

Формула Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$$

Пример 2468:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}}{n^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2\pi n} - \text{расходится}$$

Проверяем необходимый
признак:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} = \infty \neq 0$$

Д/З:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$$

Ответ: расходится

**Контрольная
работа
Вариант №0**

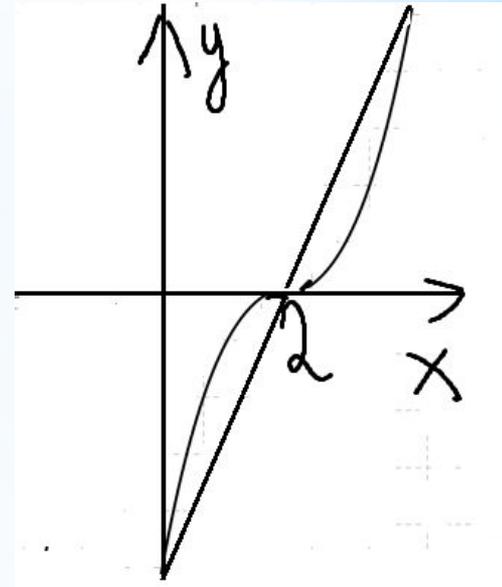
Задача 1: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = (x - 2)^3, \quad y = 4x - 8, \quad y > 0.$$

План:

- 1) Рисунок
- 2) Точки пересечения
- 3) Интеграл

Точки пересечения:



$$\begin{cases} y = (x - 2)^3 \\ y = 4x - 8 \end{cases} \Rightarrow (x - 2)^3 = 4(x - 2) \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ (x - 2)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{matrix}$$

$$S = \int_2^4 (4x - 8 - (x - 2)^3) dx = 2x^2 - 8x - \frac{(x - 2)^4}{4} \Big|_2^4 = 24 - 16 - 4 = 4$$

Задача 2: Вычислить несобственный интеграл: $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{x^2 dx}{1+x^6} = \left| \begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right| == \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \int_1^b \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \arctgt \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \arctg x^3 \Big|_1^b = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{12}$$

Задача 3: Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременный ряд. Указать используемый признак сходимости:

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln n}$ – сходится абсолютно

Шаг 1. Рассматриваем ряд из модулей:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ – сходится}$$

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n - 1}$ – расходится

Шаг 1. Рассматриваем ряд из модулей: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{4n - 1}$

Проверяем необходимый признак:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n - 1} = \frac{1}{4} \neq 0 \text{ – расходится}$$

Задача 4: Найти объем тела, образованного при вращении кривой вокруг оси OX : $(-1 \leq x \leq 1)$

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = 2\pi \int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4) dx = \\ &= 2\pi \left(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{16\pi}{15} \end{aligned}$$

Задача 5: Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{2x^5+x+18}$$

$$\int_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{2x^5+x} \sim \int_0^1 \frac{dx}{x} - \text{расходится}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{2x^5+x+18} \sim \int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^5} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} - \text{сходится}$$

Максимальная степень

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \alpha > 1, \text{сходится} \\ \alpha \leq 1, \text{расходится} \end{cases}$$

Минимальная степень

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \alpha \geq 1, \text{расходится} \\ \alpha < 1, \text{сходится} \end{cases}$$

Задача 6: Исследовать на сходимость ряд с положительными членами. Указать используемый признак сходимости:

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 6^n}{n!}$ — сходится

Применим признак

Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 6^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^3 6^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = 0 < 1$$

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{3^n}$ — сходится

Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{3} = \frac{e}{3} < 1$$

Задача 7: Найти область сходимости степенного ряда:

a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n\sqrt{n}}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$$

1) Найдем радиус сходимости по формуле Даламбера:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}} = 1$$

для $x \in [-5; -3]$ ряд сходится.

для $x \in (-\infty; -5) \cup (-3; +\infty)$ ряд расходится.

2) Исследуем ряд при $x=-3$

$x=-3$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+4)^n}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} - \text{сходится}$$

3) Исследуем ряд при $x=-5$

$x=-5$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5+4)^n}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} - \text{сходится абсолютно}$$

Задача 7: Найти область сходимости степенного ряда:

$$б) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x-1}{3} \right)^n$$

1) Найдем радиус сходимости по формуле Даламбера:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)3^{n+1}}{(n+1)(n+1)3^n} = 3$$

для $x \in (-2; 4)$ ряд абсолютно сходится.

для $x \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$ ряд расходится.

2) Исследуем ряд при $x=4$

Применим необходимый

$$x=4: \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{4-1}{3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \quad \text{признак:} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0 \text{ — расходится}$$

2) Исследуем ряд при $x=-2$

$$x=-2: \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{-2-1}{3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \text{ — расходится}$$

Задача 8: Найти область сходимости функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^{4x-x^2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \alpha > 1, \text{ сходится} \\ \alpha \leq 1, \text{ расходится} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^{4x-x^2}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^{4x-x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1+4x-x^2}}$$

$$-1 + 4x - x^2 > 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 < 0 \Rightarrow (x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2}) < 0$$

для $x \in (2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$ ряд сходится.

для $x \in (-\infty; 2 - \sqrt{2}] \cup [2 + \sqrt{2}; +\infty)$ ряд расходится.

Задача 9: Разложить в ряд Тейлора функции в окрестности точки $x_0 = 2$. $f(x) = e^{x^2-4x+1}$

$$f(x) = e^{x^2-4x+1} \quad \text{по } (x-2)$$

$$1) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

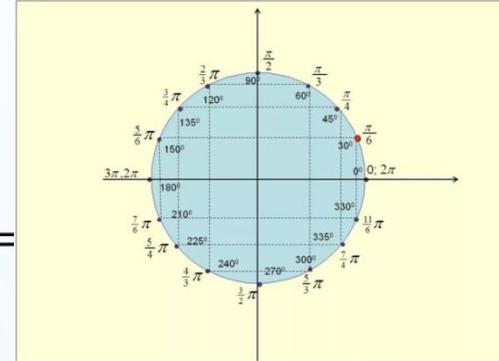
$$e^{x^2-4x+1} = e^{x^2-4x+1+3-3} = e^{(x-2)^2-3} = \frac{e^{(x-2)^2}}{e^3} = \frac{1}{e^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((x-2)^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{e^3 n!}$$

Задача 10: Найти длину дуги кривой: $\rho = 7(1 - \sin\varphi)$

$$\rho' = -7\cos\varphi$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$$

$$1 - \sin\varphi = \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)^2$$



$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{49(1 - \sin\varphi)^2 + 49\cos^2\varphi} d\varphi =$$

$$= 7 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 - 2\sin\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi} d\varphi = 7 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2 - 2\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= 7\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)^2} d\varphi = 7\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left|\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 7\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$

$$= 14\sqrt{2} \left(\sin\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}\right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = 14\sqrt{2} \left(\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 14\sqrt{2}$$

Пример 2516:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{e^{n \sin x}}$$

1) Ряд существует на всей действительной оси.

2) Проверяем необходимый признак:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{n \sin x}} = \begin{cases} \infty, & x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k) \\ 1, & x = \pi k \\ 0, & x \in (0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k) \end{cases}$$

Для $x \in [\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$ ряд расходится.

3) Рассматриваем ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n \sin x}}$$

Применим признак радикального Коши :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n|} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{e^{n \sin x}}} = \frac{1}{e^{\sin x}} < 1 \Rightarrow e^{\sin x} > 1 \Rightarrow \sin x > 0 \text{ — ряд сходится}$$

Для $x \in (0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$ ряд абсолютно сходится.

