Комбинаторика и вероятность

Вспоминаем понятия комбинаторики и вероятности. Эти понятия знакомы вам из школьного курса математики. Вспомним методы и приемы решения задач по данным темам.

Старайтесь решать задачи самостоятельно, только потом проверяйте. Все решения записывайте в тетрадь.

КОМБИНАТОРИКА – область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

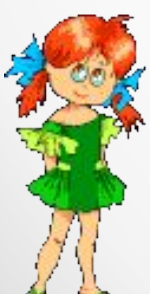
[Понятия](#)

КОМБИНАТОРНАЯ ЗАДАЧА – задача, требующая осуществления перебора всех возможных вариантов или подсчета их числа.

Задача 1

У кассы кинотеатра стоят четверо ребят. У двух из них сторублевые купюры, у других двух – пятидесятирублевые. Билет в кино стоит 50 рублей. В начале продажи касса пуста.

Вопрос: как должны расположиться ребята, чтобы никому не пришлось ждать сдачи?



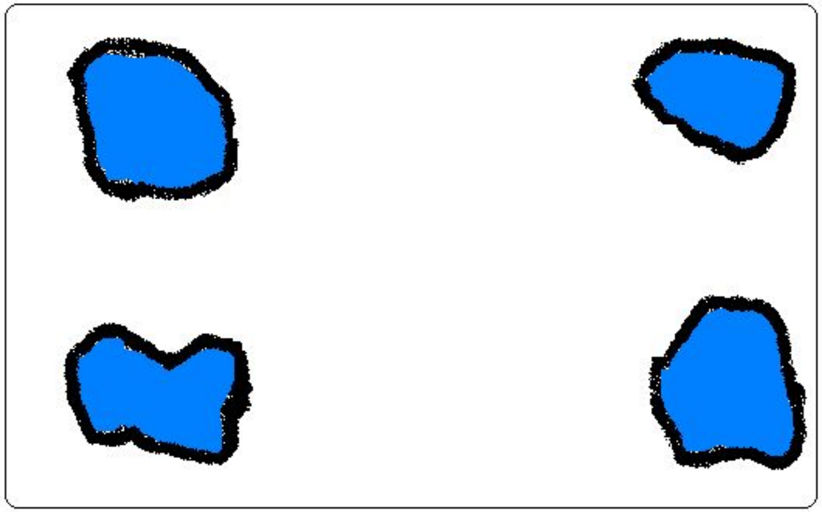

Задача 1

Вариант 1:

Вариант 2:

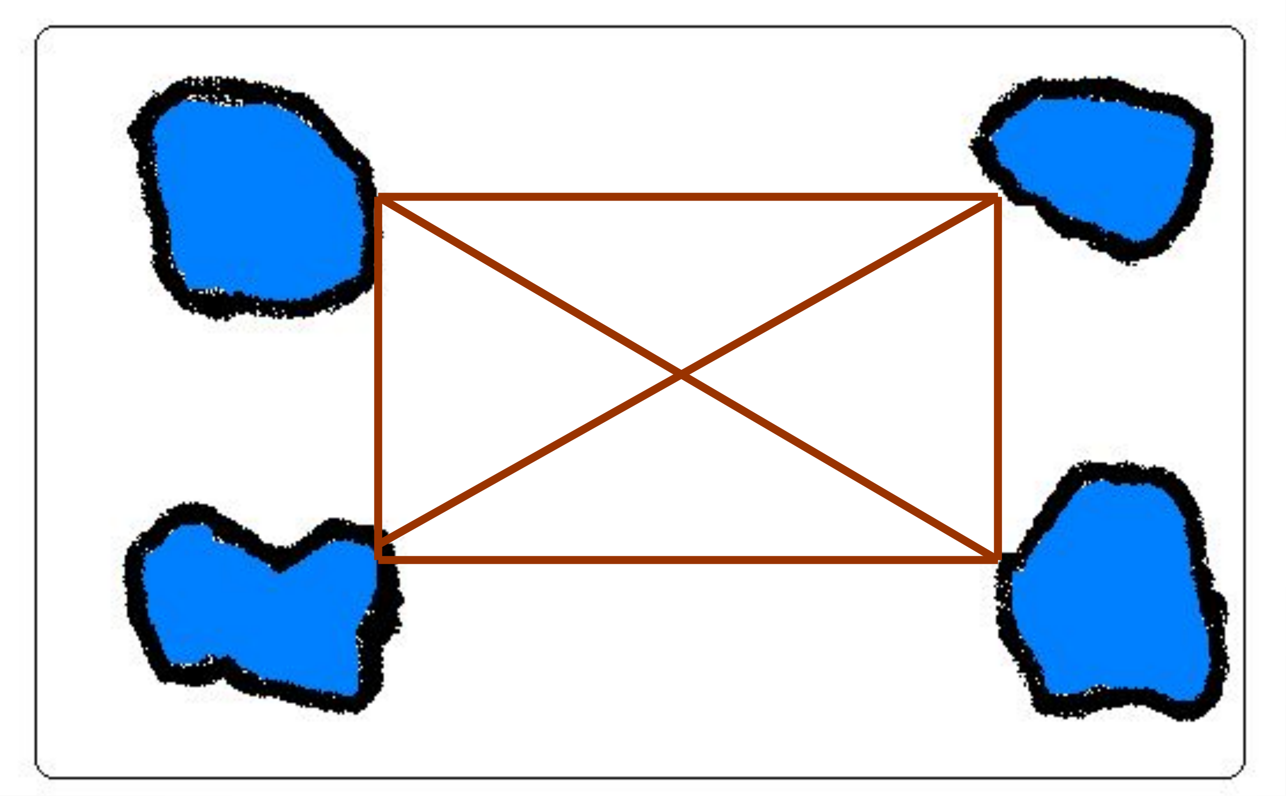
Задача 2

В парке 4 пруда. Было решено засыпать песком дорожки между ними так, чтобы можно было пройти от одного пруда к другому кратчайшим путем, т.е. не нужно было идти в обход.



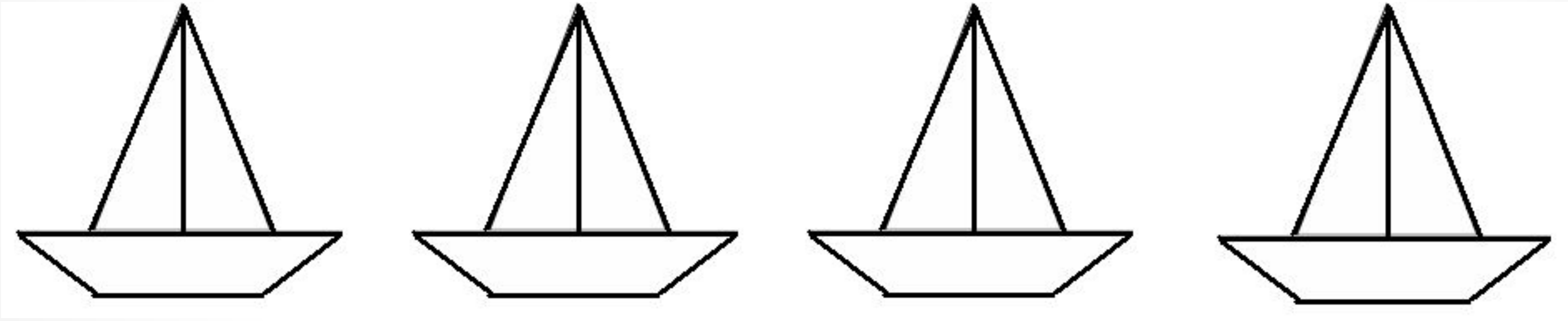
Задание: покажи, какие дорожки надо сделать.

