

Комбинаторика и вероятность

Вспоминаем понятия комбинаторики и вероятности. Эти понятия знакомы вам из школьного курса математики. Вспомним методы и приемы решения задач по данным темам.

Старайтесь решать задачи самостоятельно, только потом проверяйте. Все решения записывайте в тетрадь.

КОМБИНАТОРИКА – область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.



КОМБИНАТОРНАЯ ЗАДАЧА – задача, требующая осуществления перебора всех возможных вариантов или подсчета их числа.



Задача 1

У кассы кинотеатра стоят четверо ребят. У двух из них сторублевые купюры, у других двух – пятидесятирублевые. Билет в кино стоит 50 рублей. В начале продажи касса пуста.

Вопрос: как должны расположиться ребята, чтобы никому не пришлось ждать сдачи?



Задача 1

Вариант 1:

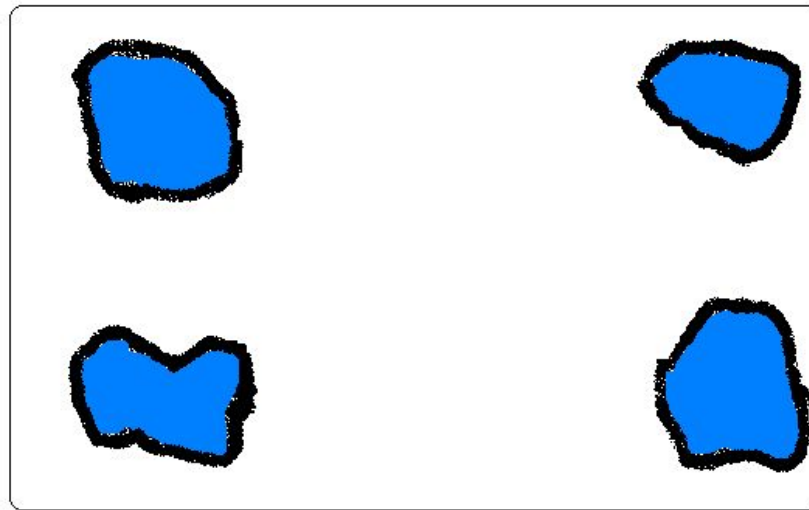


Вариант 2:



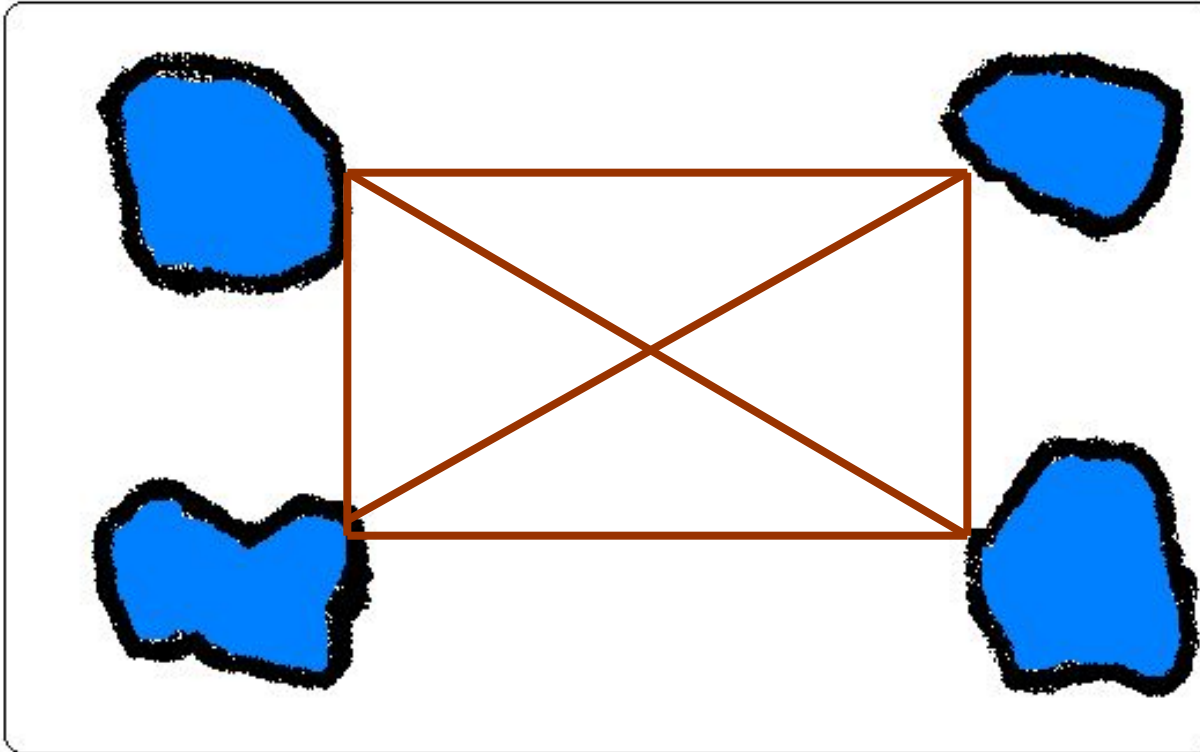
Задача 2

В парке 4 пруда. Было решено засыпать песком дорожки между ними так, чтобы можно было пройти от одного пруда к другому кратчайшим путем, т.е. не нужно было идти в обход.



