Российская
Открытая
Академия
Транспорта

Способы представления и минимизация логических функций

Лунев Сергей Александрович

Цель работы: Научиться по цифровой записи функции строить таблицу истинности, временную диаграмму, совершенные дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы, применять свойства, тождества и законы алгебры логики, карты Карно для минимизации логических функций трех переменных.

Порядок выполнения задания

1. Получить индивидуальное задание на практическое занятие (Приложение 1, Приложение 2).

2. По индивидуальному заданию составить таблицу истинности, доопределить безразличия (при их наличии) и построить временную диаграмму.

3. Построить СДНФ на основе следующего алгоритма
3.1. Выделить комбинации в таблице истинности, на которых функция равна 1.
3.2. Для каждой выделенной комбинации составить логическое произведение независимых переменных, из которых она образована, причем если в комбинации значение переменных равно 0, то в логическое произведение эта переменная входит с инверсией, если в комбинации значение переменной равно 1, то в логическое произведение эта переменная входит без инверсии.
3.3. Формула функции образуется путем логического сложения полученных логических произведений.

4. Построить СКНФ на основе следующего алгоритма

4.1. Выделить комбинации в таблице истинности, на которых функция равна 0.

4.2. Для каждой выделенной комбинации составить логическое сложение независимых переменных, из которых она образована, причем если в комбинации значение переменных равно 0, то в логическое сложение эта переменная входит без инверсии, если в комбинации значение переменной равно 1, то в логическое произведение эта переменная входит с инверсией.

4.3. Формула функции образуется путем логического умножения полученных логических сложений.

5. Минимизация полученной логической функции в соответствии с тождествами, свойствами и законами алгебры логики (см. Приложения 3, 4, 5).

5.1. Минимизировать полученную СДНФ с помощью любых изученных свойств, тождеств и законов алгебры логики, полученный результат проверить.

5.2. Минимизировать полученную СКНФ с помощью любых изученных свойств, тождеств и законов алгебры логики, полученный результат проверить.

6. Минимизация полученной логической функции с помощью карты Карно.
6.1. Составить карту Карно в дизъюнктивной форме для логической функции заданной в индивидуальном задании.
6.2. Выполнить минимизацию дизъюнктивной формы логической функции (получить МДНФ) по карте Карно.
6.3. Составить карту Карно в конъюнктивной форме для логической функции заданной в индивидуальном задании.
6.4. Выполнить минимизацию конъюнктивной формы логической функции (получить МКНФ) по карте Карно.

Пример выполнения работы

Исходные данные: $f=\{1, 4, 5, 7\}x,y,z$

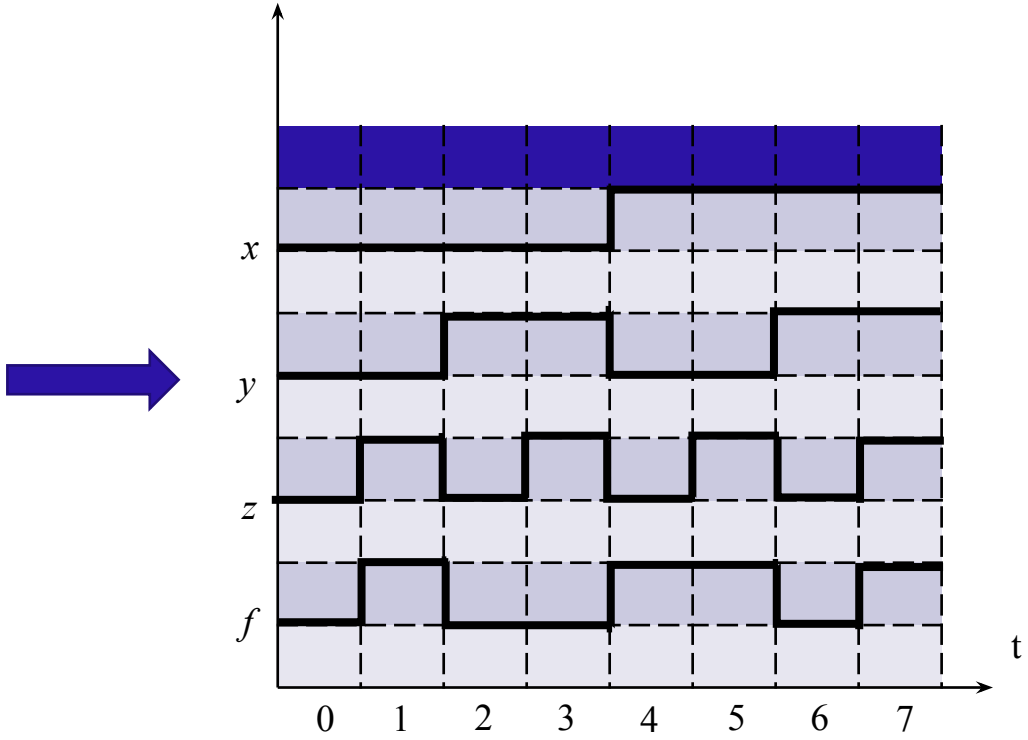
Составим таблицу истинности заданной функции:

