

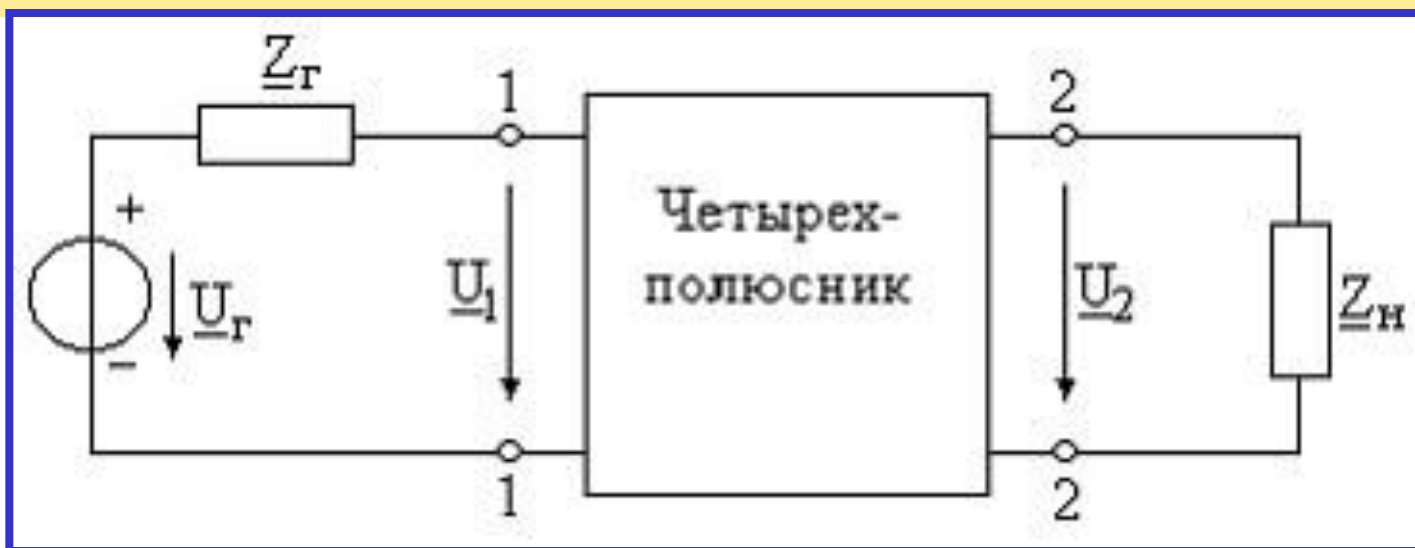
# Дисциплина:

## Дополнительные разделы теории цепей



# Лекция №10

## Тема: Основы теории четырёхполюсников





# Учебные вопросы

---

- 1. Основные определения и классификация четырехполюсников.
- 2. Шесть форм записи уравнений четырехполюсника.
- 3. Уравнения четырехполюсника через  $Y$ -параметры.
- 4. Уравнения четырехполюсника через  $A$ -параметры.
- 5. Характеристические параметры четырехполюсника.
- 6. Каскадное соединение согласованных четырехполюсников.



# *Литература*

---

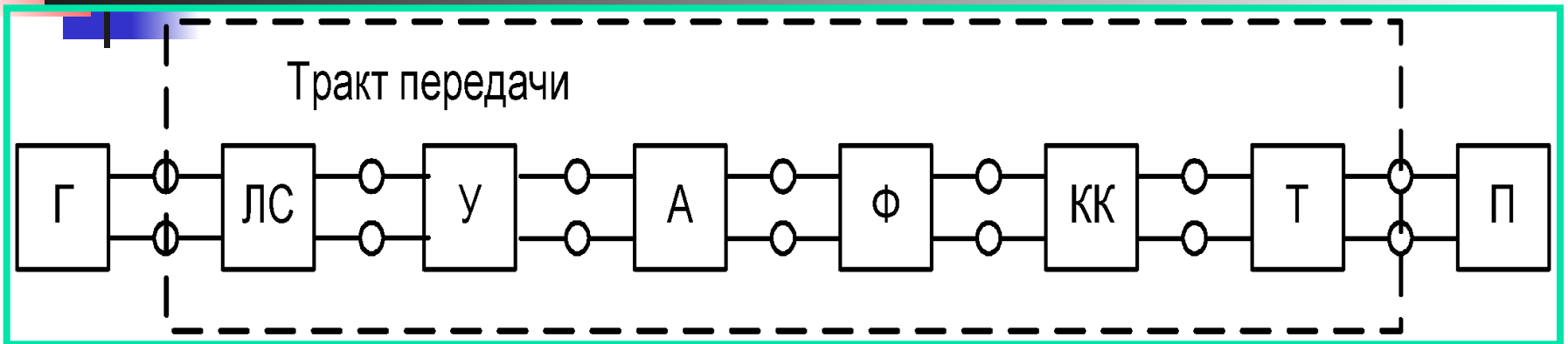
- **1. Попов В.П. Основы теории цепей: Учебник для вузов спец. "Радиотехника".-М.: Высшая школа, 2007. с. 399-414, 419-431**

# 1. Основные определения и классификация четырехполюсников

Во многих случаях для анализа и синтеза электрических цепей важно знать токи **только в некоторых ветвях** и напряжения **только между некоторыми узлами**. В этом случае расчёт цепи упрощается, если цепь разделить на отдельные части, каждая из которых соединена с остальными **двумя, тремя, четырьмя или большим числом выводов – полюсов**.

