Информатика

ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

8 класс

Издательство БИНОМ

Ключевые слова

- алгебра логики
- высказывание
- логическая операция
- конъюнкция
- дизъюнкция
- отрицание
- логическое выражение
- таблица истинности
- законы логики

Логика

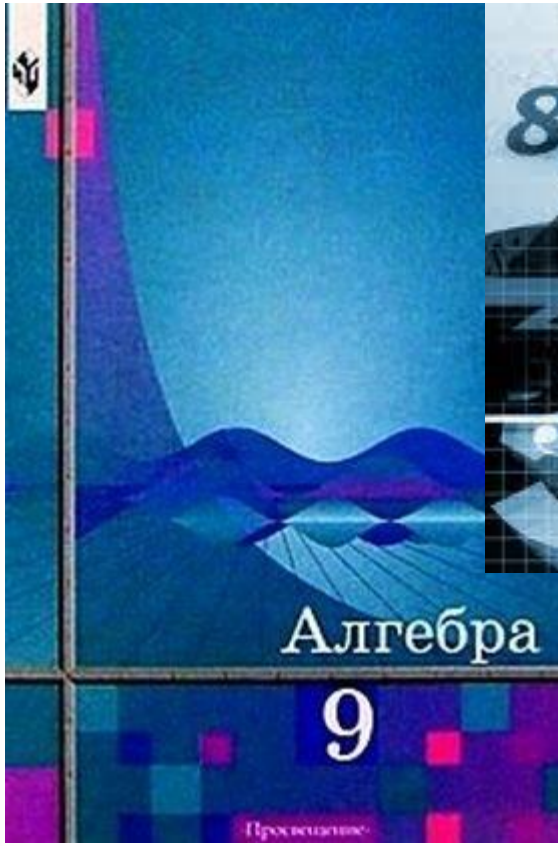
Аристотель (384-322 до н.э.). Основоположник формальной логики (понятие, суждение, умозаключение).

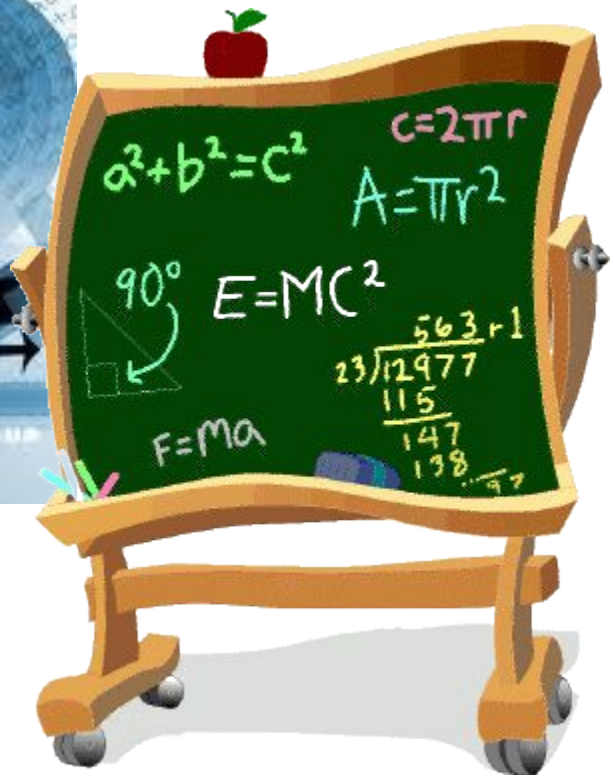
Джордж Буль (1815-1864). Создал новую область науки - Математическую логику (Булеву алгебру или Алгебру высказываний).

Клод Шеннон (1916-2001). Его исследования позволили применить алгебру логики в вычислительной технике

Алгебра

Алгебра - наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться над разнообразными математическими объектами – числами, многочленами, векторами и др.





Высказывание

Высказывание - это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как **истинное** или **ложное**.