Задача 2



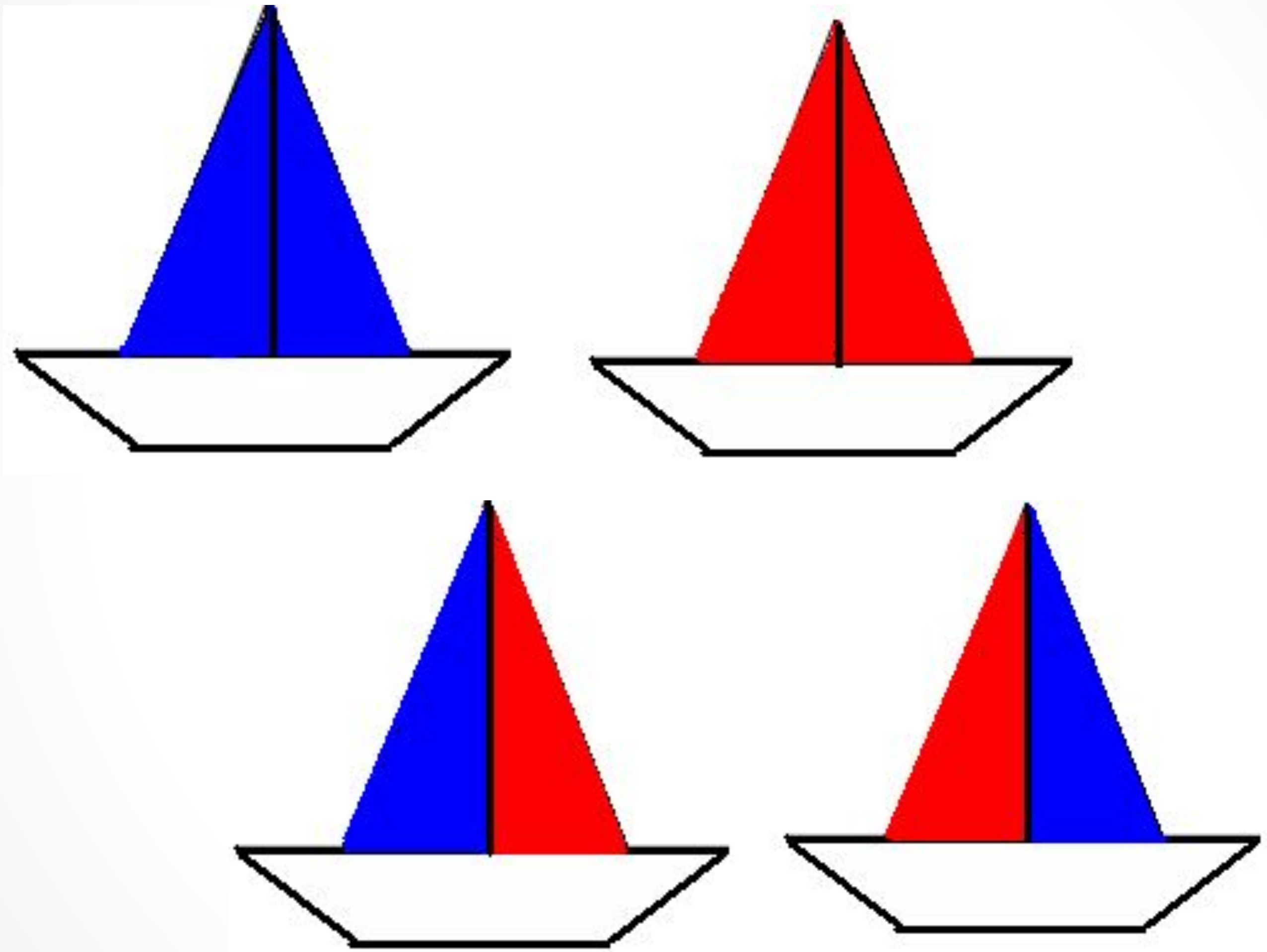
Задача 3

4 парусника готовились к соревнованиям. У каждого был свой корабль. Судьи решили, что надо раскрасить паруса, чтобы парусники были видны издалека и было ясно, кто из спортсменов идет впереди, кто запаздывает.



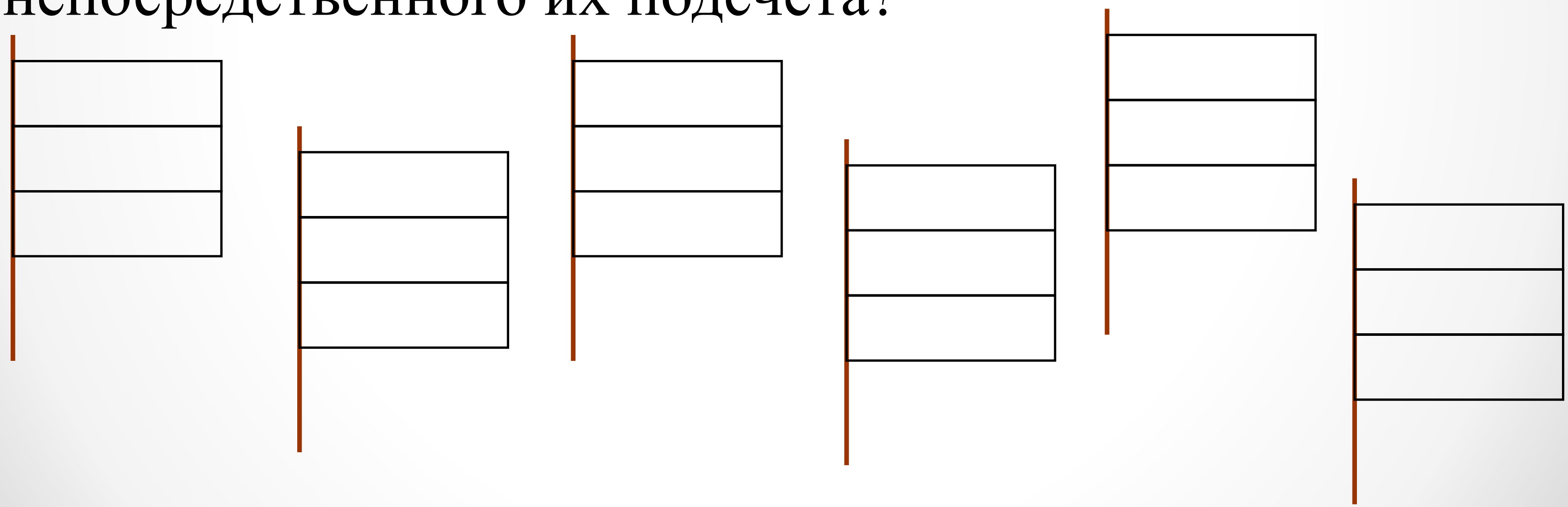
Задание: покажи, как по-разному раскрасить паруса, если есть всего две краски.

