Понятие предела функции

Раскрытие неопределенности

- При нахождении предела иногда сталкиваются с неопределенностями вида

$$\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (\infty-\infty), (1^{\infty}), (0^{\infty}), (0^{0})(\infty^{0}).$$

- Отыскание предела в таких случаях называется раскрытием неопределенности.

Для того, чтобы раскрыть неопределенность ∞/∞ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}^{\to 0}-\dfrac{5}{x^2}^{\to 0}}{\dfrac{1}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{1}{x}^{\to 0}+3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\dfrac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7}{x}^{\to 0}+\dfrac{15}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{9}{x^3}^{\to 0}+\dfrac{1}{x^4}^{\to 0}}{5+\dfrac{6}{x^2}^{\to 0}-\dfrac{3}{x^3}^{\to 0}-\dfrac{4}{x^4}^{\to 0}}=$$

$$=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$ Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x}^{\to 0}+\frac{1}{x^2}^{\to 0}}=\frac{2}{0}=\infty$$

подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

Вычислить предел

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$$

Сначала попробуем подставить -1 в дробь:

$$\frac{2(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

В данном случае получена так называемая неопределенность 0/0

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенность вида 0/0, то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители**.

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=(*)$$

Очевидно, что можно сократить на (x+1)

$$(*)=\lim_{x\to -1}(2x-5)=(*)$$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$=2\cdot(-1)-5=-2-5=-7$$

Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Сначала пробуем подставить 3 в выражение под знаком предела **это первое, что нужно выполнять для ЛЮБОГО предела.**

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{0}{0}=(*)$$

Получена неопределенность вида 0/0 , которую нужно устранять

Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности используют **метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение.**

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

$$(*) = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = (*)$$

$$(*) = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3} \frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3} \frac{-9}{5} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{5}\right) = -\frac{3}{10}$$

Замечательные пределы

- первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

- второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Примеры

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(2x)}{2x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}=$$

$$=2\cdot 1=2.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}=e^{\frac{4}{3}}$$