

*Числа не управляют миром,
но они показывают,
как управляется мир.*

И. Гёте

*Не будем спорить – будем
вычислять.*

Г. Лейбниц

ОДУ высших порядков

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой значения независимой переменной x , неизвестной функции $y=f(x)$ и её производных (или дифференциалов):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Общим решением (общим интегралом) уравнения называется соотношение вида:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Некоторые типы уравнений, допускающие понижение порядка

Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x)$$

решается последовательным n -кратным интегрированием.

Пример:



$$y^{(4)} = \sin x$$

Пример:

$$y^{(4)} = \sin x \Rightarrow y''' = \int \sin x dx = -\cos x + C_1 \Rightarrow$$

$$y'' = -\int (\cos x + C_1) dx = -\sin x + C_1 x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \Rightarrow$$

$$y = \sin x + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Переобозначив постоянные, общее решение
можно записать в виде :

$$y = \sin x + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Порядок уравнения вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, y^{(k+2)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, не содержащего функции $y(x)$ и $(k - 1)$ младшую производную этой функции в явном виде, может быть **понижен ровно на k единиц** введением новой неизвестной функции $z(x) = y^{(k)}(x)$. Тогда уравнение примет вид

$$F(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-k)}) = 0$$

т.е. будет уравнением $(n - k)$ -го порядка.

После нахождения $z(x)$ последовательным интегрированием решается уравнение $y^{(k)}(x) = z(x)$.

Пример: Понизить порядок уравнения:



$$x^6 y''' - 2x^5 y'' = \frac{(y'')^3}{2}$$

Младшая производная, входящая в явной форме в уравнение, - вторая, поэтому делаем замену искомой функции:

$$z(x) = y''(x)$$

Тогда

$$y''' = z'$$

и уравнение примет вид

$$x^6 z' - 2x^5 z = \frac{z^3}{2}$$

Определение:



Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (A)$$

где a , b и c - постоянные величины.

Формула (A) может быть записана и так:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0, \quad (B)$$

Для нахождения общего решения данного уравнения составляется характеристическое уравнение:



$$ak^2 + bk + c = 0$$

Это уравнение получается из первоначального уравнения (A) путем замены производных искомой функции, соответствующими степенями K и сама функция заменяется единицей.

Общее решение дифференциального уравнения строится в зависимости от характера корней характеристического уравнения $ak^2 + bk + c = 0$:

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Возможны три случая:

I случай:



k_1 и k_2 действительные корни и различные, тогда общее решение примет вид:

$$y = C_1 \cdot e^{k_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{k_2 \cdot x}. \quad (1)$$

II случай:



$k_1 = k_2 = k$ - действительные и равные, тогда общее решение примет вид:

$$y = C_1 \cdot e^{k \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{k \cdot x}. \quad (2)$$

III случай:



k_1 и k_2 - комплексные числа, а именно

$$k_1 = \alpha + \beta \cdot i, \quad k_2 = \alpha - \beta \cdot i,$$

тогда общее решение имеет вид:

$$y = e^{\alpha \cdot x} (C_1 \cdot \cos \beta \cdot x + C_2 \cdot \sin \beta \cdot x). \quad (3)$$

Решение задач

Пример 1. $y'' - 7y' + 6y = 0$

Пример 2. $y'' + 10y' + 25y = 0$

Пример 3. $y'' + 6y' + 25y = 0$

Пример 4. $y'' + y = 0$

Пример 5. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 8y' + 16y = 0$ если $y(0)=1$ и $y'(0)=3$