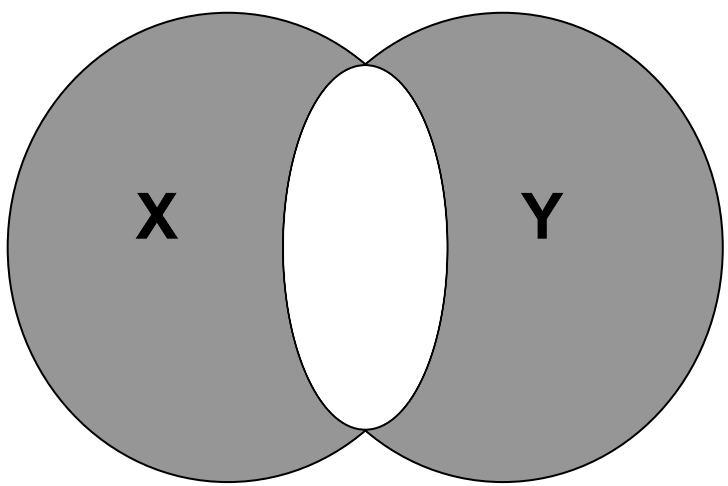
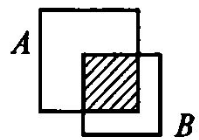
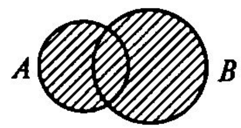
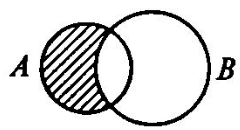
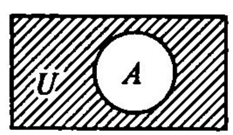
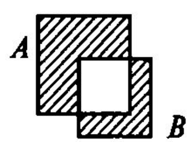


Рис. 1.6.

Основные операции над множествами

Название операции	Обозначение	Изображение кругами Эйлера	Определение	Символическая запись
Пересечение множеств	$A \cap B$		Те и только те элементы, которые принадлежат *одновременно* A и B	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$
Объединение множеств	$A \cup B$		Те и только те элементы, которые принадлежат *хотя бы одному* из множеств A и B	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$
Разность множеств	$A \backslash B$		Те и только те элементы множества A, которые *не* принадлежат B	$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$
Дополнение к множеству A	$\overline{A} = A' =$ $= U \backslash A$		Те и только те элементы, которые *не* принадлежат множеству A (т.е. дополняют его до универсального U)	$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} = U \backslash A$
Симметрическая разность	$A \Delta B$		Те и только те элементы, которые принадлежат одному из множеств: *A либо B*, но не являются общими элементами	$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) =$ $= (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

Вместо выражения

«любое *x* из множества X»

можно писать $\forall x \in X$, где перевёрнутая латинская буква А взята от начала английского слова **Any** – любой.

Вместо выражения

«существует элемент *x* из множества X»

кратко пишут: $\exists x \in X$, где перевёрнутая латинская буква Е является начальной в английском слове **Existence** – существование.

Для операций над множествами справедливы следующие тождества:

- *законы коммутативности объединения и пересечения*

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A,$$

- *законы ассоциативности объединения и пересечения*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

- законы дистрибутивности пересечения относительно объединения и объединения относительно пересечения

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

- законы поглощения

$$A \cup (A \cap B) = A, \qquad A \cap (A \cup B) = A;$$

- законы склеивания

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A, \qquad (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A;$$

- законы Порецкого

$$A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B, \qquad A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B;$$

Операция $\cap$ имеет преимущество перед операцией $\cup$. Скобки - для наглядности.

- *законы идемпотентности объединения и пересечения* $A \cup A = A, \quad A \cap A = A;$
- *законы действия с универсальным (U) и пустым ($\varnothing$) множествами*

$$A \cup \varnothing = A, \qquad A \cap \varnothing = \varnothing,$$

$$A \cup U = U, \qquad A \cap U = A,$$

$$A \cup \overline{A} = U, \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing;$$

- *законы де Моргана*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B};$$

- *закон двойного дополнения*

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

- Универсальное (U) и пустое ($\varnothing$) множества являются дополнениями друг друга

$$U = \overline{\varnothing},$$

$$\varnothing = \overline{U},$$

Кортежи. Декартовы произведения

В повседневной жизни и математике нам часто приходится иметь дело с упорядоченными множествами — кортежами.

Слово кортеж переводится с французского cortege как торжественная процессия (например, свадебный кортеж).