**Четырехполюсником** называется часть электрической цепи, имеющая две пары зажимов, одна из которых может быть входной, а другая выходной. К входным зажимам четырехполюсников обычно присоединяют источники энергии (сигнала), а к выходным зажимам – приемники энергии (сигнала).

# Канал связи как ряд четырёхполюсников



**В тракт передачи обычно входят:**

- **линии связи (ЛС) генератора и приемника, находящихся на значительных расстояниях один от другого;**
- **усилители (У), в которых увеличивается мощность (уровень сигналов);** **аттенюатор (А)-устройство для плавного, ступенчатого или фиксированного понижения интенсивности электрических сигналов;**
- **фильтры (Ф) для разделения сигналов;**
- **корректирующие контуры (КК), включаемые для устранения искажений сигналов;**
- **трансформаторы (Т), при помощи которых устраняется гальваническая связь между входной и выходной цепями.**

**К четырёхполюсникам можно отнести различные по назначению технические устройства:**

- 1) двухпроводные линии связи;**
- 2) двухобмоточные трансформаторы;**
- 3) электрические фильтры;**
- 4) усилители электрических сигналов;**
- 5) участки линий передачи электрической энергии;**
- 6) транзисторы и многие другие устройства.**

# **Теория четырехполюсников**

## **позволяет:**

- 1) единым методом анализировать различные по структуре и назначению электрические цепи, которые могут быть отнесены к классу четырехполюсников;**
- 2) получить аналитическую зависимость между током и напряжением на входе и током и напряжением на выходе четырехполюсника, не производя расчетов токов и напряжений внутри его схемы.**



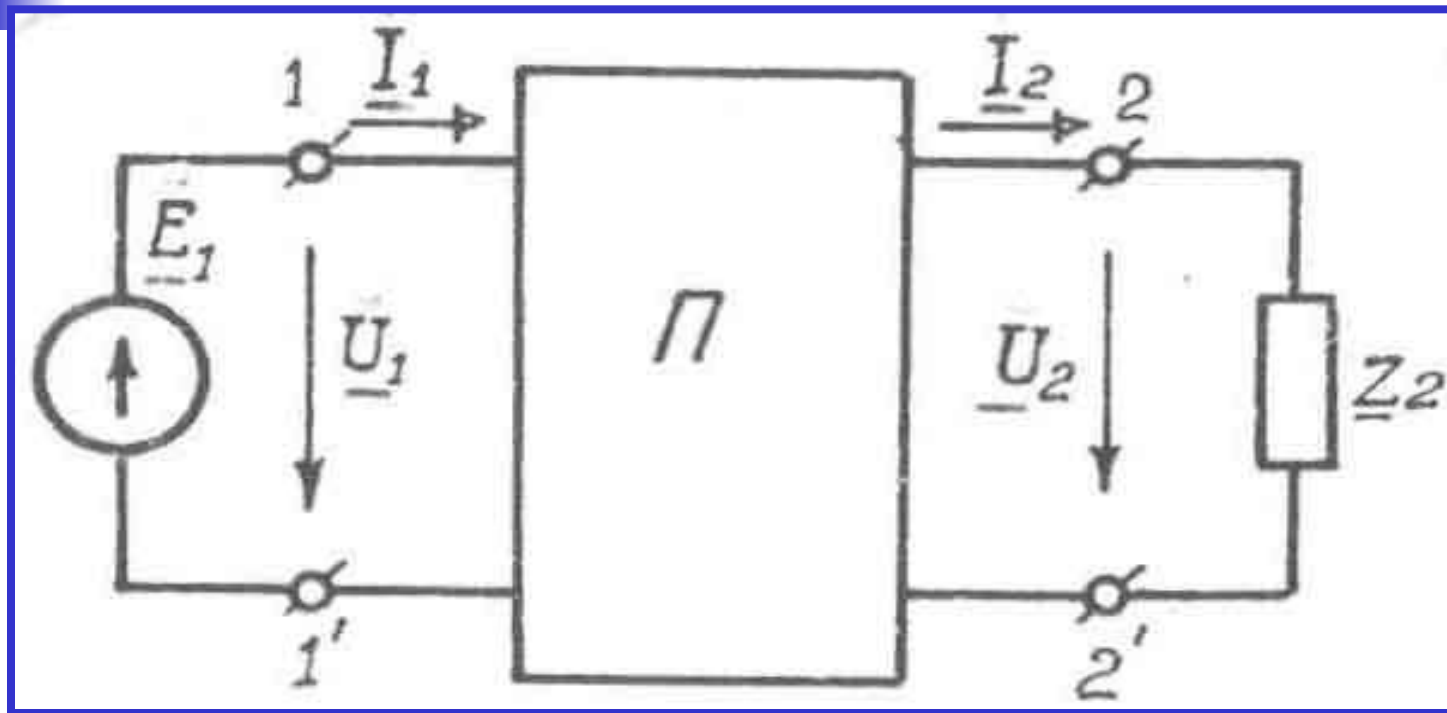
# **Основной смысл теории четырёхполюсников**

*закключаются в том, что с помощью обобщенных параметров, называемых коэффициентами четырехполюсника, и основных уравнений четырехполюсника можно находить токи и напряжения на входе и выходе четырехполюсника.*