Задача 3

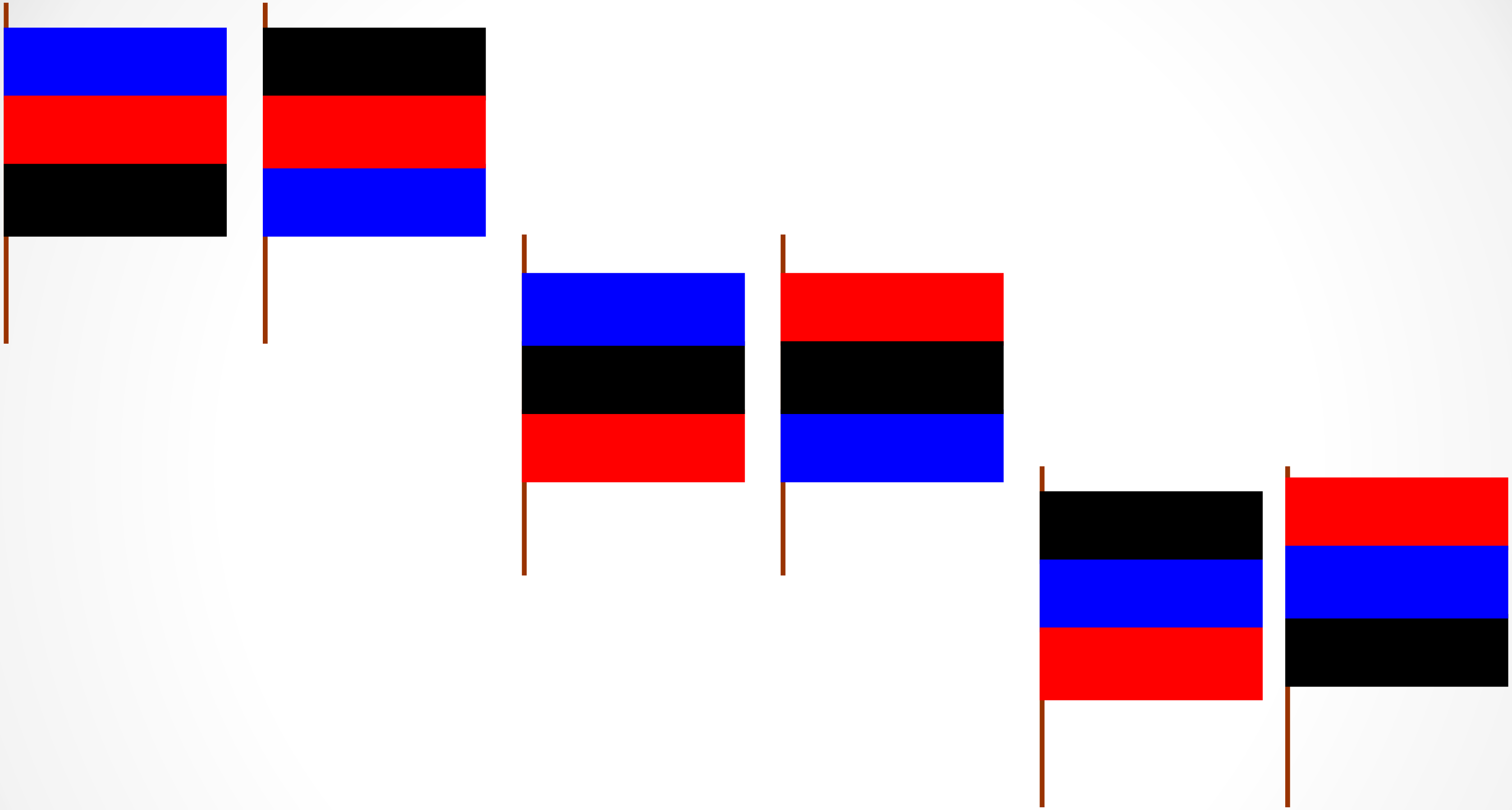


Задача 4

На каждом флажке должны быть полоски разного цвета: синяя, красная, черная. Раскрась флажки так, чтобы они отличались друг от друга. Сколько разных флажков ты раскрасил? Можете ли вы указать способ позволяющий назвать число флажков, не производя непосредственного их подсчёта?



