

Здравствуйте!

Лекция №7

Признак существования определенного интеграла

Теорема. Для существования определенного интеграла необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть существует $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$. Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall \lambda < \delta \quad I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon.$$

Но тогда, учитывая, что $s = \inf \sigma$ и $S = \sup \sigma$, можем записать

$$I - \varepsilon \leq s \leq S \leq I + \varepsilon,$$

откуда следует, что

$$S - s \leq (I + \varepsilon) - (I - \varepsilon) = 2\varepsilon,$$

и, в силу произвольности ε , это и означает, что $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$.

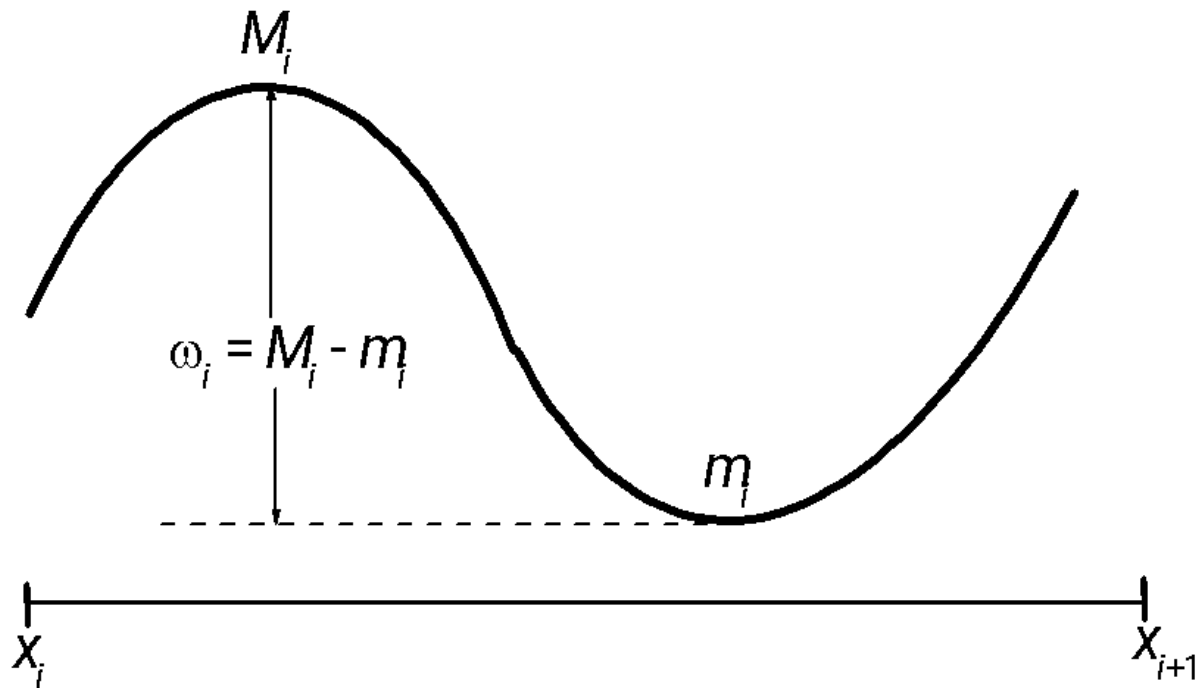
Достаточность. Пусть $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall \lambda < \delta \quad S - s < \varepsilon.$$

Но $s \leq I_* \leq I^* \leq S$, откуда следует, что $I^* - I_* < \varepsilon$. Так как ε сколь угодно мало, то это означает, что $I^* = I_* = I$.

Далее имеем $s \leq I \leq S$, $s \leq \sigma \leq S$; следовательно, $|\sigma - I| \leq \varepsilon$, и, в силу произвольности ε , это означает, что существует $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$.

Другая форма записи этого условия



Величина
отрезке

носит название **колебания** функции на
. Ее можно записать и так

. Тогда

, и условие теоремы принимает вид

Г 1

Классы интегрируемых функций

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она, по теореме Кантора, равномерно непрерывна на этом отрезке. В обозначениях этой главы, это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \Delta x_i < \delta \omega_i < \varepsilon.$$

Возьмем любое $\lambda < \delta$. Тогда $\forall i \omega_i < \varepsilon$ и мы получаем

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon(b - a)$$

и, в силу произвольности ε , отсюда следует, что $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$ и имеет на нем лишь конечное число точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказывать эту теорему мы не будем.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

Пусть, для определенности, функция $f(x)$ монотонно **возрастает**. Возьмем произвольное ε и положим $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.

Разобьем весь отрезок $[a, b]$ на кусочки, длина каждого из которых Δx_i будет меньше δ . Тогда на кусочке $[x_i, x_{i+1}]$ будет $\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ и мы получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \delta \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i = \delta \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = \\ &= \delta [(f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + (f(x_3) - f(x_2)) + \dots + (f(x_n) - f(x_{n-1}))] = \\ &= \delta (f(x_n) - f(x_0)) = \delta (f(b) - f(a)) = \varepsilon, \end{aligned}$$

и, в силу произвольности ε , отсюда следует, что $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$.

Свойства интегрируемых функций

1. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то функция $kf(x)$ также интегрируема на $[a, b]$.

Пусть $\omega_i = \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')|$ есть колебание функции $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Тогда ее интегрируемость на отрезке $[a, b]$ означает, что $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$.