***Теория четырехполюсников применяется в тех случаях,***

*когда ставится задача определения напряжений и токов только на входе и на выходе четырехполюсника, а в определении токов и напряжений на различных элементах цепи внутри четырехполюсника нет необходимости.*

# Условное изображение четырёхполюсника



**Задача анализа четырехполюсника** состоит в том, что две из четырех величин, определяющих режим четырехполюсника, известны: они задаются воздействием. Требуется найти две остальные величины, т.е. отклик

# ***Классификация четырёхполюсников***

## **Четырёхполюсники**

```
graph TD; A[Четырёхполюсники] --- B[Линейные]; A --- C[Нелинейные]; B --- D[Пассивные]; B --- E[Активные]; D --- F[Симметричные]; D --- G[Несимметричные]
```

**Линейные**

**Нелинейные**

**Пассивные**

**Активные**

**Симметричные**

**Несимметричные**

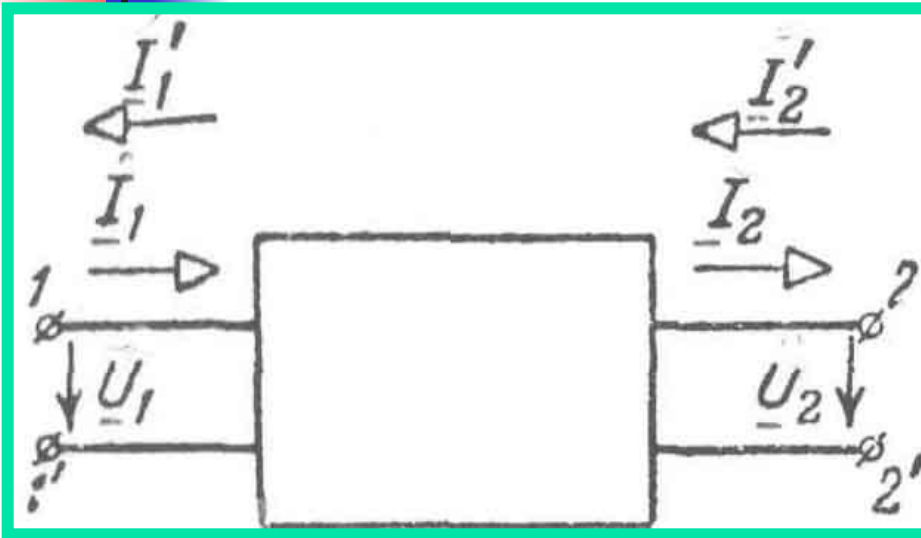
# *Классификация четырёхполюсников*

**Симметричный** четырёхполюсник — это четырёхполюсник, у которого при перемене местами источника и приемника энергии входной и выходной токи не меняются.

**Пассивный** четырёхполюсник — это четырёхполюсник, который не содержит источников энергии, либо содержит скомпенсированные источники энергии.

**Активный** четырёхполюсник — это четырёхполюсник, который содержит нескомпенсированные источники энергии.

## 2. Шесть форм записи уравнений четырёхполюсника



1. Если за положительные направления токов выбрать  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$ , то такой вариант называется **прямой передачей** (см. уравнения **A-формы**).

2. Если за положительные направления токов выбрать  $\underline{I}_1'$  и  $\underline{I}_2'$ , то такой вариант называется **обратной передачей** (см. уравнения **B-формы**)

3. Если за положительные направления токов выбрать  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2'$ , то такой вариант называется **встречным направлением** (см. уравнения **Y-, Z-, H- и G-форм**).

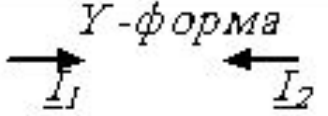
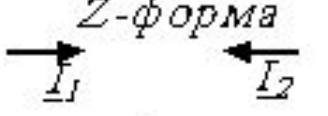
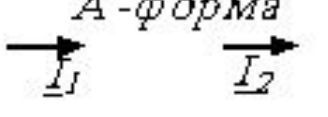
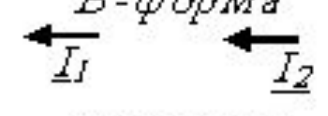
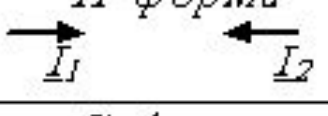
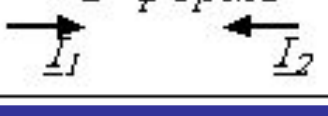
**Линейный четырёхполюсник описывается четырьмя параметрами — два напряжения и два тока. Любые две величины из четырёх можно определить через оставшиеся две. Поскольку число сочетаний 2 из 4 равно 6, используется одна из шести форм записи уравнений четырёхполюсника**

Варианты	1	2	3	4	5	6
Заданные воздействия	$\underline{U}_1, \underline{U}_2$	$\underline{I}_1, \underline{I}_2$	$\underline{U}_2, \underline{I}_2$	$\underline{U}_1, \underline{I}_1$	$\underline{I}_1, \underline{U}_2$	$\underline{U}_1, \underline{I}_2$
Определяемые отклики	$\underline{I}_1, \underline{I}_2$	$\underline{U}_1, \underline{U}_2$	$\underline{U}_1, \underline{I}_1$	$\underline{I}_2, \underline{U}_2$	$\underline{U}_1, \underline{I}_2$	$\underline{I}_1, \underline{U}_2$
Комплексные параметры	$\underline{Y}$	$\underline{Z}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{H}$	$\underline{G}$

