Презентация к уроку

Геометрия 10 класс

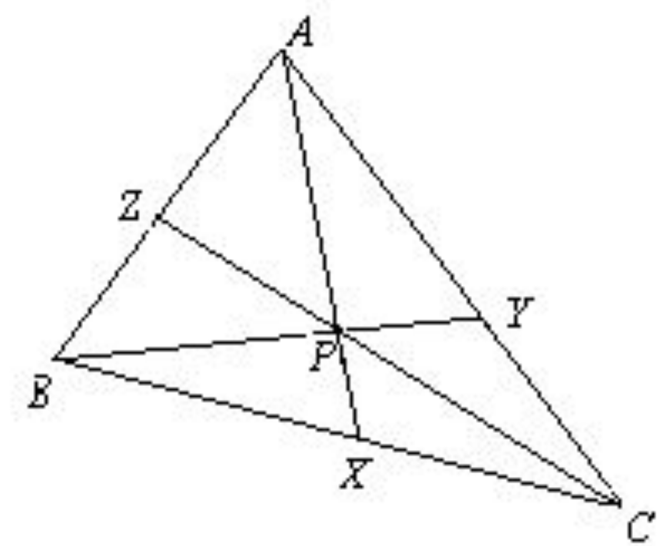
Теоремы Чевы и Менелая

Теоремы Чевы и Менелая

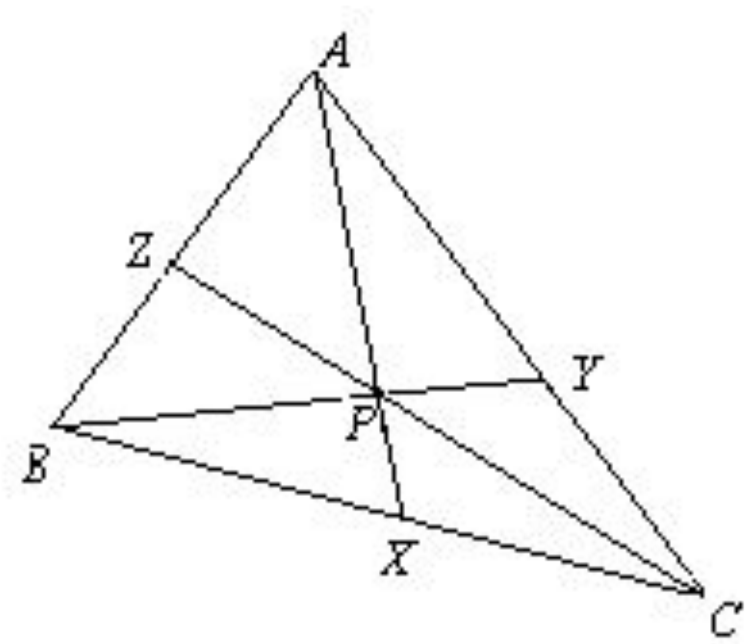
«Обладая литературой более обширной, чем алгебра и арифметика вместе взятые, и по крайней мере столь же обширной, как анализ, геометрия в большей степени чем любой другой раздел математики, является богатейшей сокровищницей интереснейших, но полузабытых вещей, которыми спешащее поколение не имеет времени насладиться». ***Е. Т. Белл.***

ЧЕВИАНА

- *Отрезок, соединяющий вершину треугольника с некоторой точкой на противоположной стороне, называется* ***чевианой****.*
- Таким образом, если в треугольнике ABC X, Y и Z-точки, лежащие на сторонах BC, CA, AB соответственно, то отрезки AX, BY, CZ являются чевианами.
- Этот термин происходит от имени итальянского математика *Джованни Чевы*, который в 1687 году опубликовал следующую очень полезную **теорему**

