Здравствуйте!

Лекция №7

Признак существования определенного интеграла

Теорема. Для существования определенного интеграла необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть существует $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I$. Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta \;\; \forall \lambda < \delta \;\; I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon .$$

Но тогда, учитывая, что $s = \inf \sigma$ и $S = \sup \sigma$, можем записать

$$I - \varepsilon \le s \le S \le I + \varepsilon ,$$

откуда следует, что

$$S - s \le (I + \varepsilon) - (I - \varepsilon) = 2\varepsilon ,$$

и, в силу произвольности ε, это и означает, что $\lim\limits_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$.

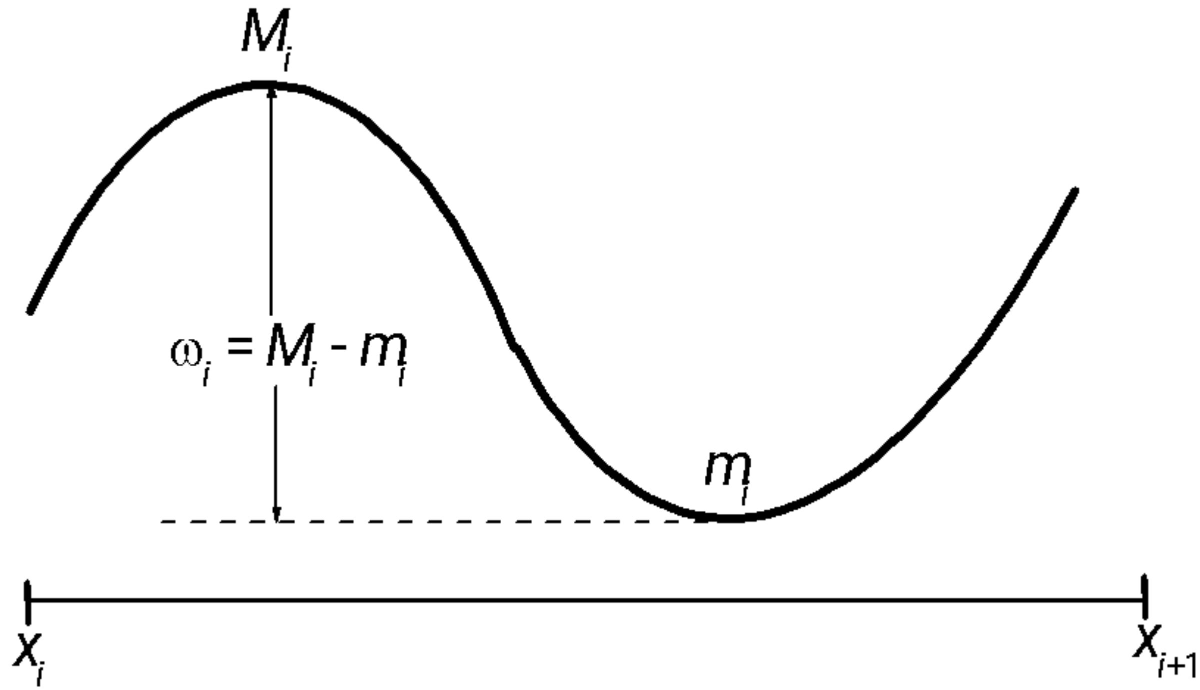
Достаточность. Пусть $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s)=0$. Это означает, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\ \forall\lambda<\delta\ S-s<\varepsilon.$$

Но $s\le I_*\le I^*\le S$, откуда следует, что $I^*-I_*<\varepsilon$. Так как ε сколь угодно мало, то это означает, что $I^*=I_*=I$.

Далее имеем $s\le I\le S$, $s\le\sigma\le S$; следовательно, $|\sigma-I|\le\varepsilon$, и, в силу произвольности ε, это означает, что существует $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma=I$.

Другая форма записи этого условия



Величина носит название **колебания** функции на отрезке . Ее можно записать и так

. Тогда

$$\omega_i = M_i - m_i$$

, и условие теоремы принимает вид .

Классы интегрируемых функций

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она, по теореме Кантора, равномерно непрерывна на этом отрезке. В обозначениях этой главы, это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \Delta x_i < \delta \ \omega_i < \varepsilon.$$

Возьмем любое $\lambda < \delta$. Тогда $\forall i \ \omega_i < \varepsilon$ и мы получаем

$$0 \le \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon(b-a)$$

и, в силу произвольности ε, отсюда следует, что $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$ и имеет на нем лишь конечное число точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказывать эту теорему мы не будем.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

Пусть, для определенности, функция $f(x)$ монотонно **возрастает.** Возьмем произвольное ε и положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.

Разобьем весь отрезок $[a,b]$ на кусочки, длина каждого из которых Δx_i будет меньше δ. Тогда на кусочке $[x_i, x_{i+1}]$ будет $\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ и мы получим

$$0 \le \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \delta \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i = \delta \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(x_{i+1}) - f(x_i) \right] =$$

$$= \delta \left[(f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + (f(x_3) - f(x_2)) + \ldots + (f(x_n) - f(x_{n-1})) \right] =$$

$$= \delta \left(f(x_n) - f(x_0) \right) = \delta \left(f(b) - f(a) \right) = \varepsilon,$$

и, в силу произвольности ε, отсюда следует, что $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$.

Свойства интегрируемых функций

1. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то функция $kf(x)$ также интегрируема на $[a,b]$.

Пусть $\omega_i = \sup\limits_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')|$ есть колебание функции $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Тогда ее интегрируемость на отрезке $[a,b]$ означает, что $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$.