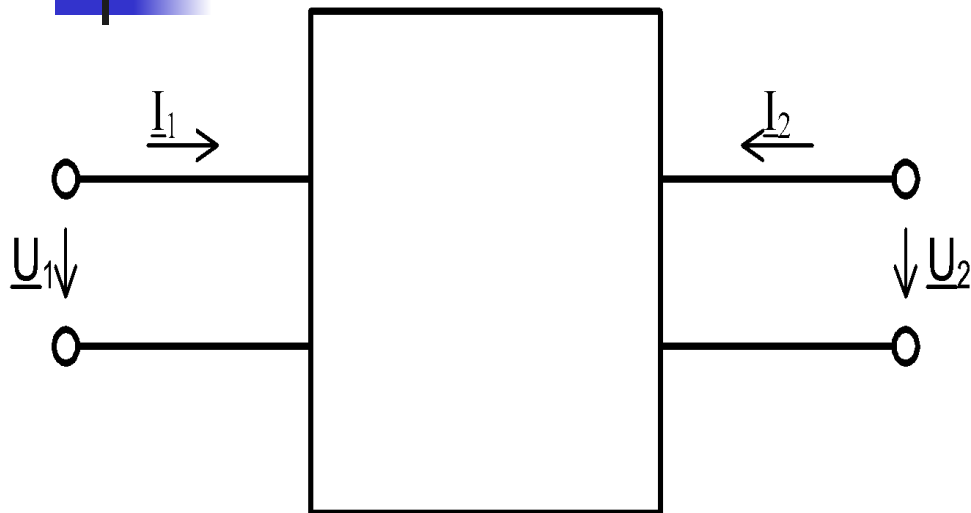
## Шесть форм записи уравнений четырёхполюсника.

Конкретная система выбирается из соображений удобства.

Выбор зависит от того, какой параметр (напряжение или ток) является входным и какой — выходным сигналом для данного четырёхполюсника

Форма уравнений, направление токов	Уравнения	Матрица комплексных параметров
<p><i>Y-форма</i></p> 	$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2$ $\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2$	$[\underline{Y}] = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix}$
<p><i>Z-форма</i></p> 	$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2$ $\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2$	$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$
<p><i>A-форма</i></p> 	$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2$ $\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2$	$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$
<p><i>B-форма</i></p> 	$\underline{U}_2 = \underline{B}_{11}\underline{U}_1 + \underline{B}_{12}\underline{I}_1$ $\underline{I}_2 = \underline{B}_{21}\underline{U}_1 + \underline{B}_{22}\underline{I}_1$	$[\underline{B}] = \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{bmatrix}$
<p><i>H-форма</i></p> 	$\underline{U}_1 = \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\underline{U}_2$ $\underline{I}_2 = \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_2$	$[\underline{H}] = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix}$
<p><i>G-форма</i></p> 	$\underline{I}_1 = \underline{G}_{11}\underline{U}_1 + \underline{G}_{12}\underline{I}_2$ $\underline{U}_2 = \underline{G}_{21}\underline{U}_1 + \underline{G}_{22}\underline{I}_2$	$[\underline{G}] = \begin{bmatrix} \underline{G}_{11} & \underline{G}_{12} \\ \underline{G}_{21} & \underline{G}_{22} \end{bmatrix}$

### 3. Уравнения четырехполюсника через Y-параметры



Для записи уравнения четырёхполюсника используем принцип наложения

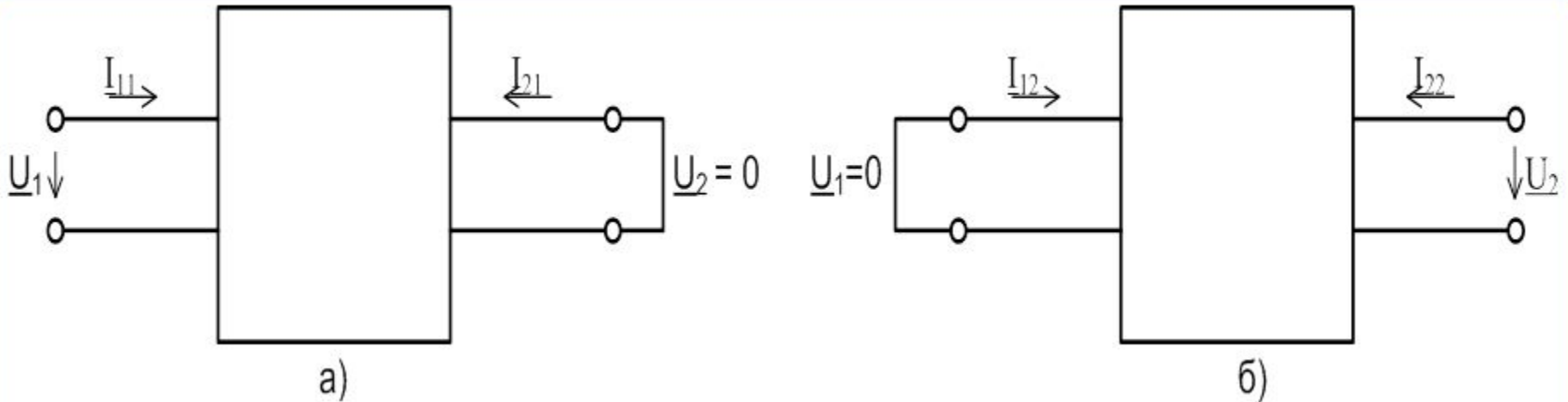
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} + \underline{I}_{12}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{21} + \underline{I}_{22}$$

**Принцип наложения:** токи всех ветвей линейной цепи при воздействии нескольких ЭДС определяются как сумма частичных токов, получаемых последовательным подключением каждой из этих ЭДС при условии, что все остальные ЭДС равны нулю.