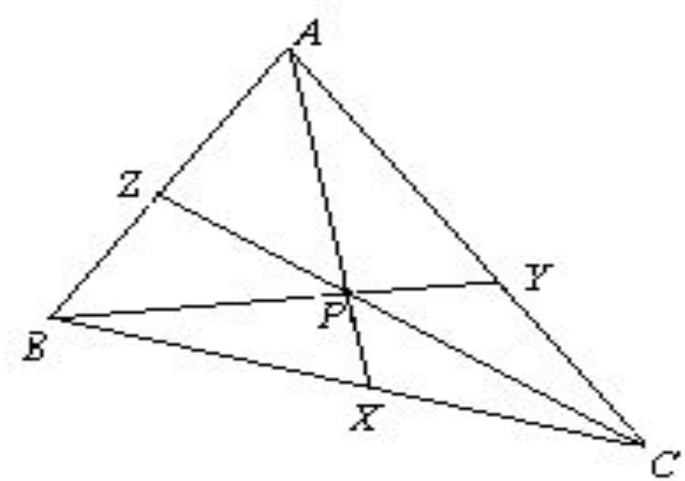


Теорема Чевы



- ***Если три чевианы AX, BY, CZ (по одной из каждой вершины) треугольнка ABC конкурентны, то***

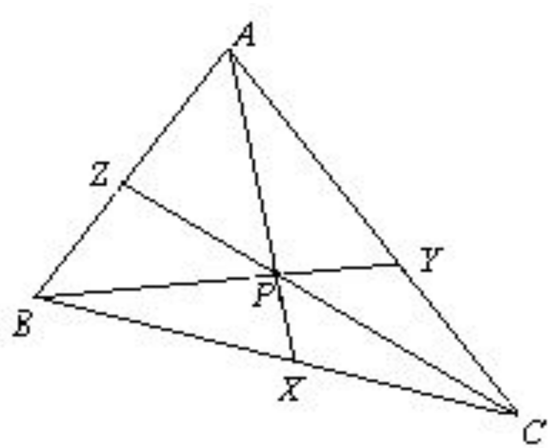
$$\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}\cdot\frac{|AZ|}{|ZB|}=1$$



Когда мы говорим, что три прямые (или отрезка) ***конкурентны****, то мы имеем в виду, что все они проходят через одну точку,* которую обозначим через P.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

- Для доказательства **теоремы Чевы** вспомним, что площади треугольников с равными высотами пропорциональны основаниям треугольников.
- ♦ Ссылаясь на рисунок, мы имеем
-
-
-



$$\frac{|BX|}{|XC|}=\frac{S_{ABX}}{S_{AXC}}=\frac{S_{BPX}}{S_{XPC}}=\frac{S_{ABX}-S_{BPX}}{S_{AXC}-S_{PXC}}=\frac{S_{ABP}}{S_{CPA}}$$

$$\frac{|BX|}{|XC|}=\frac{S_{ABX}}{S_{AXC}}=\frac{S_{BPX}}{S_{XPC}}=\frac{S_{ABX}-S_{BPX}}{S_{AXC}-S_{PXC}}=\frac{S_{ABP}}{S_{CPA}}$$