Пусть далее ω_i' есть колебание функции $kf(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Тогда имеем

$\omega_i' = \sup\limits_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |kf(x') - kf(x'')| = |k| \cdot \sup\limits_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')| = |k| \omega_i$,

и поэтому

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i' \Delta x_i = |k| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0,$$

откуда и следует интегрируемость функции $kf(x)$ на $[a,b]$.

2. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на $[a,b]$.

Пусть ω_i' есть колебание функции $|f(x)|$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Тогда имеем

$$\omega_i' = \sup_{x',x''\in[x_i,x_{i+1}]} \big||f(x')|-|f(x'')|\big| \le \sup_{x',x''\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x')-f(x'')| = \omega_i$$

(воспользовались неравенством $|a-b| \ge \big||a|-|b|\big|$, написанным в обратном порядке) и поэтому

$$0 \le \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i' \Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0,$$

откуда и следует интегрируемость функции $|f(x)|$ на $[a,b]$.

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то функция $f(x)\pm g(x)$ также интегрируема на $[a,b]$.

Пусть $\omega_i' = \sup\limits_{x',x''\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x')-f(x'')|$ и $\omega_i'' = \sup\limits_{x',x''\in[x_i,x_{i+1}]} |g(x')-g(x'')|$ есть колебания функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[x_i,x_{i+1}]$ соответственно. Тогда для колебания их суммы или разности имеем

$$\omega_i = \sup_{x',x''\in[x_i,x_{i+1}]} |(f(x')\pm g(x'))-(f(x'')\pm g(x''))| \le$$

$$\le \sup_{x',x''\in[x_i,x_{i+1}]} \{|f(x')-f(x'')|+|g(x')-g(x'')|\} \le$$

(модуль суммы или разности не превосходит суммы модулей)

$$\le \sup_{x',x''\in[x_i,x_{i+1}]} \{|f(x')-f(x'')|\} + \sup_{x',x''\in[x_i,x_{i+1}]} \{|g(x')-g(x'')|\} = \omega_i' + \omega_i''$$

(супремум суммы не превосходит суммы супремумов). Поэтому

$$0 \le \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i' \Delta x_i + \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i'' \Delta x_i \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0$$

откуда и следует интегрируемость функции $f(x)\pm g(x)$ на $[a,b]$.

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то функция $f(x)\cdot g(x)$ также интегрируема на $[a,b]$.

Вспомним, что пока мы умеем интегрировать только ограниченные функции. Это значит, что $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| = M_f < +\infty$ и $\sup\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| = M_g < +\infty$. Тогда имеем

$$f(x')g(x') - f(x'')g(x'') = [f(x') - f(x'')]g(x') + [g(x') - g(x'')]f(x''),$$

$$|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| \le |f(x') - f(x'')| M_g + |g(x') - g(x'')| M_f,$$

и для колебания ω_i функции $f(x)\cdot g(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$\omega_i \le M_g \omega_i' + M_f \omega_i''$$

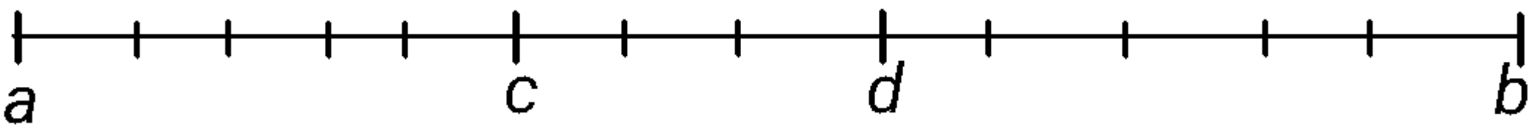
и поэтому

$$0 \le \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \le M_g \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i' \Delta x_i + M_f \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i'' \Delta x_i \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0,$$

откуда и следует интегрируемость функции $f(x)\cdot g(x)$ на $[a,b]$.

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то она интегрируема на любой части этого промежутка.

Пусть отрезок $[c,d]\subset[a,b]$ разобьем отрезок $[a,b]$ на кусочки, так, чтобы точки c и d оказались в числе точек деления (см. рис.).



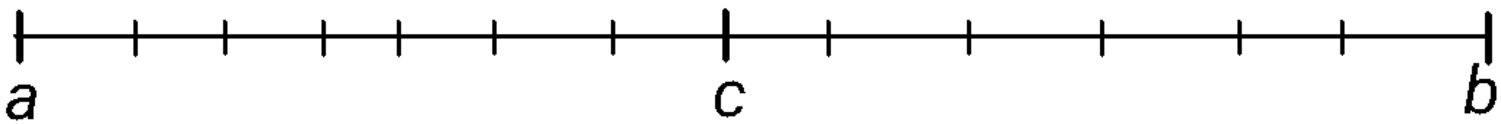
Тогда имеем

$$0 \le \sum_{i:x_i\in[c,d)} \omega_i \Delta x_i \le \sum_{i:x_i\in[a,b)} \omega_i \Delta x_i ,$$

что и доказывает интегрируемость $f(x)$ на отрезке .

6. Если отрезок $[a,b]$ разбит на части и функция $f(x)$ интегрируема на каждой из частей, то она интегрируема и на $[a,b]$.

Пусть отрезок $[a,b]$ разбит на две части точкой c (см. рис.).



Разобьем отрезок $[a,b]$ на части так, чтобы точка c вошла в число точек деления. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках и , то это значит, что и .

Но тогда

$]$

$$\sum_{i: x_i \in [a,c)} \omega_i \Delta x_i \xrightarrow[\lambda\to 0]{}$$

что и доказывает интегрируемость на отрезке .

$$\sum \omega_i \Delta x_i = \sum \omega_i \Delta x_i + \sum \omega$$