

Проверка статистических гипотез



Задача 1. Дана генеральная совокупность, имеющая нормальное распределение. По выборке из нее объема 25 получена оценка математического ожидания, равная 5.5. Необходимо проверить статистическую гипотезу о равенстве математического ожидания генеральной совокупности значению 6.6. По окончании проверки гипотезы сделать корректный статистический вывод.

1^a Проверку осуществлять на уровне значимости 0.1, использовать одностороннюю критическую область. Предполагать, что дисперсия генеральной совокупности известна и равна 16.

$$H_0: m = 6,6$$

$$H_1: m < 6,6 - \text{левостор. кр. обл.}$$

$$K_{\text{набл.}} = \frac{(m^* - m_0) \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(5,5 - 6,6) \cdot 5}{\sqrt{16}} = -1,38$$

$$\Phi(U_{\text{кр}}) = \frac{(1 - \alpha)}{2} = 0,4 \Rightarrow U_{\text{кр}} = 1,28$$

$$K_{\text{кр}} = U_{\text{кр}} \quad K_{\text{набл.}} > -U_{\text{кр.}}$$

$$[-1,38 > -1,28] - \text{не вым.}$$

H_0 - отвергается



Таблица функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990



Задача 1. Дана генеральная совокупность, имеющая нормальное распределение. По выборке из нее объема 25 получена оценка математического ожидания, равная 5.5. Необходимо проверить статистическую гипотезу о равенстве математического ожидания генеральной совокупности значению 6.6. По окончании проверки гипотезы сделать корректный статистический вывод.

1^b Проверку осуществлять на уровне значимости 0.02, использовать двустороннюю критическую область. В данном случае предполагаем, что дисперсия неизвестна. Необходимо воспользоваться в качестве ее оценки исправленной выборочной дисперсией, равной 15.5. $= S^2$

$$H_0: m = 6,6$$

$$H_1: m \neq 6,6$$

$$K_{\text{набл.}} = \frac{(m^* - m_0) \cdot \sqrt{n}}{S} = \frac{(5,5 - 6,6) \cdot 5}{\sqrt{15,5}} = -1,40$$

$$K_{\text{кр}} = t_{\text{кр}}: t_{\text{кр}} = t_{0,02}(24) = 2,49$$

$$|K_{\text{набл.}}| < t_{\text{кр}} \quad | -1,40 | < 2,49$$

H_0 принимается.



Распределение Стьюдента

Число степеней свободы ν	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,98	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,64	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,04
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
Уровень значимости α (односторонняя критическая область)						



На основании сделанного прогноза средняя дебиторская задолженность однотипных предприятий региона должна составить 120 тыс. грн. Выборочная проверка 9 предприятий дала среднюю задолженность 135 тыс. грн., а исправленное среднеквадратическое отклонение задолженности - 20 тыс. грн. На уровне значимости 0,05 выяснить, можно ли принять данный прогноз. По окончании проверки гипотезы сделать корректный статистический вывод.

$$n = 9, m^* = 135 \text{ тыс.}; S = 20 \text{ тыс.}; \alpha = 0,05$$

$$H_0: m = 120 \text{ тыс.}$$

$$H_1: m > 120 \text{ тыс.}$$

$$K_{набл} = \frac{(\bar{x} - m_0) \sqrt{n}}{S} = \frac{(135 - 120) \cdot \sqrt{9}}{20} = \frac{15 \cdot 3}{20} = 2,25$$

$$K_{кр} = t_{кр} = t_{0,05}(8) = 1,86$$

$2,25 < 1,86$ — не выпадает

Т.о. H_0 — отвергается.



Задача 2. Дана генеральная совокупность, имеющая нормальное распределение. По выборке из нее объема 25 получена оценка дисперсии, равная 15.5. Необходимо проверить статистическую гипотезу о равенстве дисперсии генеральной совокупности значению 16. По окончании проверки гипотезы сделать корректный статистический вывод.