Задача 4

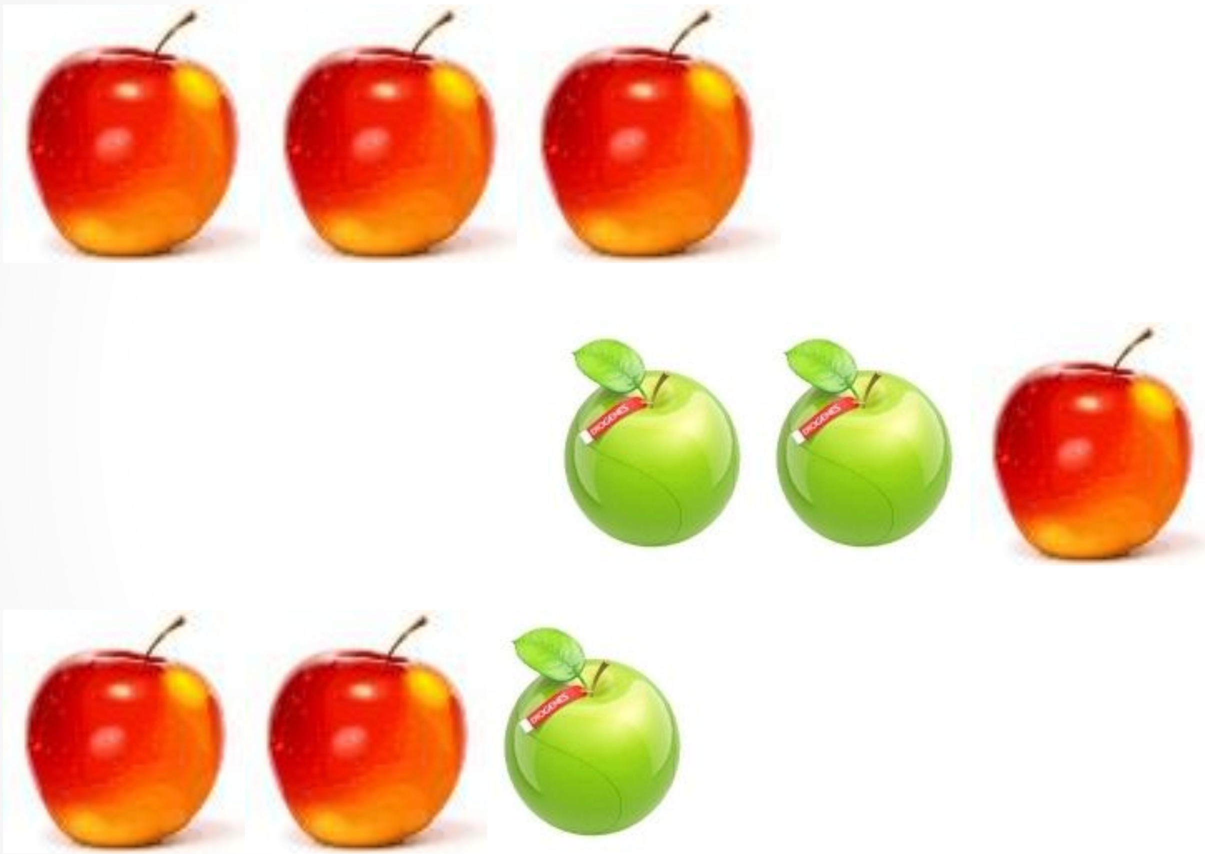


6 флажков, т.е. 3 полоски умножаем на 2. в каждой паре меняем местами два цвета.

Задача 5

У Миши 6 яблок. Из них 4 красных и 2 зеленых. Миша съел 3 яблока. Какого цвета могли быть яблоки? Сколько вариантов у тебя получилось?

Задача 5



Задача 6

Перечислите все двузначные числа, в записи которых встречаются цифры 0, 1, 2.

0 1 2

Задача 6

10 11 12

20 21 22

Задача 7

В танцевальном кружке занимаются пять девочек: Женя, Маша, Катя, Юля и Даша и пять мальчиков: Олег, Вова, Стас, Андрей и Иван. Сколько различных танцевальных пар можно составить? Заполни таблицу и проверь свой ответ.

Задача 7

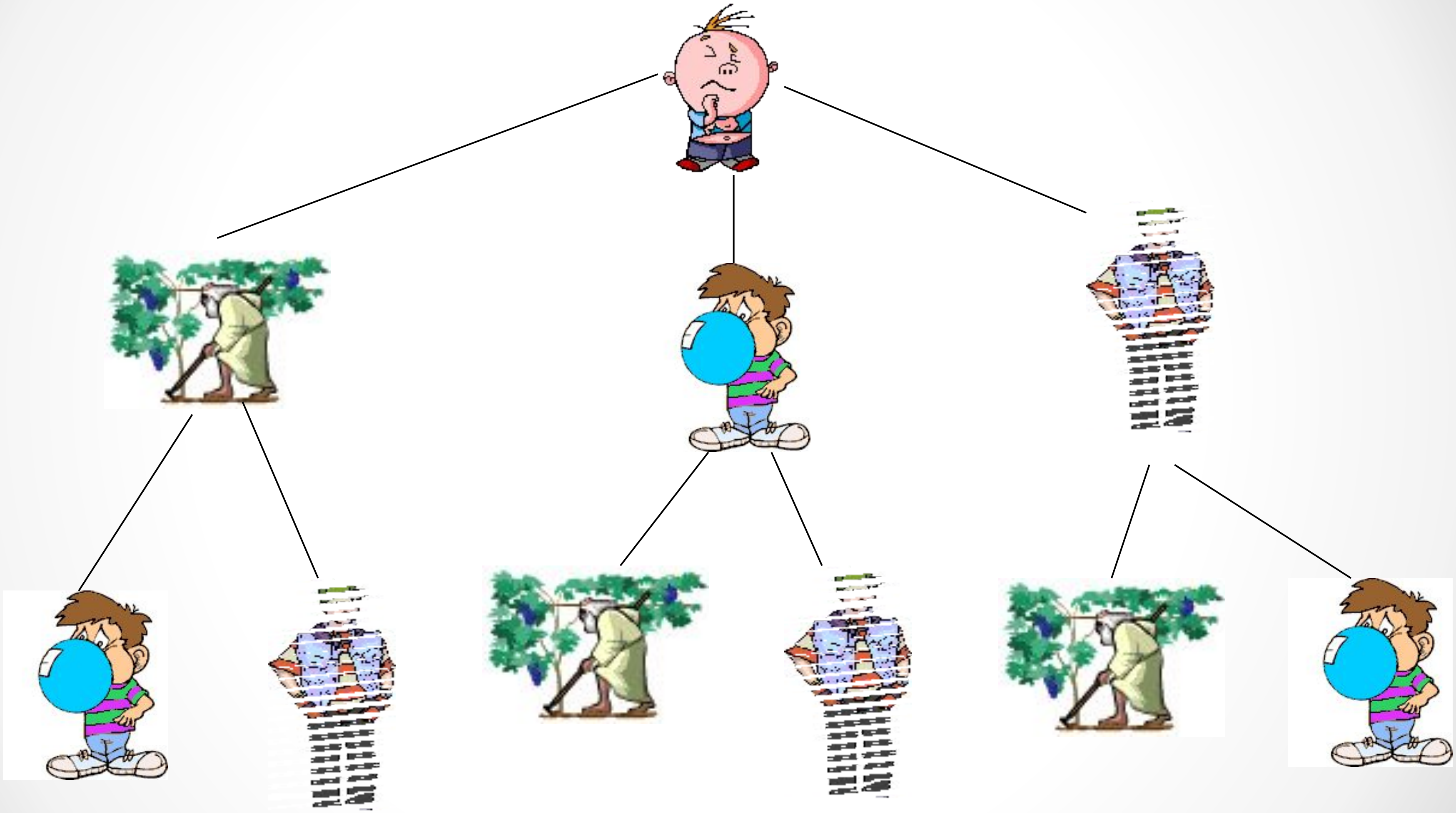
	Же ня	Ма ша	Кат я	Юл я	Да ша
Олег	Олег Же ня	Олег Ма ша	Олег Кат я	Олег Юл я	Олег Да ша
Вова	Вова Же ня	Вова Ма ша	Вова Кат я	Вова Юл я	Вова Да ша
Стас	Стас Же ня	Стас Ма ша	Стас Кат я	Стас Юл я	Стас Да ша
Андрей	Андрей Же ня	Андрей Ма ша	Андрей Кат я	Андрей Юл я	Андрей Да ша
Иван	Иван Же ня	Иван Ма ша	Иван Кат я	Иван Юл я	Иван Да ша