# Определение частичных токов на основе принципа наложения



При  $U_2=0$

$$\underline{I}_{11} = \underline{Y}_{11} \underline{U}_1$$

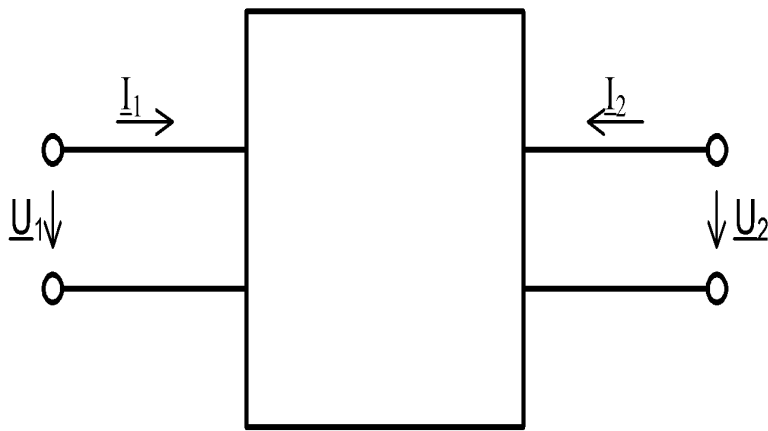
$$\underline{I}_{21} = \underline{Y}_{21} \underline{U}_1$$

При  $U_1=0$

$$\underline{I}_{12} = \underline{Y}_{12} \underline{U}_2$$

$$\underline{I}_{22} = \underline{Y}_{22} \underline{U}_2$$

# УРАВНЕНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА ЧЕРЕЗ Y-ПАРАМЕТРЫ



$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2; \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2; \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Y}] \times \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$$



# Физический смысл $Y$ - параметров

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \Big|_{\underline{U}_2=0}$$

– комплексная входная  
проводимость со стороны зажимов  
1-1' в режиме короткого замыкания  
на зажимах 2-2';



# Физический смысл $Y$ - параметров

$$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \Big|_{\underline{U}_1=0}$$

– комплексная передаточная проводимость обратной передачи от зажимов 2-2' к зажимам 1-1' в режиме короткого замыкания на зажимах 1-1';



# Физический смысл $Y$ - параметров

$$\underline{Y}_{21} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \Big|_{\underline{U}_2=0}$$

– комплексная передаточная проводимость прямой передачи от зажимов 1-1' к зажимам 2-2' в режиме короткого замыкания на зажимах 2-2';



# Физический смысл $Y$ - параметров

$$\underline{Y}_{22} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \Big|_{\underline{U}_1=0}$$

– комплексная входная  
проводимость со стороны  
зажимов 2-2' в режиме короткого  
замыкания на зажимах 1-1'.

# Свойства $Y$ - параметров:

1) у обратимых четырехполюсников

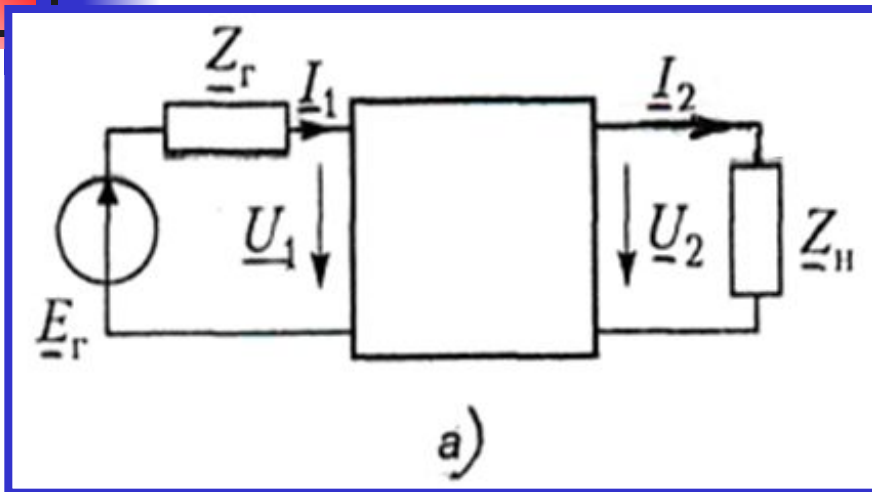
$Y_{12}$  =  $Y_{21}$ , т.е. только три коэффициента в основных уравнениях линейных пассивных четырехполюсников являются независимыми. Обратимый четырёхполюсник — это четырёхполюсник, у которого передаточное сопротивление входных и выходных контуров не зависят от того, какая пара зажимов входная, а какая выходная: т.е.  $U_1/I_2 = U_2/I_1$

2) у симметричных четырехполюсников

$Y_{12}$  =  $Y_{21}$  и  $Y_{11}$  =  $Y_{22}$ ; в этом случае число независимых коэффициентов равно двум.