В русском языке высказывания выражаются повествовательными предложениями:

Земля вращается вокруг Солнца.
Москва - столица.

Но не всякое повествовательное предложение является высказыванием:

Это высказывание ложное.

Побудительные и вопросительные предложения высказываниями не являются.

Без стука не входить!
Откройте учебники.
Ты выучил стихотворение?

Высказывание или нет?

- ✓ Зимой идет дождь.
- ✓ Снегири живут в Крыму.

Кто к нам пришел?

- ✓ У треугольника 5 сторон.

Как пройти в библиотеку?

Переведите число в десятичную систему.

Запишите домашнее задание

Алгебра логики

Алгебра логики определяет правила записи, вычисления значений, упрощения и преобразования высказываний.

В алгебре логики высказывания обозначают буквами и называют ***логическими переменными***.

Если высказывание истинно, то значение соответствующей ему логической переменной обозначают единицей (***A*** = **1**), а если ложно - нулём (***B*** = **0**).

0 и **1** называются ***логическими значениями***.

Простые и сложные высказывания

Высказывания бывают простые и сложные.

Высказывание называется ***простым***, если никакая его часть сама не является высказыванием.

Сложные (составные) высказывания строятся из простых с помощью логических операций.

Название логической операции	Логическая связка
Конъюнкция	«и»; «а»; «но»; «хотя»
Дизъюнкция	«или»
Инверсия	«не»; «неверно, что»

Логические операции

Конъюнкция - логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум высказываниям новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

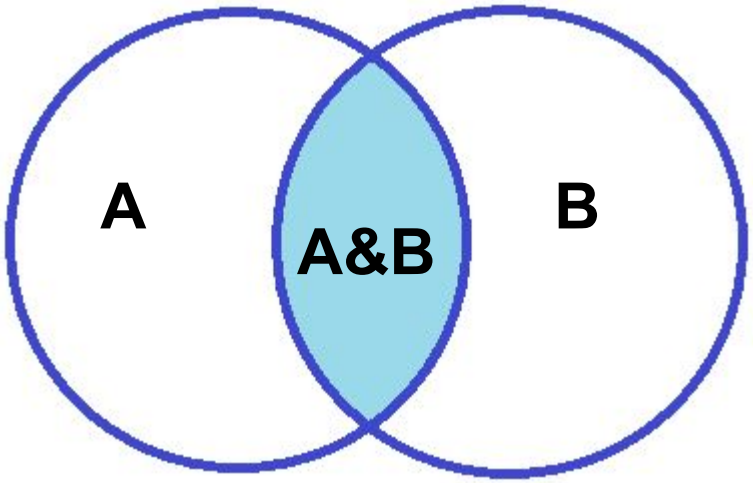
Другое название: ***логическое умножение.***

Обозначения: **∧ , ×, &, И.**

Таблица истинности:

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Графическое представление



Логические операции

Дизъюнкция - логическая операция, которая каждым двум высказываниям ставит в соответствие новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны.

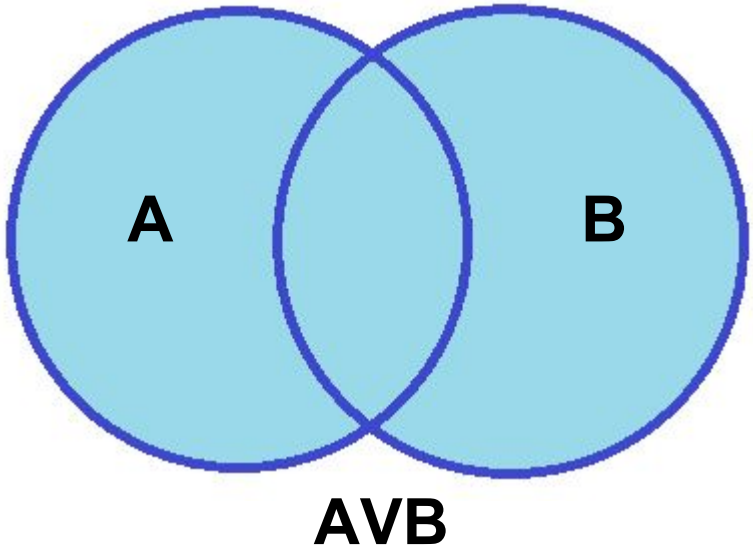
Другое название: ***логическое сложение***.