Номер комбинации	*x*	*y*	*z*	*f*
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

На наборах аргументов 1, 4, 5, 7 функция *f* принимает значения 1. Следовательно, на наборах 0, 2, 3, 6 – значения 0.

Представление логической функции временной диаграммой

Номер комбинации	*x*	*y*	*z*	*f*
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1



Построение СДНФ заданной логической функции

	x	y	z	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$f =$$

Упрощение логической функции алгебраическим методом

Закон склеивания

$$f = \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z + x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z} + x\cdot\bar{y}\cdot z + x\cdot y\cdot z$$

$\bar{y}\cdot z$ — $x\cdot\bar{y}$ — $x\cdot z$

Идемпотентный закон

$$x\cdot\bar{y}\cdot z = x\cdot\bar{y}\cdot z + x\cdot\bar{y}\cdot z + x\cdot\bar{y}\cdot z$$

$$\boldsymbol{f = \bar{y}\cdot z + x\cdot\bar{y} + x\cdot z}$$

Проверка полученной МДНФ заданной логической функции путем подстановки значений переменных из таблицы истинности

$$f = \bar{y}\cdot z + x\cdot\bar{y} + x\cdot z$$

	x	y	z	$\bar{y}\cdot z$	$x\cdot\bar{y}$	$x\cdot z$	f
0	0	0	0	1·0=0	0·1=0	0·0=0	0
1	0	0	1	1·1=1	0·1=0	0·1=0	1
2	0	1	0	0·0=0	0·0=0	0·0=0	0
3	0	1	1	0·1=0	0·0=0	0·1=0	0
4	1	0	0	1·0=0	1·1=1	1·0=0	1
5	1	0	1	1·1=1	1·1=1	1·1=1	1
6	1	1	0	0·0=0	1·0=0	1·0=0	0
7	1	1	1	0·1=0	1·0=0	1·1=1	1

Построение СКНФ заданной логической функции

$f =$

	x	y	z	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Закон склеивания

$x+z$ $\quad \bar{y}+z$

$$f = (x+y+z)(x+\bar{y}+z)(x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z)$$

$x+\bar{y}$

Идемпотентный закон

$$x+\bar{y}+z = (x+\bar{y}+z)\cdot(x+\bar{y}+z)\cdot(x+\bar{y}+z)$$

$$f = (x+z)\cdot(x+\bar{y})\cdot(\bar{y}+z)$$

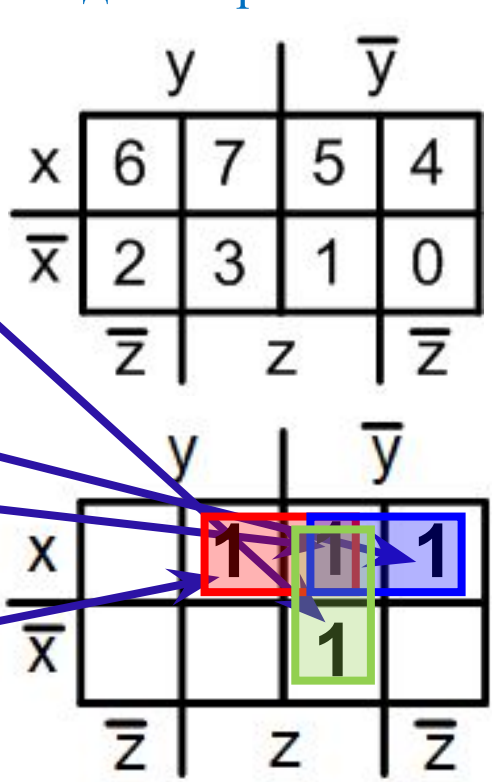
Проверка полученной МКНФ заданной логической функции путем подстановки значений переменных из таблицы истинности