## 5. Характеристические параметры четырехполюсника

### 5.1 Входное сопротивление четырехполюсника



*При прямой передаче:*

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2$$

$$\underline{Z}_{BX} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2}{\underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_H + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_H + \underline{A}_{22}}$$

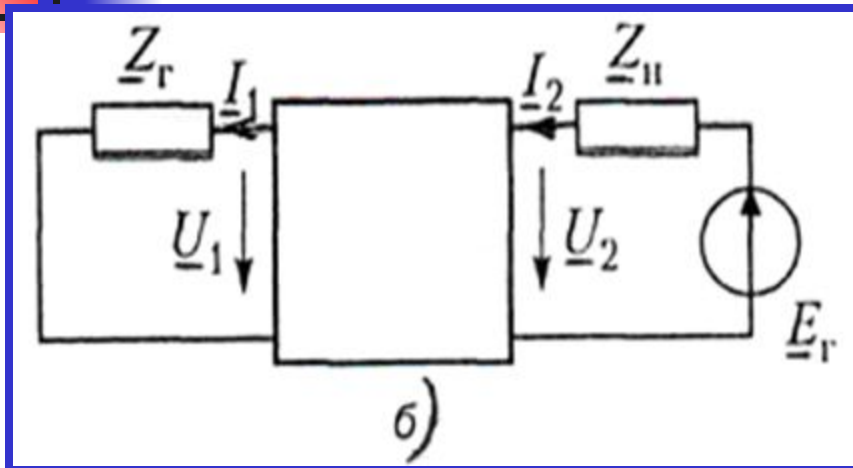
**В частных случаях, когда  $Z_H = 0$  (режим короткого замыкания) и  $Z_H = \infty$  (режим холостого хода), входные сопротивления четырехполюсника определяются соответственно соотношениями:**

$$\underline{Z}_{BX \text{ .к.з.}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}$$

$$\underline{Z}_{BX \text{ .х.х.}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}$$



## 5.2 Выходное сопротивление четырёхполюсника



*При обратной передаче:*

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11} \underline{U}_2 - \underline{A}_{12} \underline{I}_2 \\ -\underline{I}_1 &= \underline{A}_{21} \underline{U}_2 - \underline{A}_{22} \underline{I}_2 \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_{\text{ВЫХ}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{A}_{22} \underline{Z}_r + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \underline{Z}_r + \underline{A}_{11}}$$

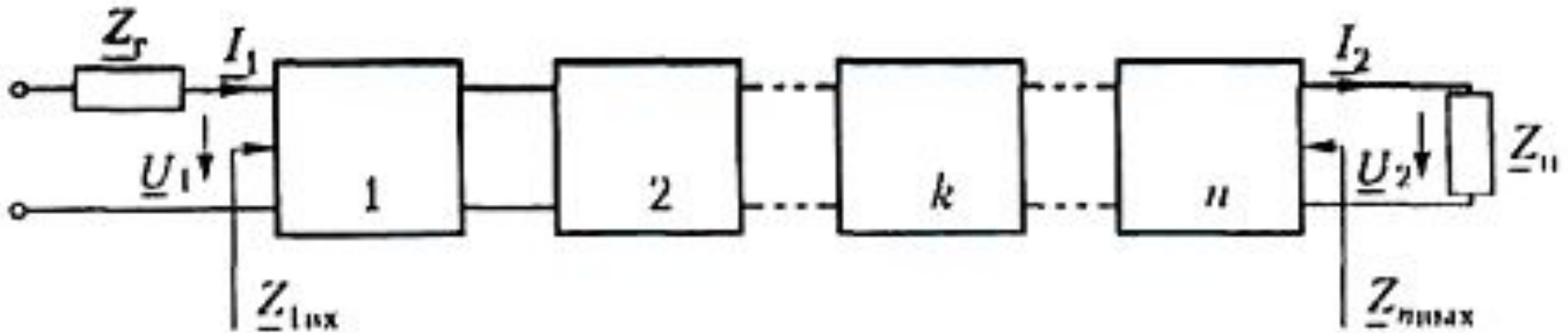
**В частных случаях, когда  $Z_r = 0$  (режим короткого замыкания) и  $Z_r = \infty$  (режим холостого хода), выходные сопротивления четырёхполюсника определяются соответственно соотношениями:**

$$\underline{Z}_{\text{ВЫХ.к.з.}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}$$

$$\underline{Z}_{\text{ВЫХ.х.х.}} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}$$

