Понятие функции.

Свойства функции.

Что такое функция

Две переменные величины X и Y связаны функциональной зависимостью, если каждому значению, которое может принимать переменная X, соответствует одно и только одно значение переменной Y.

Переменная X называется независимой переменной или аргументом функции, а переменная Y – зависимой переменной или функцией.

Записывают соотношение между X и Y в общем виде так: y=f(x)

или y=y(x)

История создания названия функции

Г.В.Лейбниц

Термин функция впервые появился в 1692 году у Лейбница и употреблялся в узком смысле (различные отрезки, связанные с кривой – например, абсциссы её точки). Современное понятие функции, как выражения зависимости одних переменных величин от других сформировалось в первой половине 19 века благодаря исследованиям таких крупных математиков, как Лобачевский, Дирихле, Фурье. Одним из важнейших достижений в области математического анализа в 19 веке стало рождение теории аналитических функций (Огюсте Коши) и функции комплексного переменного.

Аналитический способ задания функций

Функция задается формулой, позволяющей получить значение зависимой переменной (Y),подставив конкретное числовое значение аргумента (X).

Если произвольное двузначное число обозначить буквой X, а соответствующий ему квадрат числа – буквой Y, то эту функцию можно задать формулой $Y=X^2$, где X – двузначное число.

Значения переменной Y зависят от значения переменной X, в то время как значения X являются независимыми. Поэтому переменную X называют независимой переменной, а Y – зависимой переменной. Независимую переменную называют также аргументом, а зависимую – функцией.

ПРИМЕР 1: $Y=X^2$

Табличный способ задания функции

При этом способе задания функции заполняется таблица, в верхней строке которой значения независимой переменной (X), в нижней – соответствующие значения зависимой переменной (Y).

Таблицы значений чаще составляют для построения графиков функций, заданных формулами. При этом для нескольких, произвольно выбранных, значений независимой переменной вычисляют соответствующие значения зависимой переменной.

ПРИМЕР 1: $Y=X^2$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	9	4	1	0	1	4	9

Способ задания функции описанием

Функцию можно задать описанием с помощью естественного языка.

Например: «Каждому отрицательному числу соответствует -1,нулю – число 0, а каждому положительному – число 1».

Обычно эту функцию обозначают так: Y=sign X (читают: «Игрек равен сигнум X»). Латинское слово signum переводится как «знак» и указывает знак числа. Эту функцию можно задать так:

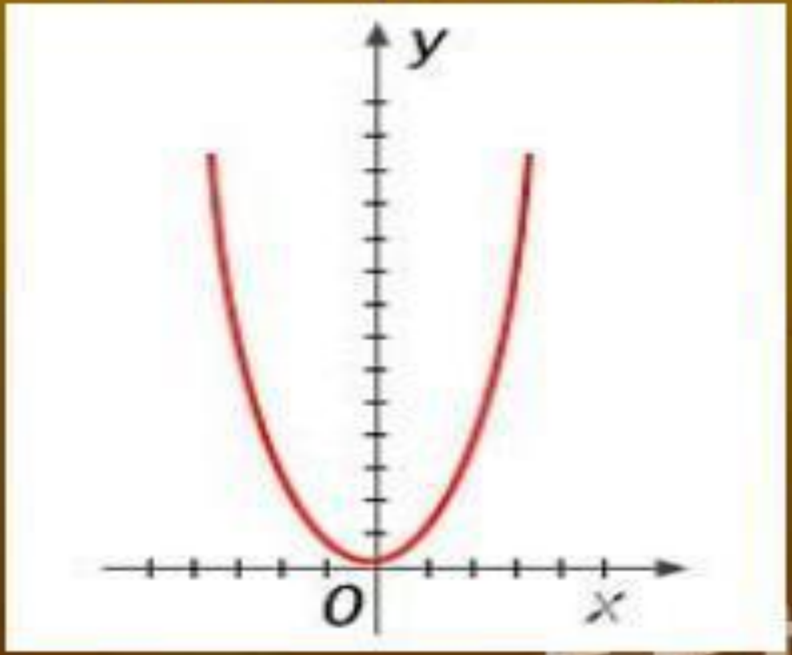
$$Y= \begin{cases} ., \text{ если } X<0 \\ , \text{ если } X=0 \\ \text{если } X>0 \end{cases}$$