Обозначения: **V, |, ИЛИ, +.**

Таблица истинности:

A	B	AVB
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Графическое представление



Логические операции

Инверсия - логическая операция, которая каждому высказыванию ставит в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному.

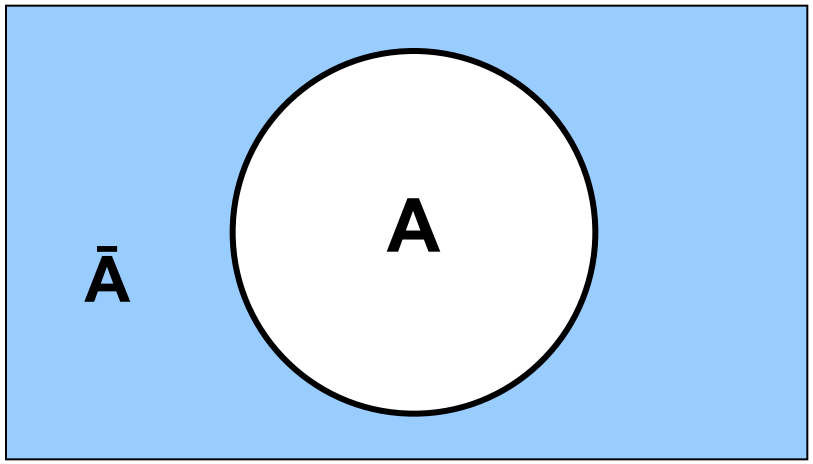
Другое название: ***логическое отрицание.***

Обозначения: **НЕ, ¬ , $\bar{}$** .

Таблица истинности:

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Графическое представление



Логические операции имеют следующий приоритет:
инверсия, конъюнкция, дизъюнкция.

Решаем задачу

Пусть ***A*** = «На Web-странице встречается слово "крейсер"», ***B*** = «На Web-странице встречается слово "линкор"».

В некотором сегменте сети Интернет 5000000 Web-страниц. В нём высказывание ***A*** истинно для 4800 страниц, высказывание ***B*** - для 4500 страниц, а высказывание ***A***V***B*** - для 7000 страниц.