Пусть далее ω'_i есть колебание функции $kf(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Тогда имеем

$$\omega'_i = \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |kf(x') - kf(x'')| = |k| \cdot \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')| = |k| \omega_i,$$

и поэтому

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega'_i \Delta x_i = |k| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0,$$

откуда и следует интегрируемость функции $kf(x)$ на $[a, b]$.

2. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$.

Пусть ω'_i есть колебание функции $|f(x)|$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Тогда имеем

$$\omega'_i = \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} \| |f(x')| - |f(x'')| \| \leq \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')| = \omega_i$$

(воспользовались неравенством $|a - b| \geq \| |a| - |b| \|$, написанным в обратном порядке) и поэтому

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega'_i \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0,$$

откуда и следует интегрируемость функции $|f(x)|$ на $[a, b]$.

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то функция $f(x) \pm g(x)$ также интегрируема на $[a, b]$.

Пусть $\omega'_i = \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')|$ и $\omega''_i = \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |g(x') - g(x'')|$

есть колебания функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ соответственно. Тогда для колебания их суммы или разности имеем

$$\begin{aligned} \omega_i &= \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |(f(x') \pm g(x')) - (f(x'') \pm g(x''))| \leq \\ &\leq \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} \{|f(x') - f(x'')| + |g(x') - g(x'')|\} \leq \end{aligned}$$

(модуль суммы или разности не превосходит суммы модулей)

$$\leq \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} \{|f(x') - f(x'')|\} + \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} \{|g(x') - g(x'')|\} = \omega'_i + \omega''_i$$

(супремум суммы не превосходит суммы супремумов). Поэтому

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega'_i \Delta x_i + \sum_{i=0}^{n-1} \omega''_i \Delta x_i \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

откуда и следует интегрируемость функции $f(x) \pm g(x)$ на $[a, b]$.

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то функция $f(x) \cdot g(x)$ также интегрируема на $[a, b]$.

Вспомним, что пока мы умеем интегрировать только ограниченные функции. Это значит, что $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = M_f < +\infty$ и

$\sup_{x \in [a, b]} |g(x)| = M_g < +\infty$. Тогда имеем

$$f(x')g(x') - f(x'')g(x'') = [f(x') - f(x'')]g(x') + [g(x') - g(x'')]f(x''),$$
$$|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| \leq |f(x') - f(x'')|M_g + |g(x') - g(x'')|M_f,$$

и для колебания ω_i функции $f(x) \cdot g(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$\omega_i \leq M_g \omega'_i + M_f \omega''_i$$

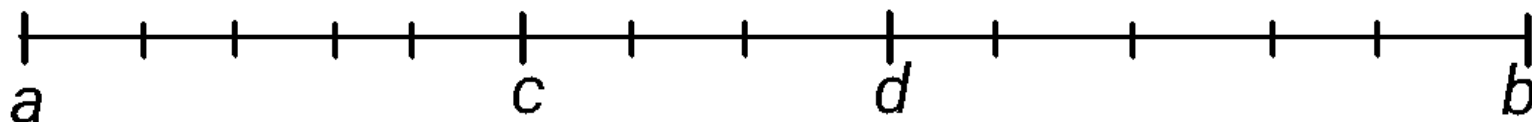
и поэтому

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leq M_g \sum_{i=0}^{n-1} \omega'_i \Delta x_i + M_f \sum_{i=0}^{n-1} \omega''_i \Delta x_i \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0,$$

откуда и следует интегрируемость функции $f(x) \cdot g(x)$ на $[a, b]$.

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то она интегрируема на любой части этого промежутка.

Пусть отрезок $[c, d] \subset [a, b]$ разобьем отрезок $[a, b]$ на кусочки, так, чтобы точки c и d оказались в числе точек деления (см. рис.).



Тогда имеем

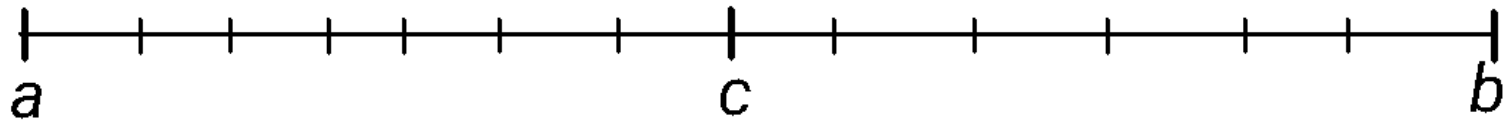
что и доказывает интегрируемость на отрезке

$$0 \leq \sum_{i: x_i \in [c, d)} \omega_i \Delta x_i \leq \sum_{i: x_i \in [a, b)} \omega_i \Delta x_i$$

$$f(x)$$

6. Если отрезок $[a, b]$ разбит на части и функция $f(x)$ интегрируема на каждой из частей, то она интегрируема и на $[a, b]$.

Пусть отрезок $[a, b]$ разбит на две части точкой c (см. рис.).



Разобьем отрезок $[a, b]$ на части так, чтобы точка c вошла в число точек деления. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то это значит, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i: x_i \in [a, c]} \omega_i \Delta x_i = \int_a^c f(x) dx$$

Но тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i: x_i \in [a, b]} \omega_i \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\sum_{i: x_i \in [a, c]} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i: x_i \in [c, b]} \omega_i \Delta x_i \right) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

что и доказывает интегрируемость $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$$\sum \omega_i \Delta x_i = \sum \omega_i \Delta x_i + \sum \omega_i \Delta x_i$$