

Понятие предела функции

Раскрытие неопределенности

- ▶ При нахождении предела иногда сталкиваются с неопределенностями вида

$$\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (\infty - \infty), (1^\infty), (0^\infty), (0^0)(\infty^0).$$

- ▶ Отыскание предела в таких случаях называется раскрытием неопределенности.

Для того, чтобы раскрыть неопределенность ∞/∞ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{1 + x + 3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3 \rightarrow 0}{x} - \frac{5 \rightarrow 0}{x^2}}{\frac{1 \rightarrow 0}{x^2} + \frac{1 \rightarrow 0}{x} + 3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4} = \frac{\infty}{\infty} = (*) \quad \text{Разделим числитель и знаменатель на } x^4$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{x^4}}{\frac{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7 \rightarrow 0}{x} + \frac{15 \rightarrow 0}{x^2} + \frac{9 \rightarrow 0}{x^3} + \frac{1 \rightarrow 0}{x^4}}{5 + \frac{6 \rightarrow 0}{x^2} - \frac{3 \rightarrow 0}{x^3} - \frac{4 \rightarrow 0}{x^4}} =$$

$$= \frac{0 + 0 + 0 + 0}{5 + 0 - 0 - 0} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = (*) \quad \text{Разделим числитель и знаменатель на } x^2$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{x + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3 \rightarrow 0}{x} - \frac{5 \rightarrow 0}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{0} = \infty$$

подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$$

Сначала попробуем подставить -1 в дробь:

$$\frac{2(-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 5}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$$

В данном случае получена так называемая неопределенность 0/0

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{0}{0} = (*)$$

Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенность вида 0/0, то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители.**

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1) \cdot (2x - 5)}{x + 1} = (*) \quad \text{Очевидно, что можно сократить на } (x + 1)$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 5) = (*)$$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$= 2 \cdot (-1) - 5 = -2 - 5 = -7$$

Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

Найти предел
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15}$$

Сначала пробуем подставить 3 в выражение под знаком предела **это первое, что нужно выполнять для ЛЮБОГО** предела.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$$

Получена неопределенность вида $0/0$, которую нужно устранять

Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности используют **метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение.**

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*)$$

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6 - (10x-21)}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-10x+21}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*) \end{aligned}$$

$$(*) = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9}{5} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{-9}{5} \right) = -\frac{3}{10}$$

Замечательные пределы

- ▶ первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

- ▶ второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Примеры

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(2x)}{2x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \\ &= 2 \cdot 1 = 2.\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)^{\frac{1}{3x} \cdot 4x} = e^{\frac{4}{3}}$$