Треугольник ABC на плоскости задается кортежем из 6 чисел $\langle x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \rangle$

Где $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$

— координаты вершин.

Слова в предложении, буквы в слове, предложения в тексте — все это примеры кортежей.

Двоичный код является кортежем, состоящим из цифр 0 и 1.

Кортежем длины n из элементов множества A называется упорядоченная последовательность $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ элементов этого множества.

Кортежи $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ и $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ называются **равными**, если они имеют одинаковую длину и их элементы с одинаковыми номерами совпадают, т. е. $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$, если $(k = n)$ и для $\forall i \quad a_i = b_i$.

Например, равны кортежи

$$\langle 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5\rangle = \langle 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32\rangle$$

так как оба кортежа длины 5 и равны все пары соответствующих элементов данных множеств

$$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32.$$

В отличие от элементов множества элементы кортежа могут совпадать.

Например, в прямоугольной системе координат координаты точек являются кортежами.

Операция, с помощью которой из двух кортежей длиной k и m можно составить новый кортеж длиной $k + m$, в котором сначала идут подряд элементы первого кортежа, а затем – элементы второго кортежа, называется **соединением кортежей**.

Пусть ***A*** - конечное множество, элементами которого являются некоторые символы, например цифры, буквы, знаки препинания.

Такие множества принято называть ***алфавитом над заданным множеством*** символов. *Алфавит* есть кортеж попарно различимых символов, называемых *буквами* алфавита. Элементы множества A^n принято называть ***словами длины n*** в алфавите *A*. Слово над алфавитом есть просто некоторая конечная последовательность символов.

Так, шестизначный телефонный номер является словом длины 6 над алфавитом цифр {0, 1, 2, ..., 9}.

Существуют кортежи, элементы которых являются только нулями или единицами.

Кортеж из нулей и единиц можно рассматривать как *двоичное представление натурального числа*.

Кортеж, состоящий из единиц и нулей, описывает *состояние памяти вычислительных машин*, причём память может содержать числа, тексты, команды и т.д.

Кортежи используются в штрих-кодах для сообщения нужной информации о характеристике объекта (белая полоска определённой ширины – 0, чёрная -1).

Декартово произведение

Декартовым (прямым) произведением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, состоящее из всех кортежей длины *k*, $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ в которых $a_k \in A_k$, где $1 \le k \le n$.

Поскольку для задания кортежа важен порядок, то порядок множителей важен в декартовом произведении.

Например декартовым произведением множеств $A = \{0,1\}$ и $B = \{X, Y, Z\}$ будет являться множество пар

$$A \times B = \langle (0;\ X),\ (0;\ Y)\ (0;\ Z),\ (1;\ X),\ (1;\ Y),\ (1;\ Z) \rangle.$$

Если множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ **конечны, то их декартово произведение может быть представлено в общем виде таблицей из *m* столбцов и *к* строк.**

Например, декартово произведение X x **Y, где**

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, а $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$,

можно представить в виде табл.

	Y		
X	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	(x_1, y_1)	(x_1, y_2)	(x_1, y_3)
X_2	(x_2, y_1)	(x_2, y_2)	(x_2, y_3)
X_3	(x_3, y_1)	(x_3, y_2)	(x_3, y_3)
X_4	(x_4, y_1)	(x_4, y_2)	(x_4, y_3)

Число элементов в декартовом произведении конечных множеств ***A*** и ***B*** равно произведению числа элементов множества ***A*** на число элементов множества ***B***.

Варианты записи: |A x B| = |A| • |B|

или n(A x B) = n(A) • n(B).

Если $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, то пишут $A^n = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n}$.

A^n называют ***n*-й декартовой степенью** множества *A*.

Примерами декартовых произведений являются таблицы сложения и умножения, все возможные наборы пар координат на плоскости, троек координат некоторой точки в пространстве. Железнодорожный билет тоже является кортежем, а совокупность всех билетов — декартовым произведением множеств паспортов, посадочных станций, станций прибытия, времени и других множеств.

Свое название декартово произведение получило в честь выдающегося французского математика и философа Рене Декарта (1596—1650), являющегося автором знаменитого метода координат.

Вспомните выражение «прямоугольная декартова система координат», причем координаты точек в этой системе также являются кортежами. На плоскости двумерные кортежи — это пара вида (x;y), а в пространстве — трехмерные кортежи в виде тройки чисел (x; y; z), где элементами кортежа являются соответствующие координаты точки.

В программировании декартово произведение встречается в некоторых способах представления данных (массивы, одно-, двух-, трех- и многомерные таблицы и др.).