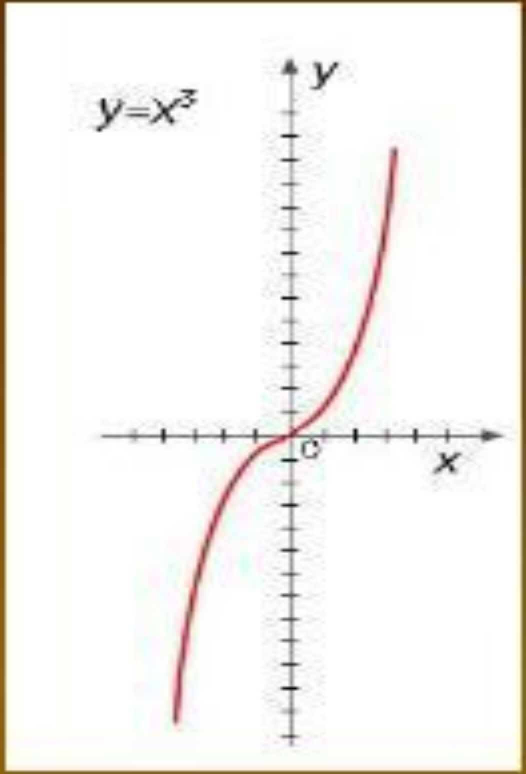
Графический способ задания функции

График функции – это множество тех и только тех точек (X;Y) координаты которых обращают уравнение Y=f(x) в верное равенство.

График функции позволяет не только с его помощью находить значения функции, но и видеть многие её свойства: в каких точках функция обращается в нуль, на каких промежутках она принимает отрицательные или положительные значения, где она возрастает или убывает и др.

ПРИМЕР 1: $Y=X^2$





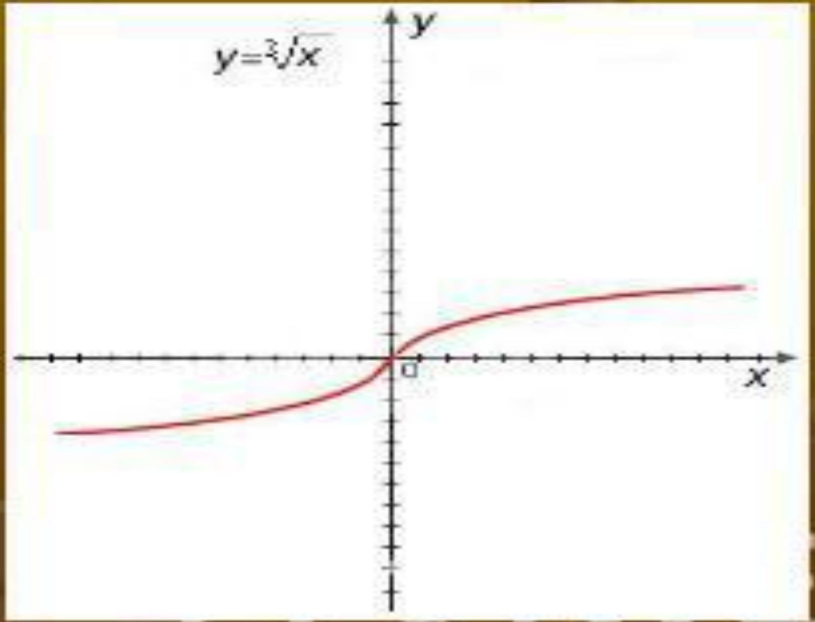
Примеры:

Функция: $Y=X^3$

X	2	1	0	-1	-2
Y	8	1	0	-1	-8

Функция: $Y=\sqrt[3]{x}$

X	8	1	0	-1	-8
Y	2	1	0	-1	-2



Область определения функции

Область определения функции f(x) называется множество всех действительных значений независимой переменной x , при которых функция определена (имеет смысл).

Обозначение: D(f) (англ. Define – определять).