## 5.3 Режим согласованного включения

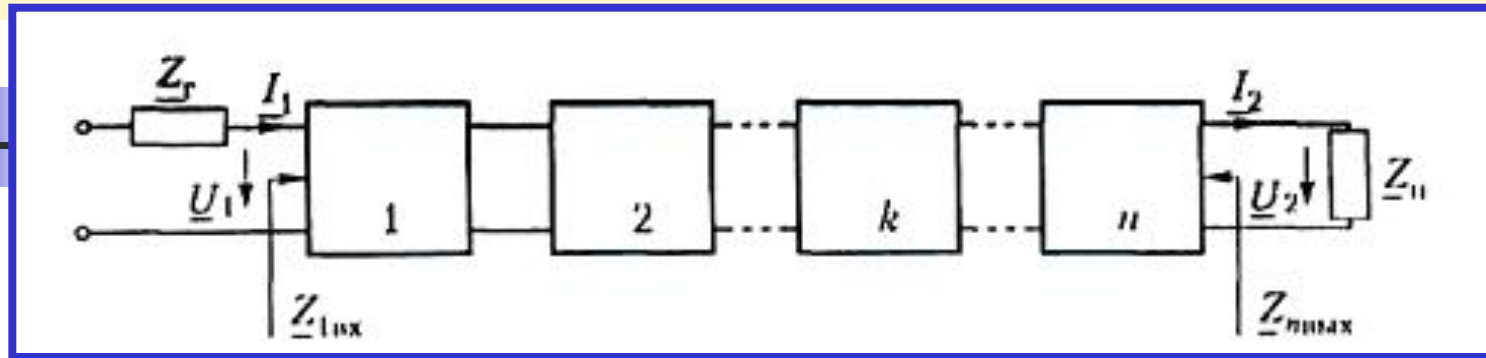
*Каскадное соединение четырёхполюсников – соединение, при котором входные выводы одного четырёхполюсника соединяются с выходными выводами другого*



Часто каскадно-соединенные элементы находятся в режиме согласованного включения, при котором выходное сопротивление каждого звена равно входному сопротивлению последующего.

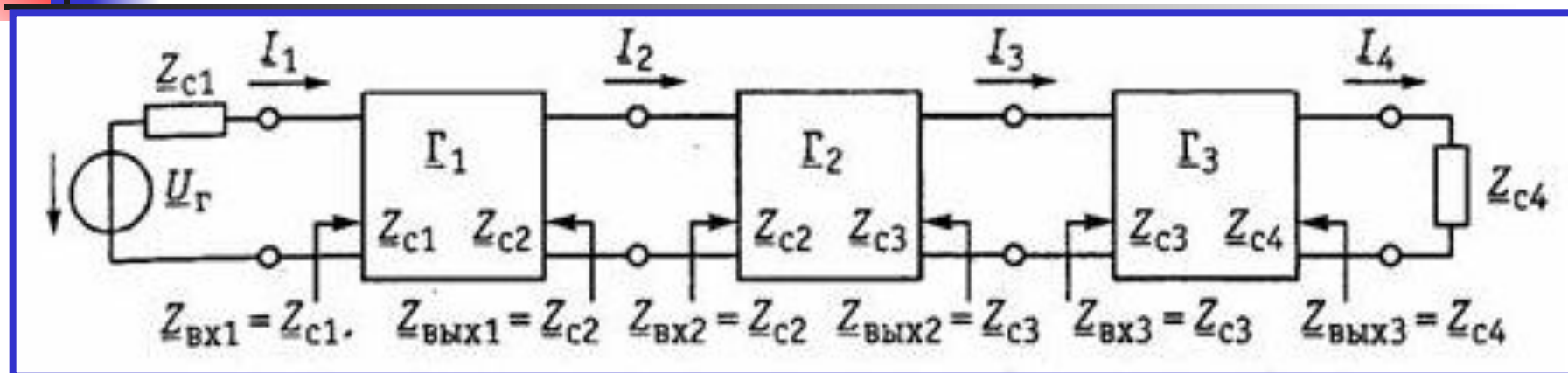
**Согласованное включение обеспечивает передачу максимальной мощности в нагрузку.**

# Условия согласованного включения:



1. Входное сопротивление  $Z_{1вх}$  на зажимах первого звена равно сопротивлению генератора  $Z_G$ , т.е.  $Z_{1вх} = Z_G$ ;
2. Для любых соседних звеньев входное сопротивление  $Z_{k вх}$  последующего,  $k$ -го, звена равно выходному сопротивлению  $Z_{(k-1)вых}$  предыдущего,  $(k-1)$ -го, звена, т.е.  $Z_{(k-1)вых} = Z_{k вх}$ ;
3. Выходное сопротивление  $Z_{n вых}$  последнего,  $n$ -го, звена равно сопротивлению  $Z_H$  нагрузки, т.е.  $Z_{n вых} = Z_H$ .

# 5.4 Характеристические сопротивления четырёхполюсника



Сопротивление, включенное во входной цепи четырехполюсника  $Z_{\text{с1}} = Z_{\text{Г}} = Z_{\text{вх}}$ , и сопротивление, включенное в его выходной цепи  $Z_{\text{с2}} = Z_{\text{н}} = Z_{\text{вых}}$ , обеспечивающие режим согласованного включения на обеих парах его зажимов, называются соответственно входным и выходным характеристическими сопротивлениями четырехполюсника

# Характеристические сопротивления четырёхполюсника: расчётные соотношения

Ранее было  
получено:

$$\underline{Z}_{ВХ} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_H + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_H + \underline{A}_{22}}$$

$$\underline{Z}_{ВЫХ} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_Г + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_Г + \underline{A}_{11}}$$

В режиме согласованного включения:

$$\underline{Z}_{с1} = \underline{Z}_Г = \underline{Z}_{ВХ}, \quad \underline{Z}_{с2} = \underline{Z}_H = \underline{Z}_{ВЫХ}$$

$$\underline{Z}_{с1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{с2} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{с2} + \underline{A}_{22}}$$

$$\underline{Z}_{с2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_{с1} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{с1} + \underline{A}_{11}}$$

$$\underline{Z}_{с1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}}}$$

$$\underline{Z}_{с2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}}$$

$$\underline{Z}_{с1} = \sqrt{\underline{Z}_{вх.к.з} \underline{Z}_{вх.х.х}}$$

$$\underline{Z}_{с2} = \sqrt{\underline{Z}_{вых.к.з} \underline{Z}_{вых.х.х}}$$

# Выводы

1. Входное характеристическое сопротивление равно среднему геометрическому из входных сопротивлений при коротком замыкании и холостом ходе.