25 пар. Как получили? 5 умножить на 5

Задача 8

Миша решил в воскресенье навестить дедушку, своего друга Петю и старшего брата Володю. В каком порядке он может организовать визиты? Сколько вариантов получилось?

Задача 8



6 вариантов

Задача 9

Составь таблицу, соответствующую условию задачи. Сколько завтраков у тебя получилось?

Задача 9

Задание 1

Напитки Выпечка		
		
		
		

6 завтраков

Это были простые задачи, переходим к различным комбинациям

Перестановки

- Перестановками из *n* элементов называют соединения, которые состоят из одних и тех же *n* элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения

$$P_n = n!$$

- Посмотрите видео «Комбинаторика. Перестановки» по ссылке:

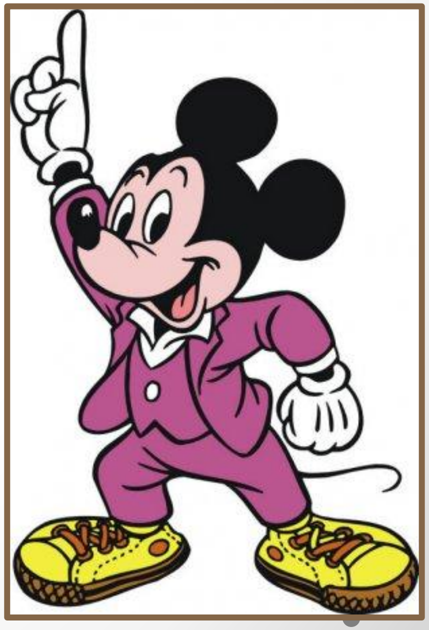
https://www.youtube.com/watch?v=ABMJtIZRsxk

<u>Задача10</u>

В соревнованиях участвовало 4 команды. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?

$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Ответ: 24.

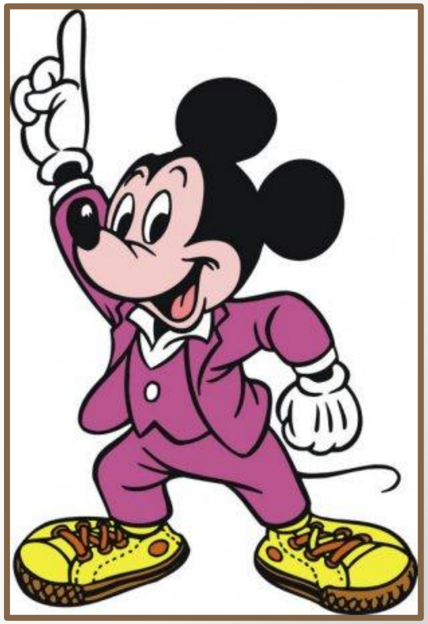


<u>Задача 11</u>

Сколькими способами
можно разместить 12
человек
за столом,
возле которого поставлены
12 стульев?

$P_{12} = 12! = 479001600$

Ответ: 479001600.



Размещения

- Размещениями из *n* элементов называется такие соединения, каждое из которых содержит *k* элементов, взятых из данных *n* разных элементов, и которые отличаются одно от другого либо самими элементами, либо порядком их расположения
- $A^k_n = n!/(n - k)!$

- Посмотрите видео урока № 62 «Комбинаторика. Размещение» по ссылке:

https://www.youtube.com/watch?v=xCBW1pbRCc8

Задача 12

Сколько двузначных чисел
можно составить из пяти цифр
1,2,3,4,5 при условии, что ни
одна
из них не повторяется?