$$f = (x + z) \cdot (x + \bar{y}) \cdot (\bar{y} + z)$$

	x	y	z	$x + z$	$x + \bar{y}$	$\bar{y} + z$	f
0	0	0	0	0+0=0	0+1=1	1+0=1	0
1	0	0	1	0+1=1	0+1=1	1+1=1	1
2	0	1	0	0+0=0	0+0=0	0+0=0	0
3	0	1	1	0+1=1	0+0=0	0+1=1	0
4	1	0	0	1+0=1	1+1=1	1+0=1	1
5	1	0	1	1+1=1	1+1=1	1+1=1	1
6	1	1	0	1+0=1	1+0=1	0+0=0	0
7	1	1	1	1+1=1	1+0=1	0+1=1	1

Минимизация СДНФ заданной логической функции методом Карно

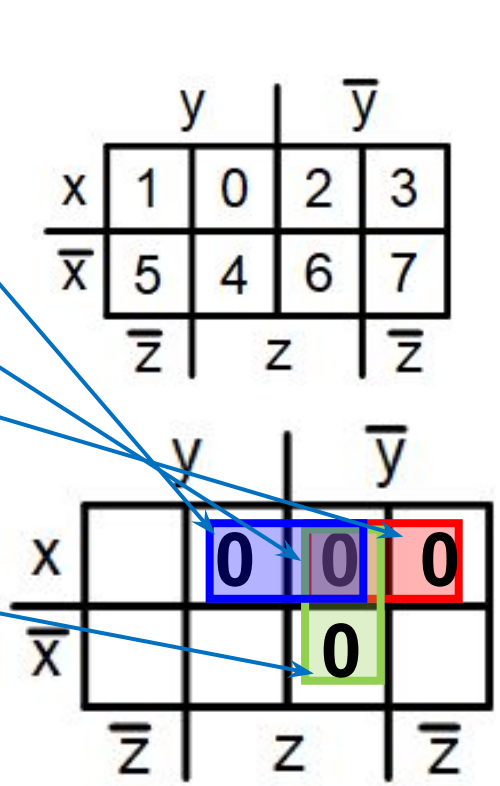
	x	y	z	f	
0	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$f_1 = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$
2	0	1	0	0	
3	0	1	1	0	
4	1	0	0	1	$f_4 = x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$
5	1	0	1	1	$f_5 = x \cdot \bar{y} \cdot z$
6	1	1	0	0	
7	1	1	1	1	$f_7 = x \cdot y \cdot z$



$$f = x \cdot z + x \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot z$$

Минимизация СКНФ логических функций методом Карно

	x	y	z	f	
0	0	0	0	0	$f0 = X + Y + Z$
1	0	0	1	1	
2	0	1	0	0	$f2 = X + \bar{Y} + Z$
3	0	1	1	0	$f3 = X + \bar{Y} + \bar{Z}$
4	1	0	0	1	
5	1	0	1	1	
6	1	1	0	0	$f6 = \bar{X} + \bar{Y} + Z$
7	1	1	1	1	