$$\underline{Z}_{c1} = \sqrt{\underline{Z}_{вх.кз} \underline{Z}_{вх.хх}}$$

2. Выходное характеристическое сопротивление равно среднему геометрическому из выходных сопротивлений при коротком замыкании и холостом ходе.

$$\underline{Z}_{c2} = \sqrt{\underline{Z}_{вых.кз} \underline{Z}_{вых.хх}}$$

3. Эти выражения позволяют определить характеристические сопротивления из опытов холостого хода и короткого замыкания

## 5.5 Мера передачи четырёхполюсника

$$\underline{\Gamma} = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\underline{K}_U} \frac{1}{\underline{K}_I}$$

$$\underline{\Gamma} = \frac{1}{2} \ln( \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} )^2 = \ln( \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} )$$

**Мера передачи четырёхполюсника характеризует отношение мощности на входе четырёхполюсника к мощности на его выходе в логарифмическом масштабе**

# Коэффициент ослабления четырёхполюсника

$$\underline{\Gamma} = \ln(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}) = \ln \frac{I_1}{I_2} = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{U_1}{U_2} e^{j(\psi_{u1} - \psi_{u2})} = \ln \frac{U_1}{U_2} + j(\psi_{u1} - \psi_{u2}) = \alpha + j\beta,$$

$$\alpha = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2}$$

**[Нп] или [Непер]** –  
основная  
единица  
измерения  
коэффициента  
ослабления

**Вещественная часть меры передачи – коэффициент ослабления (затухание) –**  
показывает в логарифмическом масштабе во сколько раз уменьшается действующее значение напряжения и тока при переходе от входных к выходным зажимам четырёхполюсника при согласованной нагрузке



# Коэффициент ослабления четырёхполюсника

$$\alpha = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2}$$

Затухание в 1Нп соответствует уменьшению модуля величины в  $e = 2,72$  раза. На практике для измерения затухания сигналов применяется другая, более удобная для практики единица, а именно: 1 децибелл [дБ], которая определяется согласно уравнению:

$$\alpha = 20 \lg \frac{|U_1|}{|U_2|} \text{ [дБ]} ; \quad 1 \text{ дБ} = 10^{\frac{1}{20}} \approx 1,122 \text{ раза.}$$

Соотношение между единицами затухания: 1Нп = 8,086 дБ ;  
1дБ = 0,115Нп.

# Коэффициент фазы четырёхполюсника

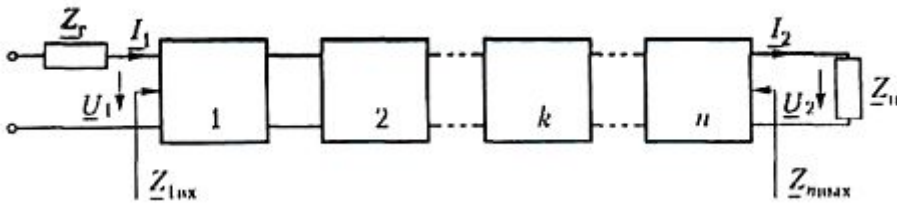
$$\underline{\Gamma} = \ln(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}) = \ln \frac{I_1}{I_2} = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{U_1}{U_2} e^{j(\psi_{u1} - \psi_{u2})} = \ln \frac{U_1}{U_2} + j(\psi_{u1} - \psi_{u2}) = \alpha + j\beta,$$

$$\beta = \psi_{U1} - \psi_{U2} = \psi_{I1} - \psi_{I2}$$

**Мнимая часть меры передачи  
– коэффициент фазы - показывает  
насколько изменяется фаза напряжения и  
тока при переходе сигнала через  
согласованно нагруженный  
четырёхполюсник**

**$\beta$  измеряется в радианах (рад)**

# 6. Каскадное соединение согласованных четырёхполюсников



$$Z_{c2(k)} = Z_{c1(k+1)} \quad Z_{\Gamma} = Z_{c11}$$

$$Z_{c2H} = Z_H$$

$$\Gamma_{\Sigma} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{\kappa}$$

$$K_U = \frac{U_H}{U_1} = \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{U_3}{U_2} \dots \frac{U_n}{U_{n-1}} = \prod_{k=1}^n K_{U_k} = \sqrt{\frac{Z_H}{Z_{\Gamma}}} e^{-\sum_{k=1}^n \Gamma_{\kappa}} = \sqrt{\frac{Z_{c2H}}{Z_{c11}}} e^{-\Gamma}$$

$$K_I = \prod_{k=1}^n K_{I_k} = \sqrt{\frac{Z_{\Gamma}}{Z_H}} e^{-\Gamma}$$

При каскадном соединении меры передачи отдельных четырёхполюсников суммируется

Для каскада из n одинаковых симметричных звеньев с мерой передачи каждого  $\Gamma_{\kappa} = \Gamma$  имеем:

$$K_U = K_I = e^{-\sum_{k=1}^n \Gamma_{\kappa}}$$

$$K_U = K_I = e^{-n\Gamma}$$