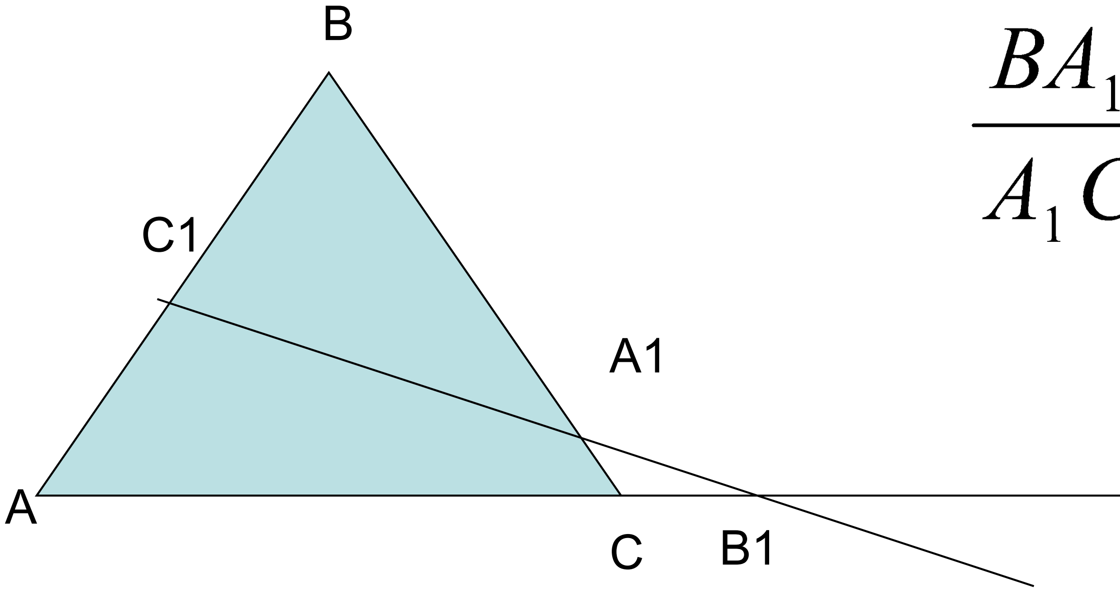
$$\frac{|AZ|}{|ZB|}=\frac{S_{ACZ}}{S_{BCZ}}=\frac{S_{APZ}}{S_{ZPB}}=\frac{S_{ACZ}-S_{APZ}}{S_{BCZ}-S_{ZPB}}=\frac{S_{ACP}}{S_{BCP}}$$

- *Теперь, если мы перемножим их, то получим*
- $$\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}\cdot\frac{|AZ|}{|ZB|}=\frac{S_{ABP}}{S_{CPA}}\,x\,\frac{S_{CPB}}{S_{ABP}}\,x\,\frac{S_{ACP}}{S_{BCP}}=1$$

Теорема Менелая:

- Пусть точка А1 лежит на стороне ВС треугольника АВС, точка С1 – на стороне АВ, точка В1 – на продолжении стороны АС за точку С. Точки А1,В1 иС1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$



$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$$

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1.$$

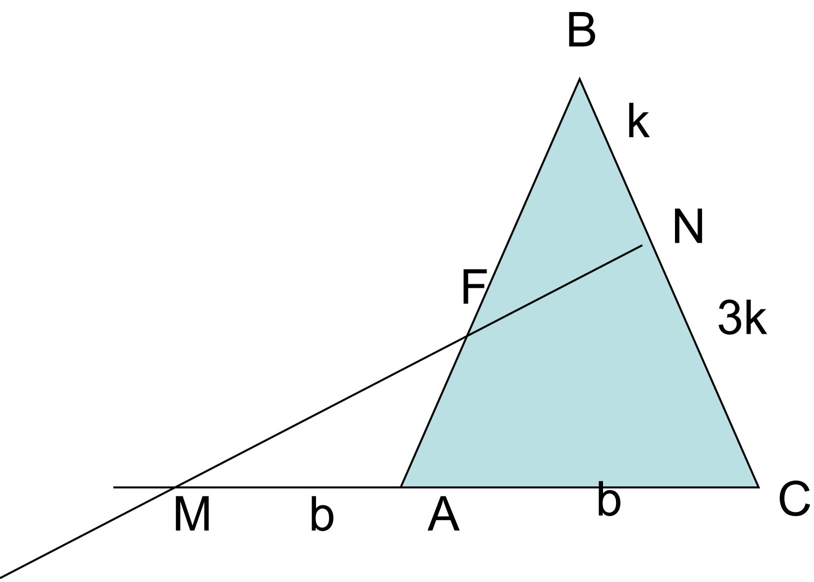
Эта теорема Входит в золотой фонд древнегреческой математики. Она дошла до нас в арабском переводе книги «Сферика» Менелая Александрийского. Равенство Менелая можно записывать, начиная с любой вершины треугольника, в любом направлении (по часовой стрелке, против часовой стрелки).

Задача 1.

В треугольнике ABC на стороне BC взята точка N так, что NC = 3BN; на продолжении стороны AC за точку A взята точка M так, что MA=AC. Прямая MN пересекает сторону AB в точке F.