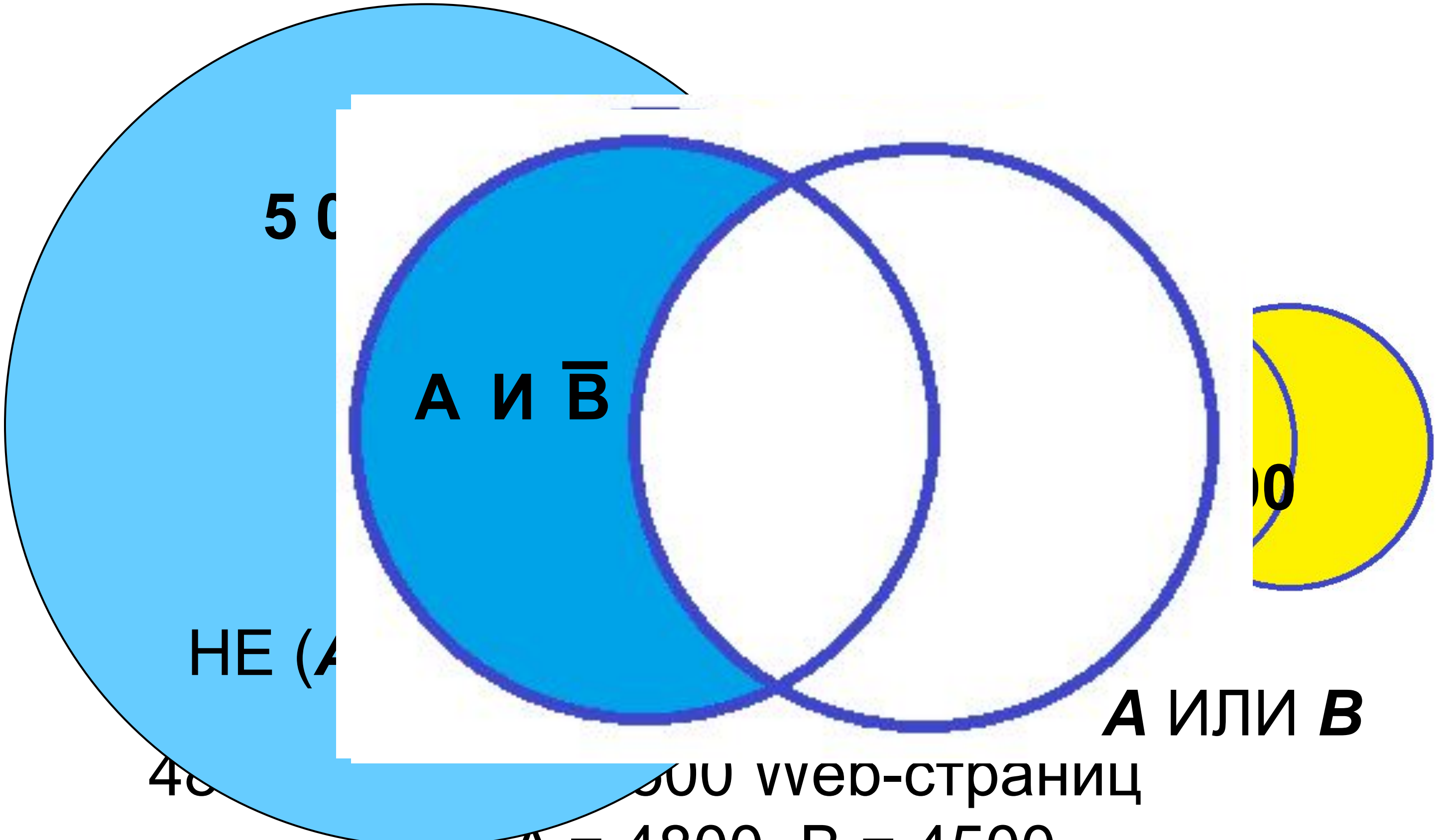
Для какого количества Web-страниц в этом случае будут истинны следующие выражения и высказывание?

а) **НЕ** (***A*** **ИЛИ** ***B***);

б) ***A*** **&** ***B***;

в) *На Web-странице встречается слово "крейсер"* ***И НЕ*** *встречается слово "линкор".*

Представим условие задачи графически:



… Web-страниц

А = 4800, В = 4500.

Сегмент Web-страниц

4800 + 4500 = 9300

И НЕ встречается *слово "линкор".*

9300 – 7000 = **2300** Web-страниц **А&В**

Построение таблиц истинности для логических выражений

подсчитать ***n*** - число переменных в выражении

подсчитать общее число логических операций в выражении

установить последовательность выполнения логических операций

определить число столбцов в таблице

заполнить шапку таблицы, включив в неё переменные и операции

определить число строк в таблице без шапки: $m = 2^n$

выписать наборы входных переменных

провести заполнение таблицы по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью

Пример построения таблицы истинности

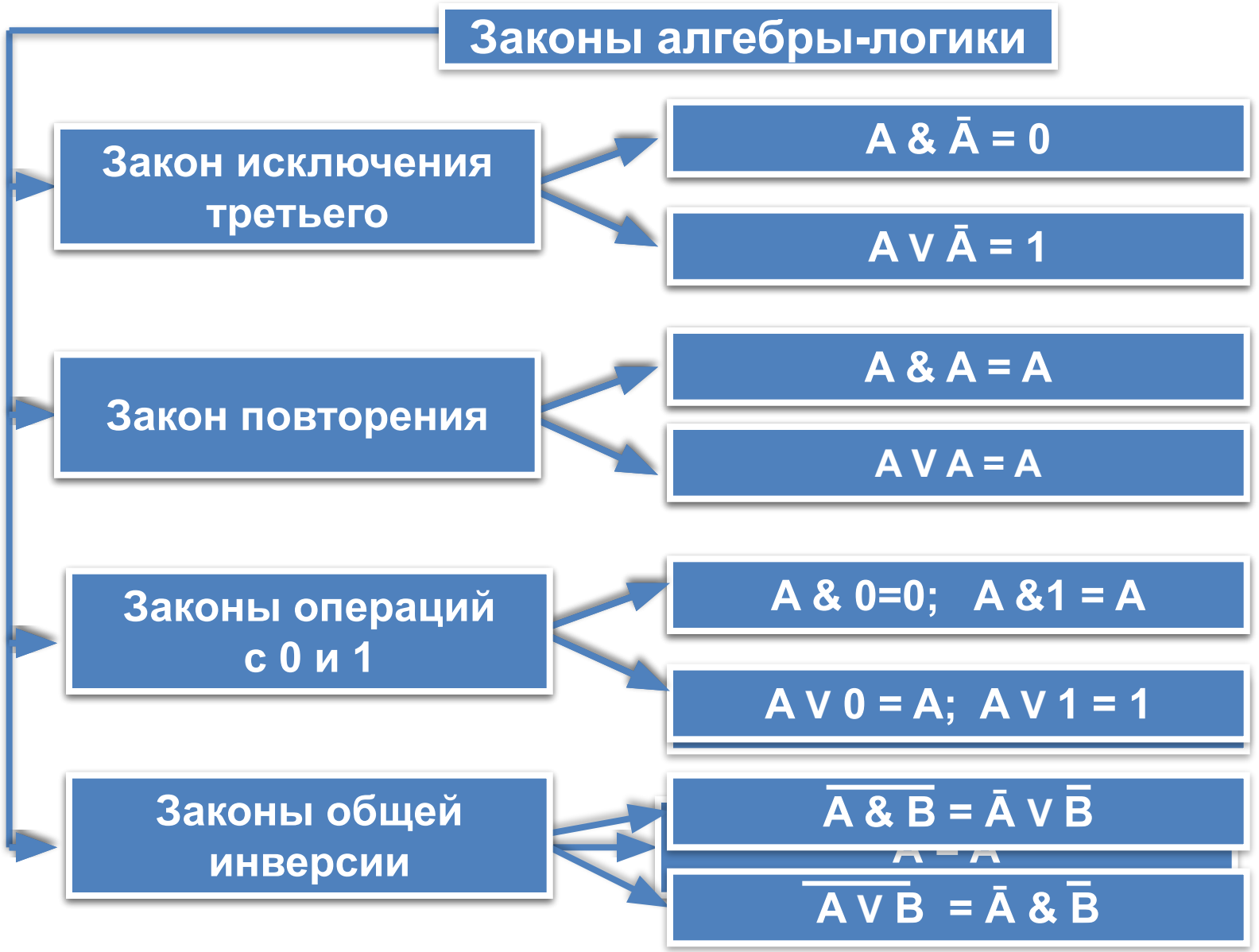
$A \vee A \& B$

$n = 2, m = 2^2 = 4$.

