Циклический код Хэмминга

Примитивный полином

- Пусть $p(x)$ - примитивный полином над GF(2) степени m.
- Наименьшее значение n такое, что
  - $p(x) \mid (x^n - 1)$
- равно $n = 2^m - 1$.
- Циклический код, формируемый $p(x)$ имеет длину кодового слова равной
  - $n = 2^m - 1$.

Проверочная матрица

- Проверочная матрица ***H*** с элементами вида
- $$x^i \; mod \; p(x)$$
- Имеет различные ненулевые столбцы, следовательно код может исправлять все одиночные ошибки.
- Столбцы ***H*** определяются через элементы поля, как степени порождающего элемента поля $\alpha = x$ в $GF(2^m)$:
- $$H = [1 \; \alpha \; \alpha^2 \; \cdots \; \alpha^{n-2} \; \alpha^{n-1}]$$

Синдром

- Предположим, что одиночная ошибка расположена на позиции *i*, т. е., $e(x) = x^i$. Синдром вычисляется как :
- $S_1 = y(\alpha) = y_0 + y_1\alpha + \cdots + y_{n-1}\alpha^{n-1}$
- $= c(\alpha) + e(\alpha) = e(\alpha) = \alpha^i$.
- Декодер определяет местоположение ошибки *i* по синдрому $S_1 = \alpha^i$ после вычисления дискретного логарифма по основанию α .

Циклический небинарный код Хэмминга

- Циклический небинарный код Хэмминга определяется через элемент $GF(q^m)$ порядка

- $$n = (q^m - 1)/(q - 1).$$

Проверочная матрица и порождающий полином

- Проверочная матрица
- $$H = [1 \ \beta \ \beta^2 \ \cdots \ \beta^{n-1}],$$
- Порождающий полином $g(x)$ является минимальным полиномом над $GF(q)$
- $$\deg g(x) = m$$

Условие существование

- Столбцы ***H*** являются ЛН над $GF(q)$ если и только если $\beta^j/\beta^i = \beta^l$ не принадлежит
- $GF(q)$.
- Циклический код Хэмминга длины n существует только в том случае, если n и
- $q - 1$ взаимно простые, что справедливо, если m и $q - 1$ взаимно простые.

Пример

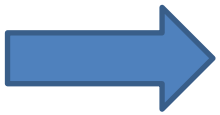
- Если $q = 3$ тогда $q - 1 = 2$, следовательно m должно быть нечетным.
- Пусть $GF(3^3)$ определяется через примитивный полином
- $x^3 + 2x + 1$, и $\beta = \alpha^2$.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \dots & \alpha^{22} & \alpha^{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- $g(x) = x^3 + x^2 + x + 2$

$$GF(3^3)/\ x^3 + 2x + 1$$

```
clear
clc
GF_reg3=[1 0 0]
g3=[0 0 0];
%x^3  + 2x + 1,
n=25;
for i=1:n
%g2(i)=GF_reg(4); %последовательность G2
% сложение  по модулю 3 первого*2 %и 3
разрядов регистра
moduloG3=mod(GF_reg3(1)+GF_reg3(3),3);
moduloG30=GF_reg3(3);
% сдвиг разрядов 1:3
GF_reg3(2:3)=mod(2*GF_reg3(1:2),3);
% присвоение modulo первому и второму
разрядам регистра
GF_reg3(2)=mod(moduloG3,3);
GF_reg3(1)=moduloG30;
GF_reg3
end
```



```
GF_reg3 =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
     2     1     0
     0     2     1
     2     1     2
     1     1     1
     2     2     1
     2     0     2
     1     1     0
     0     1     1
     2     1     1
     2     0     1
     2     0     0
     0     2     0
     0     0     2
     1     2     0
     0     1     2
     1     2     1
     2     2     2
     1     1     2
     1     0     1
     2     2     0
     0     2     2
     1     2     2
     1     0     2
     1     0     0
```