Найдите: отношение $\dfrac{BF}{FA}$

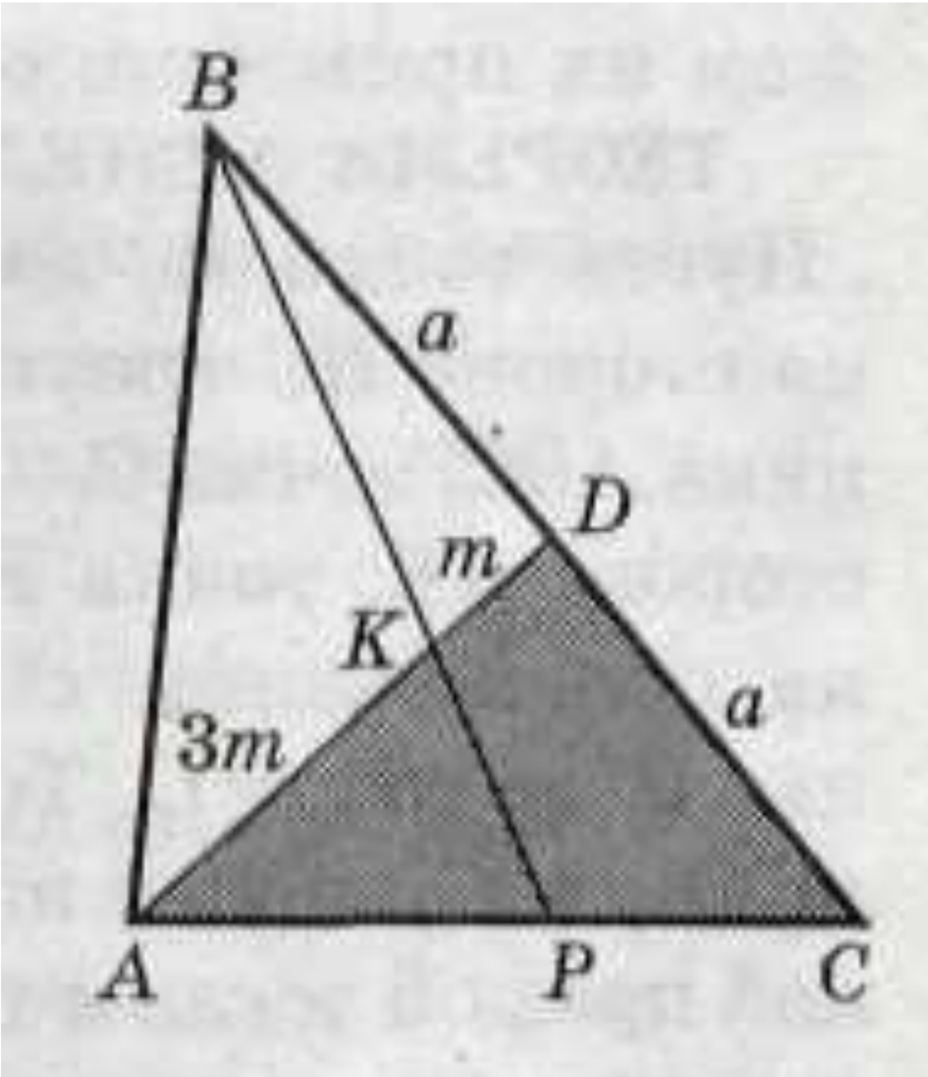
Решение



- По условию задачи MA = AC, NC = 3BN. Пусть MA = AC = b,
- BN = k, NC = 3k. Прямая MN пересекает две стороны треугольника ABC и продолжение третьей. По теореме Менелая

$$\frac{CN}{NB}\cdot\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AM}{MC}=1, \frac{3_k}{k}\cdot\frac{BF}{FA}\cdot\frac{b}{2_b}=1, \frac{BF}{FA}\cdot\frac{3}{2}=1, \frac{BF}{FA}=\frac{2}{3.}$$

Ответ:2:3.



- **Задача 2.**
- Пусть AD – медиана треугольника ABC. На стороне AD взята точка K так, что AK:KD=3:1. Прямая BK разбивает треугольник ABC на два. Найдите отношение площадей этих треугольников.