Приоритет операций: &, V

A	B	A&B	AvA&B
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Свойства логических операций



Доказательство закона

Распределительный закон для логического сложения:

A v (B & C) = (A v B) & (A v C).

A	*B*	*C*	*B&C*	*A v (B & C)*	*A v B*	*A v C*	*(A v B) & (A v C)*
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Сравнение (*A v B*) (*A v C*) и *A v (B & C)* доказывает распределительный закон.

Решение логических задач

Задача. Коля, Вася и Серёжа гостили летом у бабушки. Однажды один из мальчиков нечаянно разбил любимую бабушкину вазу.

На вопрос, кто разбил вазу, они дали такие ответы:

Серёжа: 1) Я не разбивал. 2) Вася не разбивал.

Вася: 3) Серёжа не разбивал. 4) Вазу разбил Коля.

Коля: 5) Я не разбивал. 6) Вазу разбил Серёжа.

Бабушка знала, что один из её внуков (правдивый), оба раза сказал правду; второй (шутник) оба раза сказал неправду; третий (хитрец) один раз сказал правду, а другой раз - неправду. Назовите имена правдивого, шутника и хитреца.

Кто из внуков разбил вазу?

Решение. Пусть К =«Коля разбил вазу»,
В =«Вася разбил вазу»,
С =«Серёжа разбил вазу».

Представим в таблице истинности высказывания каждого мальчика. Так как ваза разбита одним внуком, составим не всю таблицу, а только её фрагмент, содержащий наборы входных переменных: 001, 010, 100.

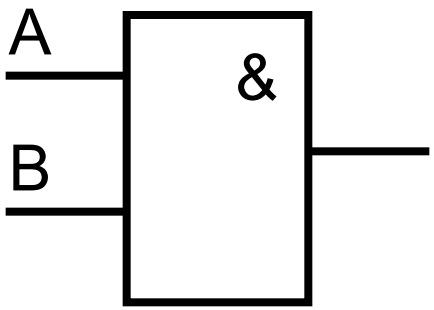
К	В	С	Утверждение Серёжи		Утверждение Васи		Утверждение Коли	
			$\overline{С}$	$\overline{В}$	$\overline{С}$	К	$\overline{К}$	С
0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0

Исходя из того, что знает о внуках бабушка, следует искать в таблице строки, содержащие в каком-либо порядке три комбинации значений: 00, 11, 01 (или 10). Это первая строка.

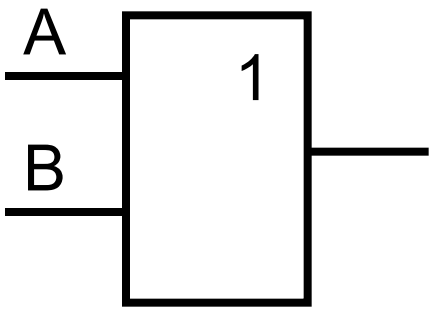
Вазу разбил Серёжа, он - хитрец. Шутником оказался Вася. Имя правдивого внука - Коля.

Логические элементы

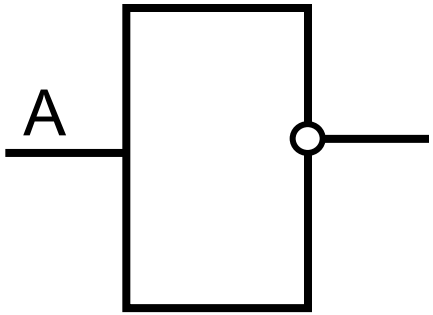
Логический элемент – устройство, которое после обработки двоичных сигналов выдаёт значение одной из логических операций.



