# Формула Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}$$

**Пример 2468:** $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}}{n^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2\pi n} \text{ – расходится}$$

**Проверяем необходимый признак:**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n} = \infty \neq 0$$

**Д/З:** $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$$

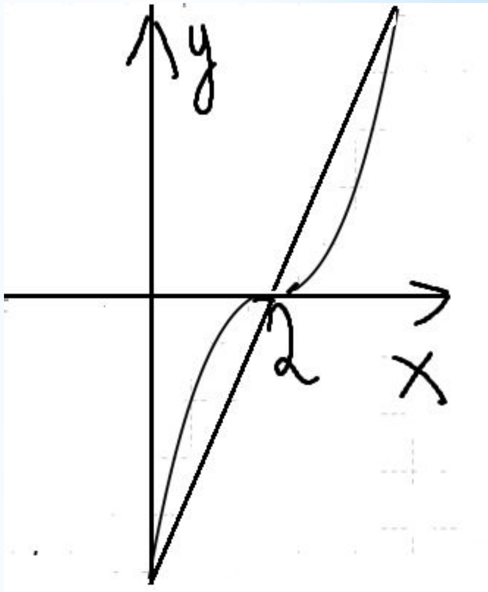
**Ответ: расходится**

# Контрольная работа Вариант №0

**Задача 1:** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = (x-2)^3$ , $y = 4x - 8$ , $y > 0$.

**План:**
1) **Рисунок**
2) **Точки пересечения**
3) **Интеграл**




**Точки пересечения:**

$$\begin{cases} y = (x-2)^3 \\ y = 4x - 8 \end{cases} \Rightarrow (x-2)^3 = 4(x-2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ (x-2)^2 = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 - 4x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{array}$$

$$S = \int_2^4 (4x - 8 - (x-2)^3)dx = 2x^2 - 8x - \frac{(x-2)^4}{4}\Bigg|_2^4 = 24 - 16 - 4 = 4$$

**Задача 2:** Вычислить несобственный интеграл: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^6}$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^6} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{x^2dx}{1+x^6} = \begin{vmatrix} t = x^3 \\ dt = 3x^2dx \end{vmatrix} == \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{3}\int\limits_1^{b} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{3} arctgt \Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{3} arctgx^3 \Big|_1^b = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}$$

**Задача 3:** Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременный ряд. Указать используемый признак сходимости:

**а)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln n}$ – сходится абсолютно

**Шаг 1. Рассматриваем ряд из модулей:**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n} \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ – сходится}$$

**б)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n-1}$ – расходится

**Шаг 1. Рассматриваем ряд из модулей:** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{4n-1}$

**Проверяем необходимый признак:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n-1} = \frac{1}{4} \neq 0 \text{ – расходится}$$

**Задача 4:** Найти объем тела, образованного при вращении кривой вокруг оси OX: $y = 1 - x^2$ $\quad (-1 \le x \le 1)$

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2 dx = 2\pi \int_0^1 \left(1 - 2x^2 + x^4\right) dx =$$

$$= 2\pi \left( x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1 = 2\pi \left( 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{16\pi}{15}$$

**Задача 5:** Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{2x^5+x+18}$$

$$\int_{0}^{1} \frac{(x^2+1)dx}{2x^5+x} \sim \int_{0}^{1} \frac{dx}{x} \text{ – расходится}$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{2x^5+x+18} \sim \int_{1}^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^5} = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \text{ – сходится}$$

| **Максимальная степень** |
|---|
| $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \propto > 1, \text{сходится} \\ \propto \le 1, \text{расходится} \end{cases}$ |

| **Минимальная степень** |
|---|
| $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \propto \ge 1, \text{расходится} \\ \propto < 1, \text{сходится} \end{cases}$ |

**Задача 6:** Исследовать на сходимость ряд с положительными членами. Указать используемый признак сходимости:

**а)** $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 6^n}{n!} - \text{сходится}$$

**Применим признак Даламбера:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 6^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^3 6^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = 0 < 1$$

**б)** $$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{3^n} - \text{сходится}$$

**Применим радикальный признак Коши:**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{3} = \frac{e}{3} < 1$$

**Задача 7:** Найти область сходимости степенного ряда:

а) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n\sqrt{n}}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$$

**1) Найдем радиус сходимости по формуле Даламбера:**

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}} = 1$$

для $x \in [-5;-3]$ ряд сходится.

для $x \in (-\infty;-5) \cup (-3;+\infty)$ ряд расходится.

**2) Исследуем ряд при x=-3**

**x=-3 :** $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+4)^n}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} - \text{сходится}$$

**3) Исследуем ряд при x=-5**

**x=-5 :** $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5+4)^n}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} - \text{сходится абсолютно}$$

**Задача 7:** Найти область сходимости степенного ряда:

**б)** $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n$$

**1) Найдем радиус сходимости по формуле Даламбера:**

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)3^{n+1}}{(n+1)(n+1)3^n} = 3$$

для $x \in (-2; 4)$ ряд абсолютно сходится.

