СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Понятие случайной величины является основным в теории вероятностей и ее приложениях. Случайными величинами, например, являются число выпавших очков при однократном бросании игральной кости, число распавшихся атомов радия за данный промежуток времени, число вызовов на телефонной станции за некоторый промежуток времени, отклонение от номинала некоторого размера детали при правильно налаженном технологическом процессе и т. д.

Таким образом, *случайной величиной* называется переменная величина, которая в результате опыта может принимать то или иное числовое значение.

В дальнейшем мы рассмотрим два типа случайных величин — дискретные и непрерывные.

Дискретные случайные величины.

Рассмотрим случайную величину * , возможные значения которой образуют конечную или бесконечную последовательность чисел *x1, x2, ..., xn, ...* . Пусть задана функция *p(x)*, значение которой в каждой точке *x=xi (i=1,2, ...)* равно вероятности того, что величина примет значение *xi*

Такая случайная величина называется *дискретной (прерывной)*. Функция *p(x)* называется *законом распределения вероятностей случайной величины*, или кратко, *законом распределения*. Эта функция определена в точках последовательности *x1, x2, ..., xn, ...* . Так как в каждом из испытаний случайная величина принимает всегда какое-либо значение из области ее изменения, то

Пример 1. Случайная величина — число очков, выпадающих при однократном бросании игральной кости. Возможные значения — числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. При этом вероятность того, что примет любое из этих значений, одна и та же и равна 1/6. Какой будет закон распределения ?

Решение: Таким образом, здесь закон распределения вероятностей есть функция *p(x)=1/6* для любого значения *x* из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Непрерывные случайные величины.

Кроме дискретных случайных величин, возможные значения которых образуют конечную или бесконечную последовательность чисел, не заполняющих сплошь никакого интервала, часто встречаются случайные величины, возможные значения которых образуют некоторый интервал. Примером такой случайной величины может служить отклонение от номинала некоторого размера детали при правильно налаженном технологическом процессе. Такого рода, случайные величины не могут быть заданы с помощью закона распределения вероятностей *p(x)*. Однако их можно задать с помощью функции распределения вероятностей *F(x)*.

Эта функция определяется точно так же, как и в случае дискретной случайной величины:

$$F(x) = P(\xi < x)$$

Таким образом, и здесь функция *F(x)* определена на всей числовой оси, и ее значение в точке *x* равно вероятности того, что случайная величина примет значение, меньшее чем *x*.

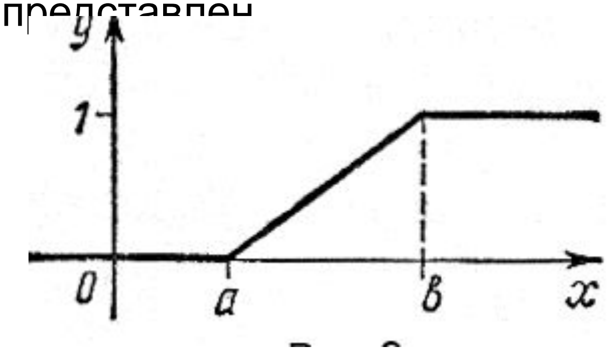
Случайная величина называется ***непрерывной***, если для нее существует неотрицательная кусочно-непрерывная функция* , удовлетворяющая для любых значений *x* равенству

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$$

Равномерное распределение
функции распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,\text{если } x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & ,\text{если } a<x\le b\\ 1 & ,\text{если } x>b\end{cases}$$

График функции F(x) представлен



$$\varphi(x)=F'(x)=\left(\frac{x-a}{b-a}\right)'=\frac{1}{b-a}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & ,\text{если } x<a\\ \dfrac{1}{b-a} & ,\text{если } a<x<b\\ 0 & ,\text{если } x>b\end{cases}$$

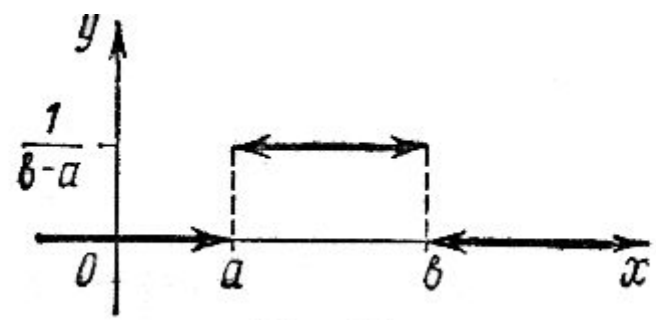


График функции $\varphi(x)$. Заметим, что в точках *a* и *b* функция терпит разрыв.

Нормальное распределение

Говорят, что случайная величина *нормально распределена* или подчиняется *закону распределения Гаусса*, если ее плотность распределения имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}$$

где a - любое действительное число, а $\sigma > 0$, график

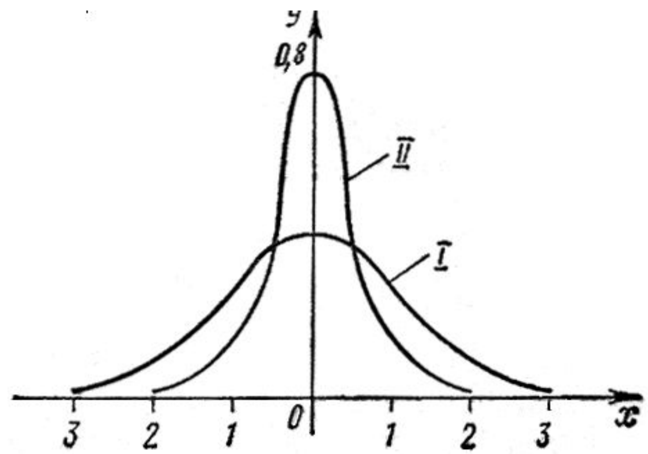


Рис. 11

Исходя из связи между плотностью распределения и функциеи распределения $F(x)$, имеем

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-(t-a)^2/(2\sigma^2)} dt$$

Математическое ожидание случайной величины и его свойства

Пусть - дискретная случайная величина $P(\xi = x_i) = p_i$ с заданным законом распределения вероятностей

Значения ξ	x_1	x_2	. . .	x_n
Вероятности $P(\xi = x_i)$	p_1	p_2	. . .	p_n

*Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма парных произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие им вероятности, т.е. **

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Дисперсией $D(\xi)$ случайной величины ξ называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математичекого ожидания *:

$$D(\xi) = M[\xi - M(\xi)]^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(\xi)]^2 p_i$$