И (конъюнктор)



ИЛИ (дизъюнктор)

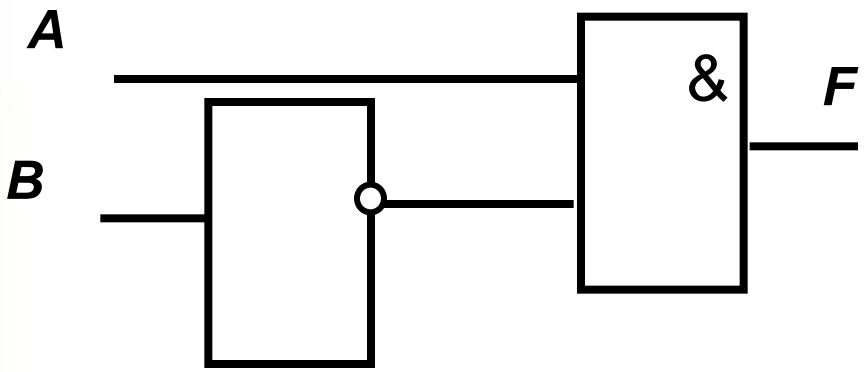


НЕ (инвертор)

Анализ электронной схемы

Решение. Все возможные комбинации сигналов на входах ***A*** и ***B*** внесём в таблицу истинности. Проследим преобразование каждой пары сигналов при прохождении их через логические элементы и запишем полученный результат в таблицу. Заполненная таблица истинности полностью описывает рассматриваемую электронную схему.

Какой сигнал должен быть на выходе при каждом возможном наборе сигналов на входах?



A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

В инвертор поступает сигнал от входа ***B***.

В конъюнктор поступают сигналы от входа ***A*** и от инвертора. Таким образом, $F = A \,\&\, \overline{B}$.

Самое главное

Высказывание — это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как истинное или ложное.

Ос... е ... ад
выс... ия,

На... операции	Ло...	
Инверсия	«не...	
Конъюнкция	«и», «а», «но», «хотя»	&
Дизъюнкция	«или»	V

Таблицы истинности для основных логических операций:

A	*Ā*
0	**1**
1	**0**

A	*B*	*A&B*	*AVB*
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

При вычислении логических выражений сначала выполняются действия в скобках. Приоритет выполнения логических операций: **¬, &, V**.

Вопросы и задания

В следующих высказываниях выделите простые

1) $A \& B$;
2) $\overline{A} \& B$;
3) $A \& \overline{B}$;
4) $A \vee B$;
5) $A \vee \overline{B}$;
6) $\overline{A} \vee \overline{B}$;
7) $\overline{(A \& B)}$;
8) $\overline{(A \vee B)}$;
9) $(A \& \overline{B})$.

работу.

Вопросы и задания

Разбирается дело Джона, Брауна и Смита. Известно, что один из них нашёл и утаил клад. На следствии каждый из подозреваемых сделал два заявления:

1) **Смит**: «*Я не делал этого. Браун сделал это*».

Джон: «*Браун не виновен. Смит сделал это*».

Браун: «*Я не делал этого. Джон не делал этого*».

Суд установил, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, третий один раз солгал, один раз сказал правду.

Кто из подозреваемых должен быть оправдан?

Алёша, Боря и Гриша нашли в земле старинный сосуд. Рассматривая удивительную находку, каждый высказал по два предположения:

1) **Алёша**: «*Этот сосуд греческий. Браун сделал это*».

