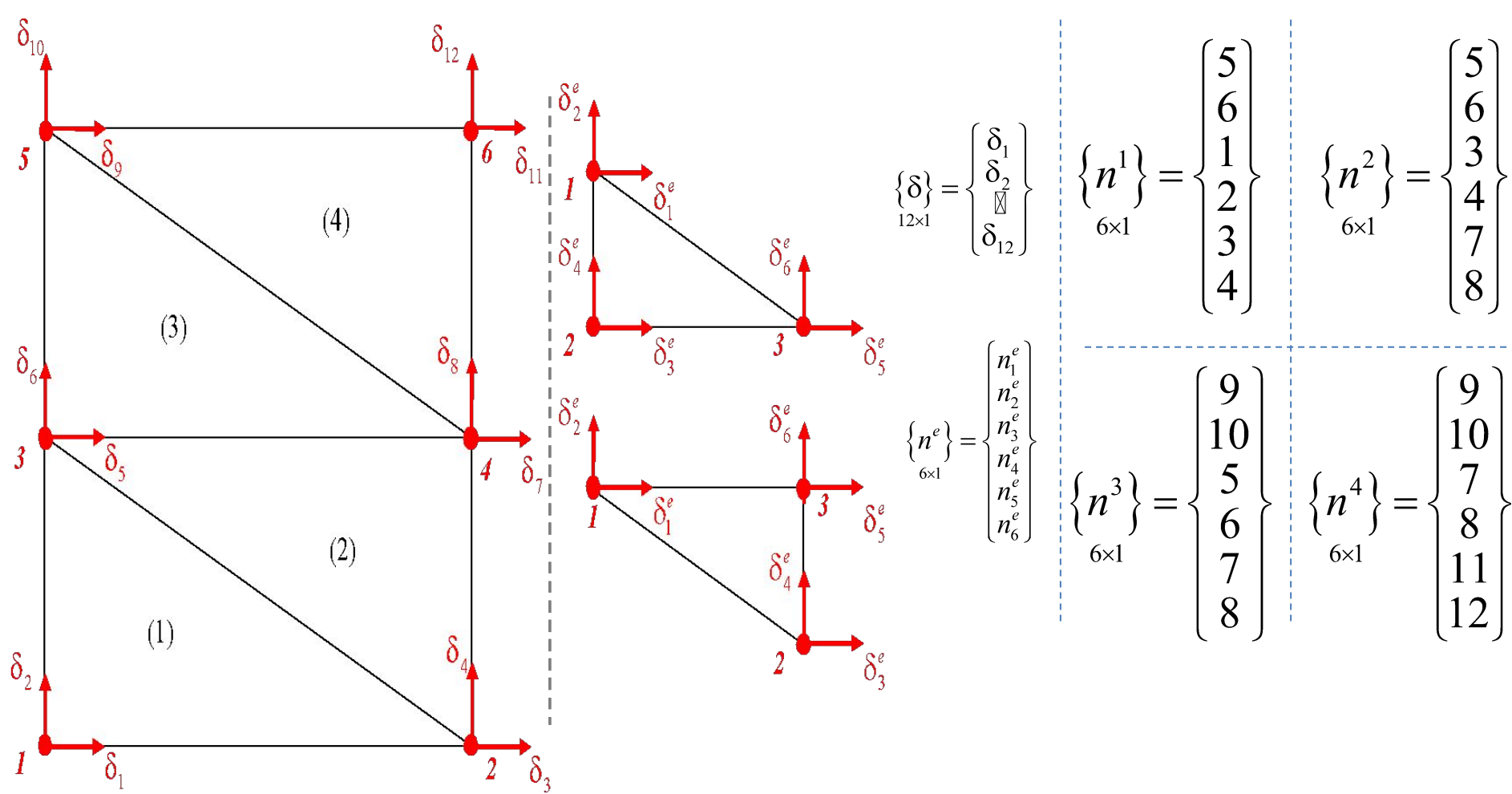


Лекция Вычислительная механика
**Формирование глобальных
векторов и матриц МКЭ**

К.т.н., доцент каф. ВМиМ
Каменских Анна Александровна
239-15-64



$$[K^e]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

$$\{\delta^e\}_{6 \times 1} = \begin{Bmatrix} \delta_1^e \\ \delta_2^e \\ \delta_3^e \\ \delta_4^e \\ \delta_5^e \\ \delta_6^e \end{Bmatrix}, \quad \{F^e\}_{6 \times 1} = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \\ F_5^e \\ F_6^e \end{Bmatrix}$$

$$\{F\}_{12 \times 1} = \sum_e \{F^e\}_{6 \times 1} \quad \text{для каждого элемента введем расширенный вектор узловых сил} \quad \{F\}_{12 \times 1} = \sum_e \{F^{(e)}\}_{12 \times 1}$$

Если $\{F^1\}_{6 \times 1} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ F_4^1 \\ F_5^1 \\ F_6^1 \end{Bmatrix}$ при $\{n^1\}_{6 \times 1} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$, тогда $\{F^{(1)}\}_{12 \times 1} = \begin{Bmatrix} F_3^1 \\ F_4^1 \\ F_5^1 \\ F_6^1 \\ F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$.