$$f = (X + \bar{Y})(X + Z)(\bar{Y} + Z)$$

Приложение 1

№ п/п	Ф.И.О.	Задание
1	Аверин Сергей Андреевич.	*f={1, 3, 5, 7}a,b,c*
2	Алыпов Андрей Игоревич	*f={1, 5, 6, 7}a,b,c*
3	Виноградов Сергей Юрьевич	*f={2, 4, 6, 7}a,b,c*
4	Воробьев Евгений Романович	*f={1, 4, 7}a,b,c*
5	Воронин Артем Алексеевич	*f={1, 3, 4, 7}a,b,c*
6	Гуляев Борис Викторович	*f={1, 4, 6, 7}a,b,c*
7	Гуськов Максим Игоревич	*f={1, 3, 4, (6, 7)}a,b,c*
8	Егоров Даниил Андреевич	*f={1, 3, 5}a,b,c*
9	Ерохин Павел Александрович	*f={2, 4, 6}a,b,c*
10	Закотельников Николай Владимирович	*f={1, 3 / 4, 5, 6, 7}a,b,c*
11	Зотова Анастасия Михайловна	*f={1, 4, 6}a,b,c*
12	Ильичёв Владимир Александрович	*f={1, 2, 7}a,b,c*
13	Калугин Александр Дмитриевич	*f={1, 2, 6}a,b,c*
14	Карамнов Геннадий Николаевич	*f={2, 3, 7}a,b,c*
15	Киличев Бехрузбек Бозор угли	*f={1, 3, 4, 6, 7}a,b,c*
16	Клипин Константин Валерьевич	*f={1, 2, 5, 7}a,b,c*
17	Концелидзе Эдуард Зазаевич	*f={2, 3, 6}a,b,c*
18	Коротков Михаил Алексеевич	*f={1, 2, 5, 6, 7}a,b,c*

Приложение 2

№ п/п	Ф.И.О.	Задание
19	Куделин Артем Сергеевич	*f={1, 3 / 4, 5, 6, 7}a,b,c*
20	Лабутенков Михаил Викторович	*f={1, 2, 4, 7}a,b,c*
21	Личутин Алексей Владимирович	*f={1, 2, 4, 6, 7}a,b,c*
22	Носиков Максим Андреевич	*f={2, 3, 7}a,b,c*
23	Олефиренко Александр Витальевич	*f={1, 2, 4, 5, 7}a,b,c*
24	Петров Алексей Павлович	*f={1, 3, 4 (6, 7)}a,b,c*
25	Пинашин Данила Андреевич	*f={2, 3, 5 (6, 7)}a,b,c*
26	Поддубный Иван Михайлович	*f={1, 2, 3}a,b,c*
27	Сазонов Алексей Петрович	*f={1, 2, 3, 7}a,b,c*
28	Скобкин Михаил Сергеевич	*f={1, 3 / 5, 6, 7}a,b,c*
29	Тароян Алина Араиковна	*f={1, 2, 3, 6, 7}a,b,c*
30	Тимофеев Михаил Владимирович	*f={1, 2, 7}a,b,c*
31	Хромов Даниил Андреевич	*f={5, 6, 7 (0, 1)}a,b,c*
32	Чудакова Ольга Владимировна	*f={0, 2, 4, 6, 7}a,b,c*
33	Шадрыгин Вячеслав Валентинович	*f={0, 4, 7 (1)}a,b,c*
34		*f={0, 3, 4, 7 (1)}a,b,c*
35		*f={0, 4, 6, 7 (1)}a,b,c*
36		*f={0, 3, 4, 6, 7 (1)}a,b,c*

Свойства
и отношения эквивалентности

Принцип подстановки

Если x = y, то в любом выражении содержащем
переменную x, его можно заменить на переменную y

Симметричность

Если x = y, то и y = x

Транзитивность

Если x = y и y = z, то x = z

Тождества алгебры логики

$$x + 0 = x;$$
$$x + 1 = 1;$$
$$x + \bar{x} = 1;$$

$$\bar{\bar{x}} = x$$

$$x \cdot 0 = 0;$$
$$x \cdot 1 = x;$$
$$x \cdot \bar{x} = 0;$$

ИЛИ

x	y	f_7
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

НЕ

X	$f_1(x)$
0	1
1	0

И

x	y	f_1
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Законы алгебры логики

Коммутативный (переместительный)

$$x \cdot y = y \cdot x; \qquad x + y = y + x;$$

Ассоциативный (сочетательный)

[redacted]

Дистрибутивный (распределительный)

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z;$$

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z);$$

Идемпотентный

$$x \cdot x = x; \qquad x + x = x$$

Законы алгебры логики

Закон поглощения

$$x+x\cdot y = x; \qquad x\cdot(x+y) = x;$$

Закон склеивания

$$x\cdot y+x\cdot \bar{y} = x; \qquad (x+y)\cdot(x+\bar{y}) = x;$$

Закон двойственности (закон де Моргана)

$$\overline{x+y} = \bar{x}\cdot\bar{y};$$

$$\overline{x\cdot y} = \bar{x}+\bar{y};$$