Числа не управляют миром,

но они показывают,

как управляется мир.

И. Гёте

Не будем спорить – будем вычислять.

Г. Лейбниц

ОДУ высших порядков

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой значения независимой переменной *x*, неизвестной функции *y=f(x)* и её производных (или дифференциалов):

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Общим решением (общим интегралом) уравнения называется соотношение вида:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

Некоторые типы уравнений, допускающие понижение порядка

Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x)$$

решается последовательным *n*-кратным интегрированием.

Пример:

$$y^{(4)} = \sin x$$

Пример:

$$y^{(4)} = \sin x \Rightarrow y''' = \int \sin x dx = -\cos x + C_1 \Rightarrow$$

$$y'' = -\int (\cos x + C_1) dx = -\sin x + C_1 x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \Rightarrow$$

$$y = \sin x + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Переобозначив постоянные, общее решение можно записать в виде :

$y = \sin x + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$.

Порядок уравнения вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, y^{(k+2)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, не содержащего функции $y(x)$ и $(k-1)$ младшую производную этой функции в явном виде, может быть понижен ровно на k единиц введением новой неизвестной функции
$z(x) = y^{(k)}(x)$. Тогда уравнение примет вид

$$F(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$$

т.е. будет уравнением $(n-k)$-го порядка.
После нахождения $z(x)$ последовательным интегрированием решается уравнение $y^{(k)}(x) = z(x)$.

Пример: Понизить порядок уравнения:

$$x^6 y''' - 2x^5 y'' = \frac{(y'')^3}{2}$$

Младшая производная, входящая в явной форме в уравнение, - вторая, поэтому делаем замену искомой функции:

$$z(x) = y''(x)$$

Тогда

$$y''' = z'$$

и уравнение примет вид $x^6 z' - 2x^5 z = \frac{z^3}{2}$

Определение:

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (A)$$

где a, b и c - постоянные величины.

Формула (А) может быть записана и так:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + в\frac{dy}{dx} + cy = 0, \quad (B)$$

Для нахождения общего решения данного уравнения составляется характеристическое уравнение:

$$ак^2 + вк + с = 0$$

Это уравнение получается из первоначального уравнения (А) путем замены производных искомой функции, соответствующими степенями К и сама функция заменяется единицей.

Общее решение дифференциального уравнения строится в зависимости от характера корней характеристического уравнения $ак^2 + вк + с = 0$:

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Возможны три случая :

I случай :

k_1 и k_2 действительные корни и различные, тогда общее решение примет вид:

$$y = C_1 \cdot e^{k_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{k_2 \cdot x}. \quad (1)$$

II случай:

$k_1 = k_2 = k$ *- действительные и равные, тогда общее решение примет вид:*

$$y = C_1 \cdot e^{k \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{k \cdot x}. \quad (2)$$

III случай:

k_1 и k_2 *- комплексные числа, а именно*

$$k_1 = \alpha + \beta \cdot i, \qquad k_2 = \alpha - \beta \cdot i,$$

тогда общее решение имеет вид:

$$y = e^{\alpha \cdot x}\left(C_1 \cdot \cos\beta \cdot x + C_2 \cdot \sin\beta \cdot x\right). \quad (3)$$

Решение задач

Пример 1. $$y'' - 7y' + 6y = 0$$

Пример 2. $$y'' + 10y' + 25y = 0$$

Пример 3. $$y'' + 6y' + 25y = 0$$

Пример 4 . $$y'' + y = 0$$

Пример 5. *Найти частное решение дифференциального уравнения*

$y'' - 8y' + 16y = 0$ *если y(0)=1 и* $y'(0) = 3$