Линейная алгебра

Матрицей А размерности ***m*** **x** ***n*** называется прямоугольная таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

где m-число строк матрицы, а n-число столбцов матрицы

Матрицы можно записывать в виде:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \text{ или } A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$$

где a_{ij} - элементы матрицы;

Первый индекс ***i*** указывает номер строки, $(i = \overline{1,m})$;

Второй индекс ***j*** – номер столбца, $(j = \overline{1,n})$.

Например:

A= $(1 \quad 0 \quad 4)$ **-матрица-строка**

B= $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ **- матрица размерности 2 х 3**

C= $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ **- матрица-столбец**

- Матрица называется **квадратной**, если $n = m$, число ***n*** называют ее порядком.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

квадратная матрица третьего порядка.

Элементы $\boldsymbol{a_{ii}}$ $(i = 1, m)$ составляют главную диагональ матрицы, а элементы a_{1n} , $a_{2n-1,}$ … , a_{n1} - вспомогательную, побочную диагональ матрицы.

Если все $a_{ij} = 0$, $(i \neq j)$ за исключением элементов, стоящих на главной диагонали a_{ii},то матрицу называют **диагональной.**

- *Диагональная матрица называется* ***единичной****, если все* $a_{ii} = 1$,

обозначают: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Если **все** $a_{ij} = 0$, то матрица называется **нулевой,** обозначают **0**.

Две матрицы **A и B** называются **равными,** если они одной и той же размерности и их соответствующие элементы равны между собой. A=B, если $a_{ij} = b_{ij}$

Операции над матрицами

1) ***Суммой матриц*** **A+B** *называют такую матрицу* ***C****, для которой* $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Складывать можно матрицы одинаковой размерности.

Операции сложения матриц обладают такими же свойствам, что и операции сложения действительных чисел:

$$A+B=B+A$$

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

$$A+0=A$$

2) ***Произведением матрицы*** **A** ***на действительное число*** λ *называют такую матрицу* $C = \lambda A$, *для которой* $c_{ij} = \lambda a_{ij}$. Из данного определения вытекают следующие свойства:

$$\lambda\,\beta A = \lambda(\beta A)$$

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda+\beta)A = \lambda A + \beta A$$

где λ, β - действительные числа;

A, B - матрицы.

Разность матриц A - B можно ввести как сумму A +(-1)B.

- **3) Произведением** матрицы $A = (a_{ij})_{m\times n}$ на **матрицу** $B = (b_{jk})_{n\times p}$ называется **матрица** $C = (c_{ik})_{m\times p}$ элементы,которой $C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{in} b_{jk};\ (i = \overline{1, m}; \overline{k = 1, p})$,то есть элемент ***матрицы*** ***C***, стоящий на пересечении ***i***-ой строки и ***j***-го столбца равен сумме произведений элементов ***i***-ой строки *матрицы A* на соответствующие элементы ***j***-го столбца *матрицы B*.

В общем случае:

Матрицы называются ***коммутативными****, если* **AB≠BA**

Свойства произведения матриц

$$(AB)C=A(BC)$$

$$(A+B)C=AC+BC$$

$$\alpha AB = (\alpha A)B = A(\alpha B),$$

$AE = EA = A$, где E - единичная матрица

$A\,0 = 0$, где 0 - нулевая матрица.

Если у матрицы А строки заменить соответствующими столбцами, то получим так называемую ***транспонированную матрицу,*** которую обозначают A^T.

Свойства:

$$(A^T)^T=A$$

$$(A+B)^T= A^T+B^T$$

$$(\alpha A)^T= \alpha A^T$$

$$(AB)^T=B^T A^T$$

- Пример 1. Найти: C = 2A - 3(B - A),

где $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Решение.

C= 2A - 3(B – A)= 2A – 3B + 3A= 5A - 3B.

$$C = 5\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 20 & 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -18 & -3 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 & -3 \\ 26 & 50 \end{pmatrix}$$

- **Пример 2.** Найти AB,

Где $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{3 \times 2 + 6 \times 8} & \mathbf{3 \times 4 + 6 \times 9} \\ \mathbf{7 \times 2 + 1 \times 8} & \mathbf{7 \times 4 + 1 \times 9} \\ \mathbf{5 \times 2 + 2 \times 8} & \mathbf{5 \times 4 + 2 \times 9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{54} & \mathbf{66} \\ \mathbf{22} & \mathbf{37} \\ \mathbf{26} & \mathbf{38} \end{pmatrix}.$$

- **Пример 3.** Найти A (B + 2A), если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ -2 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$