Проверку осуществлять на уровне значимости $\alpha=0.1$, использовать двустороннюю критическую область. Предполагать, что при нахождении оценки дисперсии математическое ожидание было неизвестно.

$$H_0: \sigma^2 = 16 \quad K_{\text{набл}} = \frac{(n-1) \cdot \hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1) \cdot 15,5}{16} = 23,25$$
$$H_1: \sigma^2 \neq 16$$

$$K_{\text{крл}} = F_{1-\frac{\alpha}{2}}(25-1) = 13,8$$

$$K_{\text{крп}} = F_{\frac{\alpha}{2}}(25-1) = 36,4$$

$$K_{\text{крл}} < K_{\text{набл}} \quad \text{и} \quad K_{\text{набл}} < K_{\text{крп}}$$

$$\left. \begin{array}{l} 13,8 < 23,25 \\ 23,25 < 36,4 \end{array} \right\} \Rightarrow H_0 \text{ - принимается}$$



Распределение χ^2

Число степеней свободы ν	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,3	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,37	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,20	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,1	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,3	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	31,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	18,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,51
23	11,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0



Допустимая погрешность измерительного прибора (σ^2) по паспорту составляет 5 единиц. В результате 10 измерений найдено фактическое значение погрешности, равное 6.2 (исправленная выборочная дисперсия). Требуется на уровне значимости 0,05 проверить, соответствуют ли экспериментальный результат заявленной точности прибора. Или, попросту говоря, не лажает ли этот прибор.

$$n=10; S^2=6,2; \alpha=0,05$$

$$H_0: \sigma^2=5$$

$$H_1: \sigma^2 > 5$$

$$K_{набл} = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma_0^2} = \frac{9 \cdot 6,2^2}{5} = 11,16$$

$$K_{кр} = \chi_{\alpha}^2(n-1) = \chi_{0,05}^2(9) = 16,9$$

$$11,16 < 16,9 \Rightarrow H_0 \text{ принимается.}$$



Задача 3. Задана выборка в виде статистического ряда из генеральной совокупности, имеющей неизвестное распределение. На уровне значимости 0.05 проверить статистическую гипотезу о том, что предложенная выборка получена из равномерно распределенной генеральной совокупности. По окончании проверки гипотезы сделать корректный статистический вывод.

Исходная выборка:

x_i	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58
n_i	0	1	3	4	4	5	4	2	1	1

$$p'_i = \frac{1}{k} = 0,1 \quad k=10$$

$$n'_i = p'_i \cdot n = 0,1 \cdot 25 = 2,5$$



Задача 3. Задана выборка в виде статистического ряда из генеральной совокупности, имеющей неизвестное распределение. На уровне значимости 0.05 проверить статистическую гипотезу о том, что предложенная выборка получена из равномерно распределенной генеральной совокупности. По окончании проверки гипотезы сделать корректный статистический вывод.


Исходная выборка:

$$K_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = \frac{(0 - 2,5)^2}{2,5} + \frac{(1 - 2,5)^2}{2,5} + \frac{(3 - 2,5)^2}{2,5} +$$

$$+ \frac{(4 - 2,5)^2}{2,5} + \frac{(6 - 2,5)^2}{2,5} + \frac{(6 - 2,5)^2}{2,5} + \frac{(4 - 2,5)^2}{2,5} +$$

$$+ \frac{(2 - 2,5)^2}{2,5} + \frac{(1 - 2,5)^2}{2,5} + \frac{(0 - 2,5)^2}{2,5} = 10,6$$

$$K_{\text{кр}} = \chi_{0,05}^2(k-1-\underbrace{z}_0) = \chi_{0,05}^2(10-1-0) = 16,9$$

равн.-р-н $10,6 < 16,9 \Rightarrow$ Но
принимать 

Распределение χ^2

Число степеней свободы ν	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,3	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,37	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,20	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,1	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,3	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	31,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	18,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,51
23	11,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0