Решение:

Т.к. двузначные числа отличаются друг от друга

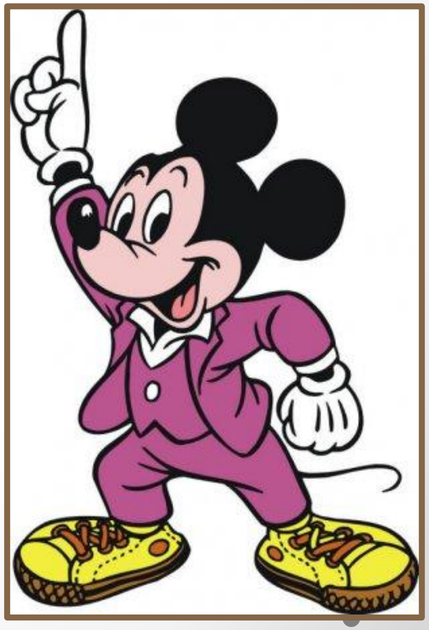
или самими цифрами, или их порядком,

то искомое количество равно

числу размещений из пяти элементов по два:

$$A^2_5 = 5 \cdot 4 = 20$$

Ответ: 20.



Задача 13

У нас есть 9 книг
из серии
«Занимательная математика».
Сколькими способами можно
подарить 3 из них?

Решение:

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = 504$$

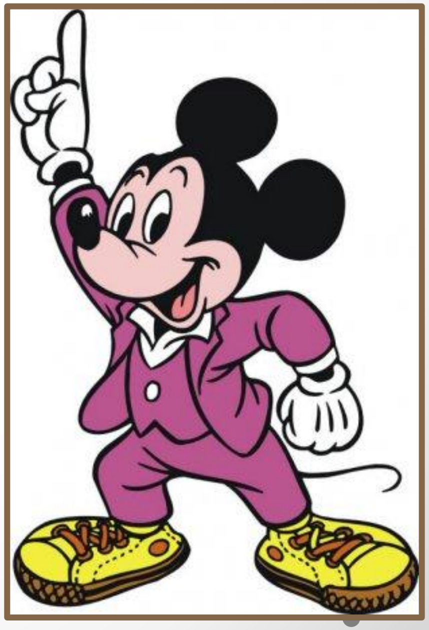
Ответ: 504.

Задача 14

Сколько вариантов расписания можно составить на один день, если всего имеется 8 учебных предметов, а в расписании на день могут быть включены только три из них?

$$A^3_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Ответ: 336.



Сочетания

- Сочетаниями из *n* элементов по *k* в каждом называются соединения, каждое из которых содержит k элементов, взятых из данных *n* разных элементов, и которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом.
- $C_n^k = A_n^k/k! = n!/(k!(n-k)!)$.

Посмотрите видео урок № 63

« Комбинаторика. Сочетания» по ссылке:

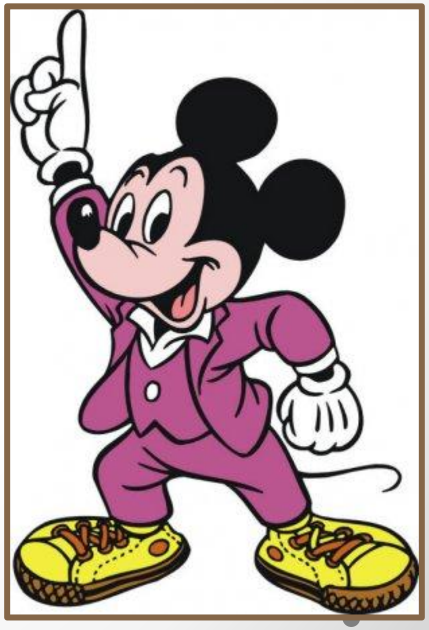
https://www.youtube.com/watch?v=ZSe1YQXCsj4

Задача 15

В тренировках участвовали
12 баскетболистов.
Сколько различных стартовых
пятерок
может образовать тренер?

$$C_{12}^{5} = \frac{12!}{(12-5)!\cdot 5!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{7!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 792$$

Ответ: 792.

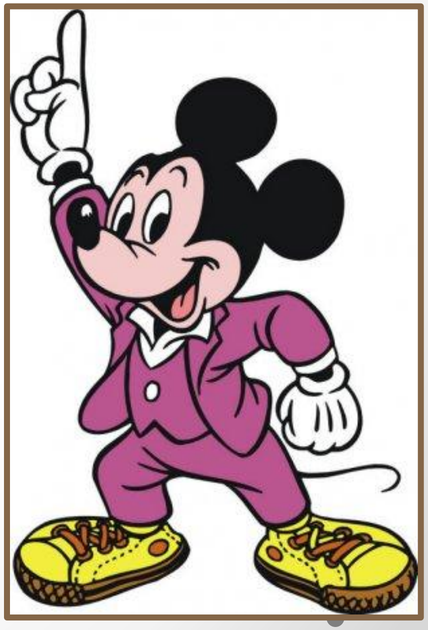


Задача 16

Сколькими способами читатель может выбрать 2 книжки из 6 имеющихся?

$$C_6^2 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

*Ответ:*15.