Пример: Найдите область определения функции

$Y=\log_{0,5}(3-2x)$

Решение: По определению логарифма получаем 3-2x>0, следовательно, 3>2x, т.е. x<1,5. Значит (-∞; 1,5)

ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Областью значений функции Y=f(x) называется множество всех действительных значений, которые принимает зависимая переменная Y.

Обозначение E(f) (англ.exist-существовать).

Пример: Найдите область значений функции

$f(x)=-5\cos X$

Решение: Областью значений функции $y=\cos x$ является промежуток [-1;1], т.е. $-1\leq\cos x\leq1$. Умножая все члены неравенства на -5 и меняя знак неравенства на противоположный, получаем: $-5\leq-5\cos x\leq5$

Примеры области определения и значения функции:

Пример 1: Найдите область определения функции Y=2x/x-3.

Решение: На нуль делить нельзя, то $X-3\neq0$, а $X\neq3$ (т.к. при $X=3$ выражение не имеет смысл). Значит $D(y)=(-\infty;3)U(3;\infty)$.

Пример 2: Найдите область значений функции $Y=7\sin X$.

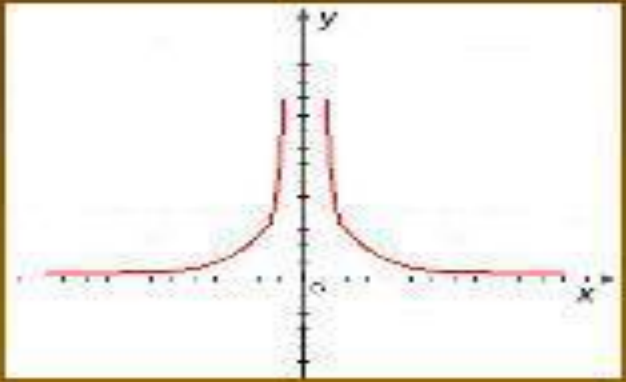
Решение: Областью значений $Y=7\sin X$ является промежуток [-1;1], т.е. $-1\leq\sin X\leq1$. Умножая все члены неравенства на 7 получаем $-7\leq7\sin X\leq7$.

Чётность, нечётность возрастание и убывание функции

Функцию f называют чётной (соответственно нечётной), если её график симметричен относительно оси ординат (соответственно начала координат).

Функцию f называют возрастающей (соответственно убывающей) на множестве X, если на этом множестве при увеличении аргумента увеличиваются (соответственно уменьшаются) значения функции.

Примеры четности, нечетности, возрастания и убывания функции:



Функция возрастает на промежутке $(-\infty;0)$ и убывает на промежутке $(0;+\infty)$.

Пример: Определите какая из функций является четной

$f(x)=3\cos^3 x+5\sin^2 x$ или $f(x)=9x^3-\sin x + x$

Решение: $f(-x)=9(-x)^3-\sin(-x)+(-x)=-9x^3+\sin x-x =$
$=-(9x^3-\sin x + x)$,

т.е. $f(x)=-f(x)$. Значит функция $f(x)=9x^3-\sin x + x$ является нечетной

$f(-x)=3\cos^3(-x)+5\sin^2(-x)=3\cos^3 x+5\sin^2 x$

т.е. $f(x)=f(x)$. Значит функция $f(x)=3\cos^3 x+5\sin^2 x$ является четной

Точки минимума и максимума функции.

Пусть функция $y=f(x)$ определена во всех точках интервала $(a;b)$ и $X_0 \in (a;b)$.

Если для всех точек x (a;b) таких, что x=x, выполняется неравенство $f(X)<f(X_0)$, то X_0 называется точкой максимума функции $Y=f(X)$, значение $Y_0=f(X_0)$ называется максимумом функции $y=f(x)$.

Обозначение: Y_{max}

Если же выполняется неравенство $f(X)>f(X_0)$ то X_0 называется точкой минимума функции $y=f(x)$, значение $Y_0=f(X_0)$ называется минимумом функции $Y=f(X)$

Обозначение: Y_{min}

Д/З: составить краткий конспект

- Придумать свою функцию,
- Построить график,
- Составить таблицу,
- Перечислить свойства.