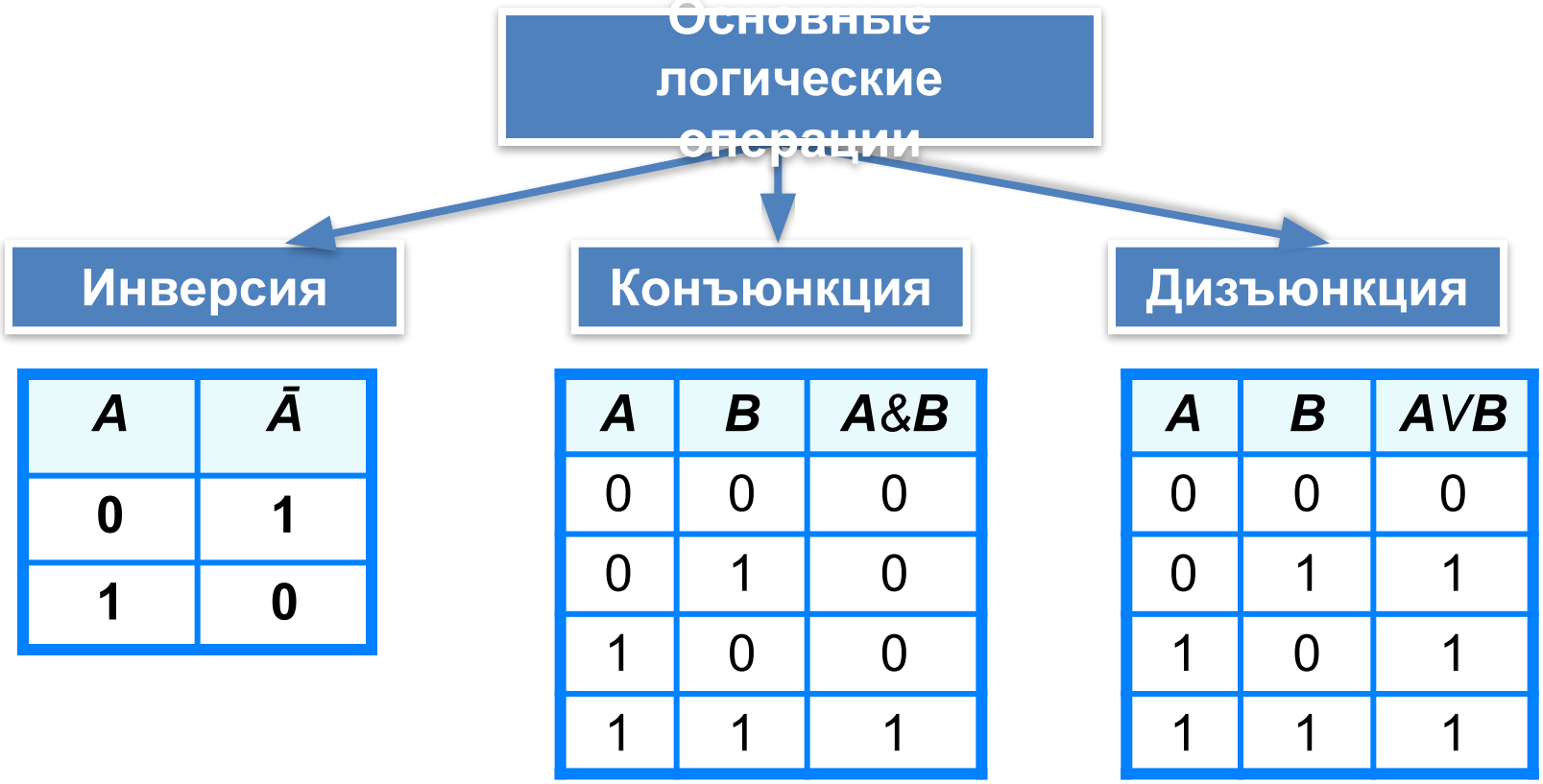
2) **Боря**: «*Это сосуд финикийский и изготовлен в III веке*».

3) **Гриша**: «*Это сосуд не греческий и изготовлен в IV веке*».

Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух предположений. Где и в каком веке изготовлен сосуд?

Опорный конспект

Высказывание *– это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как истинное или ложное.*



A	*Ā*
0	**1**
1	**0**

A	*B*	*A&B*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	*B*	*AVB*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Приоритет выполнения логических операций: **¬, &, V**.

Электронные образовательные ресурсы

1. http://school-collection.edu.ru/catalog/res/9e997f40-f285-4369-aa7d-88b892beca45/?interface=catalog&class=51&subject=19 – Элементарные логические операции