Теперь все обобщаем. В комбинаторике есть два правила и три формулы.

Выбор правила

Правило суммы

Если некоторый объект А можно выбрать **m** способами, а другой объект В можно выбрать **n** способами, то выбор объекта либо А, либо В можно осуществить **m** + **n** способами.

Выбор правила

Правило произведения

Если объект А можно выбрать **m** способами и если после каждого такого выбора объект В можно выбрать **n** способами, то выбор пары А и В можно осуществить **m** · **n** способами.

Выбор формулы

Учитывается ли порядок размещения элементов в соединении?

ДА

НЕТ

Все элементы входят в соединение?

ДА

НЕТ

Перестановки
(без повторений)

$P_n = n! =$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
(n – число элементов)

Размещения
(без повторений)

$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-(k-1)) = n!/(n-k)!$
(выбор из n элементов по k)

Сочетания
(без повторений)

$C_n^k = n!/(k! \cdot (n-k)!)$
(выбор из n элементов по k)

<u>Свойства:</u> $C_n^n = C_n^0 = 1$
$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

Что увидели? При перестановки участвует только одно число

И его переставляют

А вот определения размещений и сочетаний практические одинаковые, но отличаются тем, что для размещения важен порядок элементов, а для сочетания не важен.

Посмотрите схему, перенесите ее в тетрадь

Вероятность

- Вероятностью события А в испытании с равновозможными элементарными исходами называется отношение числа исходов m, благоприятствующих событию А, к числу n всех исходов испытания.

$$p = \frac{m}{n}$$

Методы решения

1. Большинство задач можно решить с помощью классической формулы вероятности:

2. Задачи с монетами (и игральной костью) при небольшом количестве подбрасываний удобно решать методом перебора комбинаций.

Метод перебора комбинаций:

– выписываем все возможные комбинации орлов и решек. Например, ОО,ОР,РО, РР. Число таких комбинаций – n;

– среди полученных комбинаций выделяем те, которые требуются по условию задачи (благоприятные исходы),– m;

– вероятность находим по формуле:

Задача1

Папа, мама, сын и дочка бросили жребий – кому мыть посуду. Найдите вероятность того, что посуду будет мыть мама.

Решение

n = 4 – число всех элементарных исходов;

m = 1 – число благоприятных исходов (жребий выпал на маму).

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{4}=0,25$$

Задача 2

Бросают игральную кость.
Найти вероятность того, что:
а) выпадет четное число очков (А);
б) выпадет число очков, кратное 3 (В);
в) выпадет любое число очков, кроме 5 (С).

Решение.

а) На гранях игральной кости имеется три четные цифры (2,4,6), т. е. число искомых исходов $m = 3$. Число всех возможных исходов $n = 6$

(выпадает любое число очков от 1 до 6).

Значит, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

б) Имеются две цифры, кратные трем (3,6), $m = 2$, $n = 6$.

$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

в) Искомыми исходами являются цифры 1,2,3,4,6 - всего их пять $m = 5$, $n = 6$.

$P(C) = \frac{5}{6}$

Ответ: $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{5}{6}$.

Задача 3

Изготовили 100 деталей,
из которых 97
стандартных
и 3 бракованных.
Какова вероятность
выбора стандартной
детали и выбора
бракованной детали?

Решение.
Если взять 1 деталь, то событие А – деталь стандартная и событие В – деталь бракованная, не равновозможные.
Событие А более возможно, более вероятно,
чем событие В.

$$P(A) = \frac{97}{100}, \quad P(B) = \frac{3}{100}$$

Ответ: 0,97 ; 0,03.

И так прочитайте еще раз определения перестановки, размещения и сочетания

Правило сложения элементарное, задач на него не будет.

Произведение применяется тогда, когда есть два разных объекта (мальчики – девочки, булочки – чай т.д)

И так приступаем к конкретным задачам

Задача 1

Сколькими способами можно рассадить четверых детей на четырех стульях в столовой детского сада?

4 стула и 4 ребенка, Число одно, значит перестановка

$P_4 = 4! = 1*2*3*4 = 24$

Задача 2

Наряд студентки состоит из блузки, юбки и туфель. Девушка имеет в своем гардеробе четыре блузки, пять юбок и трое туфель. Сколько нарядов может иметь студентка?

Разные вещи, 4,5,3, значит умножение

4*5*3 = 60 нарядов

Задача 3

В группе, в которой 25 студентов, нужно выбрать старосту, его заместителя и помощника заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Из 25 выбираем 3. но у них у каждого свои обязанности, т.е. порядок важен. Значит это размещение

$$A_{25}^{5} =$$

и считаем

Задача 4

В группе из 25 студентов нужно выбрать не старосту, его заместителя и помощника его заместителя, а тройку начальников, которые, обладая равными правами, будут судить, не выясняя, кто из троих главный, кто менее главный, а кто так себе.

Опять из 25 выбираем 5, но порядок не важен, у них

одинаковы права, значит это сочетание

$$C_{25}^{5} =$$

и считаем

По вероятности вы разобрали два метода решения задач

1 метод – применение классической формулы

$$p = \frac{m}{n}$$

2 метод перебор возможных вариантов (игральная кость, монеты)

Приступайте к выполнению практической работы