Если $\{F^2\}_{6 \times 1} = \begin{Bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \\ F_4^2 \\ F_5^2 \\ F_6^2 \end{Bmatrix}$ при $\{n^2\}_{6 \times 1} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix}$, тогда $\{F^{(2)}\}_{12 \times 1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3^2 \\ F_4^2 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_5^1 \\ F_6^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ и т.д. для других элементов

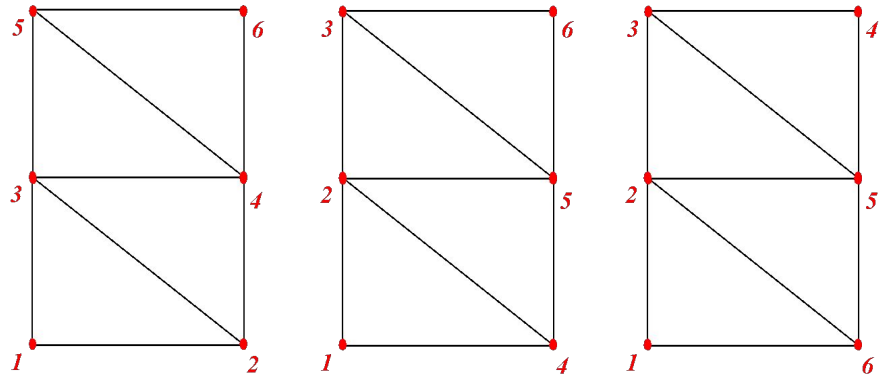
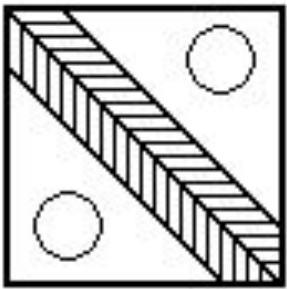
$$\begin{matrix} [K] \\ 12 \times 12 \end{matrix} \begin{matrix} \{\delta\} \\ 12 \times 1 \end{matrix} = \sum_e \begin{matrix} [K^e] \\ 6 \times 6 \end{matrix} \begin{matrix} \{\delta^e\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} = \left(\sum_e \begin{matrix} [K^{(e)}] \\ 12 \times 12 \end{matrix} \right) \begin{matrix} \{\delta\} \\ 12 \times 1 \end{matrix} \rightarrow [K] = \left(\sum_e \begin{matrix} [K^{(e)}] \\ 12 \times 12 \end{matrix} \right) \rightarrow K_{n_i, n_j}^{(e)} = K_{i,j}^e \\ i, j = \overline{1,6}$$



$$\begin{matrix} [K^1] \\ 6 \times 6 \end{matrix} \begin{matrix} \{\delta^1\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} * \begin{matrix} \{\delta_5\} \\ \delta_6 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{matrix} \quad \left[K^{(1)} \right]_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{31} & K_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{41} & K_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{51} & K_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{61} & K_{62} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{21} & K_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} [K^4] \\ 6 \times 6 \end{matrix} \begin{matrix} \{\delta^4\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} * \begin{matrix} \{\delta_9\} \\ \delta_{10} \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \end{matrix} \quad \left[K^{(4)} \right]_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{33} & K_{34} & K_{31} & K_{32} & K_{35} & K_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{43} & K_{44} & K_{41} & K_{42} & K_{45} & K_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{13} & K_{14} & K_{11} & K_{12} & K_{15} & K_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{23} & K_{24} & K_{21} & K_{22} & K_{25} & K_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{53} & K_{54} & K_{51} & K_{52} & K_{55} & K_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{63} & K_{64} & K_{61} & K_{62} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \end{matrix}$$

$$[K]_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+2 & 1+2 & 1+2 & 1+2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+2 & 1+2 & 1+2 & 1+2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+2 & 1+2 & 1+2+3 & 1+2+3 & 2+3 & 2+3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+2 & 1+2 & 1+2+3 & 1+2+3 & 2+3 & 2+3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2+3 & 2+3 & 4+2+3 & 4+2+3 & 4+3 & 4+3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2+3 & 2+3 & 4+2+3 & 4+2+3 & 4+3 & 4+3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 4+3 & 4+3 & 4+3 & 4+3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 4+3 & 4+3 & 4+3 & 4+3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$



Учет граничных условий в перемещениях

известно

$$\delta_i = \overline{\delta}_i$$

$$\begin{bmatrix} \dots & K_{ii} \cdot 10^{10} & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\delta}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{\delta}_i \cdot K_{ii} \cdot 10^{10} \end{Bmatrix} i$$