Линейная алгебра

Матрицей А размерности ***m* х *n***
называется прямоугольная таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

где *m*-число строк матрицы, а
n-число столбцов матрицы

Матрицы можно записывать в виде:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} \text{ или } A = \left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}$$

где a_{ij} - элементы матрицы;

Первый индекс $\boldsymbol{i}$ указывает номер строки, $(i = \overline{1,m})$;

Второй индекс $\boldsymbol{j}$ – номер столбца, $(j = \overline{1,n})$.

Например:

A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **-матрица-строка**

B= $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ - **матрица размерности 2 х 3**

C= $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ - **матрица-столбец**

- Матрица называется **квадратной**, если $n = m$, число $\boldsymbol{n}$ называют ее порядком.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

квадратная матрица третьего порядка.

Элементы $\boldsymbol{a_{ii}}$ $(i = 1, m)$ составляют главную диагональ матрицы, а элементы a_{1n}, a_{2n-1}, ... , a_{n1} - вспомогательную, побочную диагональ матрицы.

Если все $a_{ij} = 0$, $(i \neq j)$ за исключением элементов, стоящих на главной диагонали a_{ii},то матрицу называют **диагональной.**

- *Диагональная матрица называется* ***единичной****, если все* $\boldsymbol{a_{ii} = 1}$,

обозначают: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Если **все** $\boldsymbol{a_{ij} = 0}$, то матрица называется **нулевой,** обозначают **0**.

Две матрицы **А и В** называются **равными,** если они одной и той же размерности и их соответствующие элементы равны между собой. А=В, если $a_{ij}= b_{ij}$

Операции над матрицами

1) ***Суммой матриц* A+B** *называют такую матрицу* ***C****, для которой* $\boldsymbol{c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}}$.

Складывать можно матрицы одинаковой размерности.

Операции сложения матриц обладают такими же свойствам, что и операции сложения действительных чисел:

$$\mathbf{A+B=B+A}$$

$$\mathbf{(A+B)+C=A+(B+C)}$$

$$\mathbf{A+0=A}$$

2) ***Произведением матрицы А на действительное число*** λ *называют такую матрицу* $C = \lambda A$, *для которой* $c_{ij} = \lambda a_{ij}$. Из данного определения вытекают следующие свойства:

$$\lambda \beta A = \lambda(\beta A)$$

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta A$$

где λ, β - действительные числа;

А, В - матрицы.

Разность матриц А - В можно ввести как сумму А +(-1)В.

- **3) Произведением** матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ на **матрицу** $\mathbf{B} = \left(\mathbf{b}_{jk}\right)_{n\times p}$ называется **матрица** $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ik})_{m\times p}$ элементы,которой $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{in} b_{jk};\ \left(i = \overline{1, m}; \overline{k = 1, p}\right)$,то есть

элемент ***матрицы C***, стоящий на пересечении

i-ой строки и ***j***-го столбца равен сумме произведений

элементов ***i***-ой строки *матрицы A* на соответствующие

элементы ***j***-го столбца *матрицы B*.

В общем случае:

*Матрицы называются **коммутативными**, если* **AB≠BA**

Свойства произведения матриц

$$(AB)C=A(BC)$$

$$(A+B)C=AC+BC$$

$$\alpha AB = (\alpha A)B = A(\alpha B),$$

AE = EA = A, где E - единичная матрица

A 0 = 0, где 0 - нулевая матрица.

Если у матрицы А строки заменить соответствующими столбцами, то получим так называемую ***транспонированную матрицу,*** которую обозначают $\boldsymbol{A^T}$.

Свойства:

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}}= \mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$$

$$(\alpha\, \mathbf{A})^{\mathrm{T}}= \alpha\, \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

- Пример 1. Найти: C = 2A - 3(B - A),

где $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Решение.

C= 2A - 3(B – A)= 2A – 3B + 3A= 5A - 3B.

$$C = 5\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 20 & 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -18 & -3 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 & -3 \\ 26 & 50 \end{pmatrix}$$

- **Пример 2.** Найти AB,

Где $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{3 \times 2 + 6 \times 8} & \mathbf{3 \times 4 + 6 \times 9} \\ \mathbf{7 \times 2 + 1 \times 8} & \mathbf{7 \times 4 + 1 \times 9} \\ \mathbf{5 \times 2 + 2 \times 8} & \mathbf{5 \times 4 + 2 \times 9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{54} & \mathbf{66} \\ \mathbf{22} & \mathbf{37} \\ \mathbf{26} & \mathbf{38} \end{pmatrix}.$$

- **Пример 3.** Найти А (В + 2А), если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ -2 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$