для $x \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$ ряд расходится.

**2) Исследуем ряд при x=4**

**x=4 :** $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{4-1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

**Применим необходимый признак:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0 \text{ – расходится}$$

**2) Исследуем ряд при x=-2**

**x=-2 :** $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{-2-1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \text{ – расходится}$$

**Задача 8:** Найти область сходимости функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^{4x-x^2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \propto > 1, \text{сходится} \\ \propto \leq 1, \text{расходится} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^{4x-x^2}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^{4x-x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1+4x-x^2}}$$

$$-1 + 4x - x^2 > 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 < 0 \Rightarrow \left(x - 2 - \sqrt{2}\right)\left(x - 2 + \sqrt{2}\right) < 0$$

**для** $x \in \left(2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}\right)$ ряд сходится.

**для** $x \in \left(-\infty; 2 - \sqrt{2}\right] \cup \left[2 + \sqrt{2}; +\infty\right)$ ряд расходится.

**Задача 9:** Разложить в ряд Тейлора функции в окрестности точки $x_0 = 2$. $\boldsymbol{f(x) = e^{x^2-4x+1}}$

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = e^{x^2-4x+1}} \quad \text{по } (\mathbf{x-2})}$$

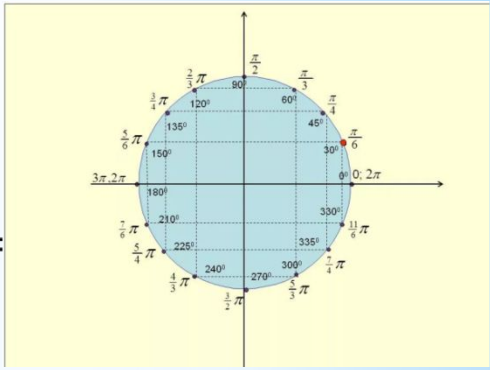
$$\mathbf{1)} \quad \boldsymbol{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} \qquad \boldsymbol{x} \in (-\infty; +\infty)$$

$$\boldsymbol{e^{x^2-4x+1} = e^{x^2-4x+1+3-3} = e^{(x-2)^2-3} = \frac{e^{(x-2)^2}}{e^3} = \frac{1}{e^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left((x-2)^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{e^3 n!}}$$

**Задача 10:** Найти длину дуги кривой: $\rho = 7(1 - sin\varphi)$

$$\rho^{/} = -7cos\varphi \qquad -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{1 - sin\varphi = (cos\frac{\varphi}{2} - sin\frac{\varphi}{2})^2}$$




$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho^{/2}} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{49(1 - sin\varphi)^2 + 49cos^2\varphi} d\varphi =$$

$$= 7 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 - 2sin\varphi + sin^2\varphi + cos^2\varphi} d\varphi = 7 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2 - 2sin\varphi} d\varphi =$$

$$= 7\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(cos\frac{\varphi}{2} - sin\frac{\varphi}{2})^2} d\varphi = 7\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left|cos\frac{\varphi}{2} - sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 7\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (cos\frac{\varphi}{2} - sin\frac{\varphi}{2}) d\varphi$$

$$= 14\sqrt{2}\left(sin\frac{\varphi}{2} + cos\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = 14\sqrt{2}\left(sin\frac{\pi}{6} + cos\frac{\pi}{6} - sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 14\sqrt{2}$$

**Пример 2516:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{e^{n sinx}}$

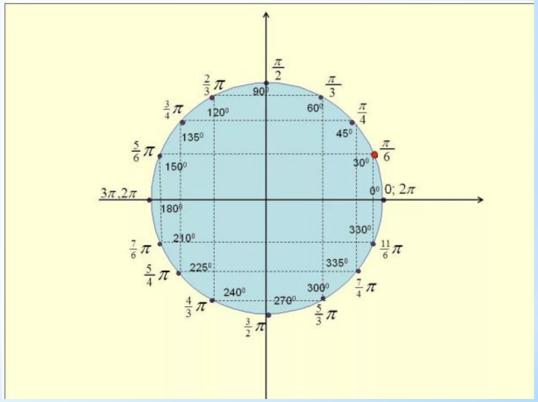
1) **Ряд существует на всей действительной оси.**

2) **Проверяем необходимый признак:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{n sinx}} = \begin{cases} \infty, & x\epsilon(\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k) \\ 1, & x = \pi k \\ 0, & x\epsilon(0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k \end{cases}$$

Для $x \in [\,\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$ ряд расходится.

3) **Рассматриваем ряд из модулей:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n sinx}}$




**Применим признак радикального Коши :**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n|} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{e^{n sinx}}} = \frac{1}{e^{sinx}} < 1 \Rightarrow e^{sinx} > 1 \Rightarrow sinx > 0$$ – ряд сходится

Для $x \in (\,0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$ ряд абсолютно сходится.