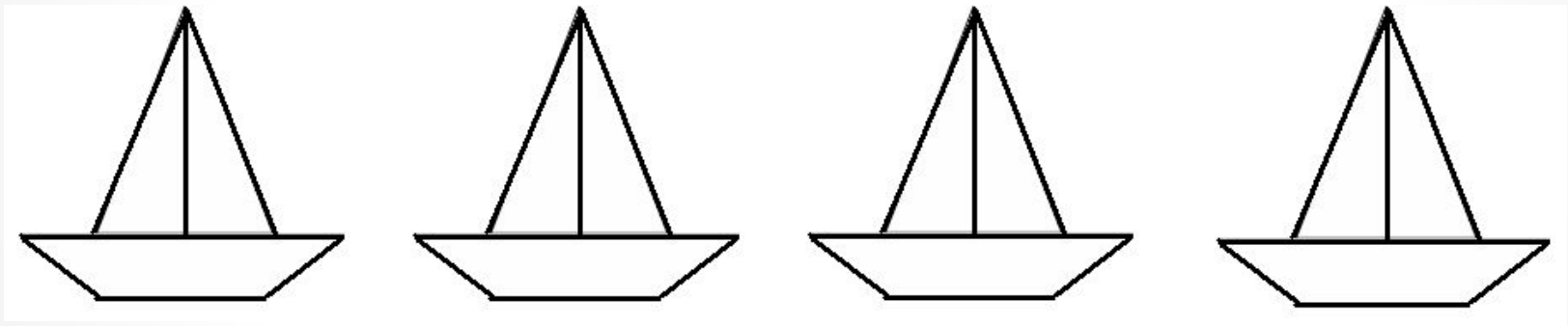
Задание: покажи, какие дорожки надо сделать.

Задача 2



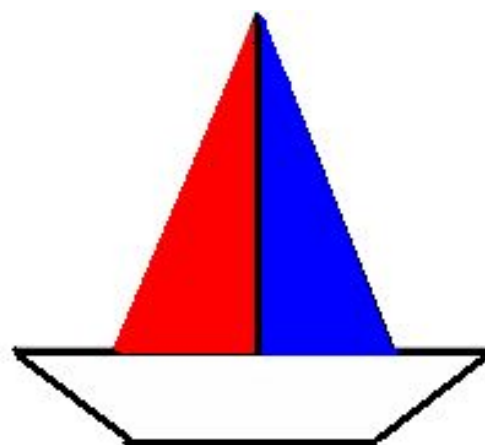
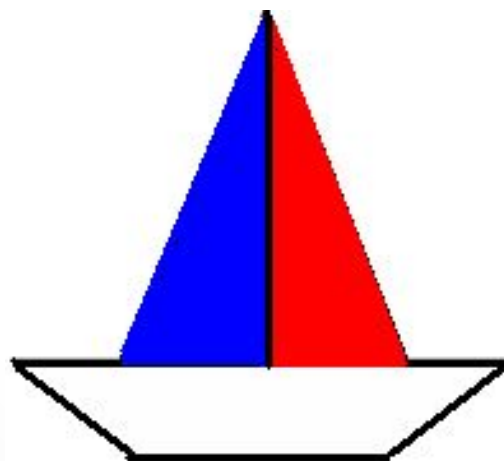
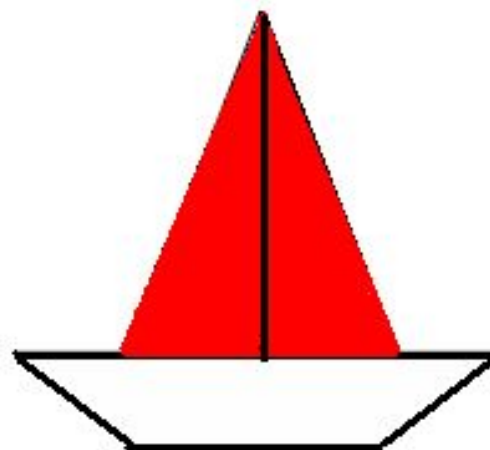
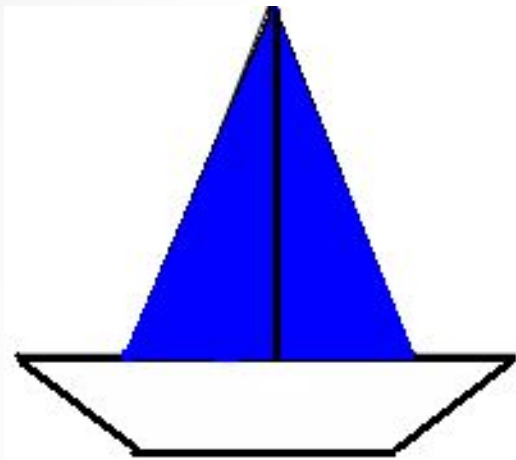
Задача 3

4 парусника готовились к соревнованиям. У каждого был свой корабль. Судьи решили, что надо раскрасить паруса, чтобы парусники были видны издали и было ясно, кто из спортсменов идет впереди, кто запаздывает.



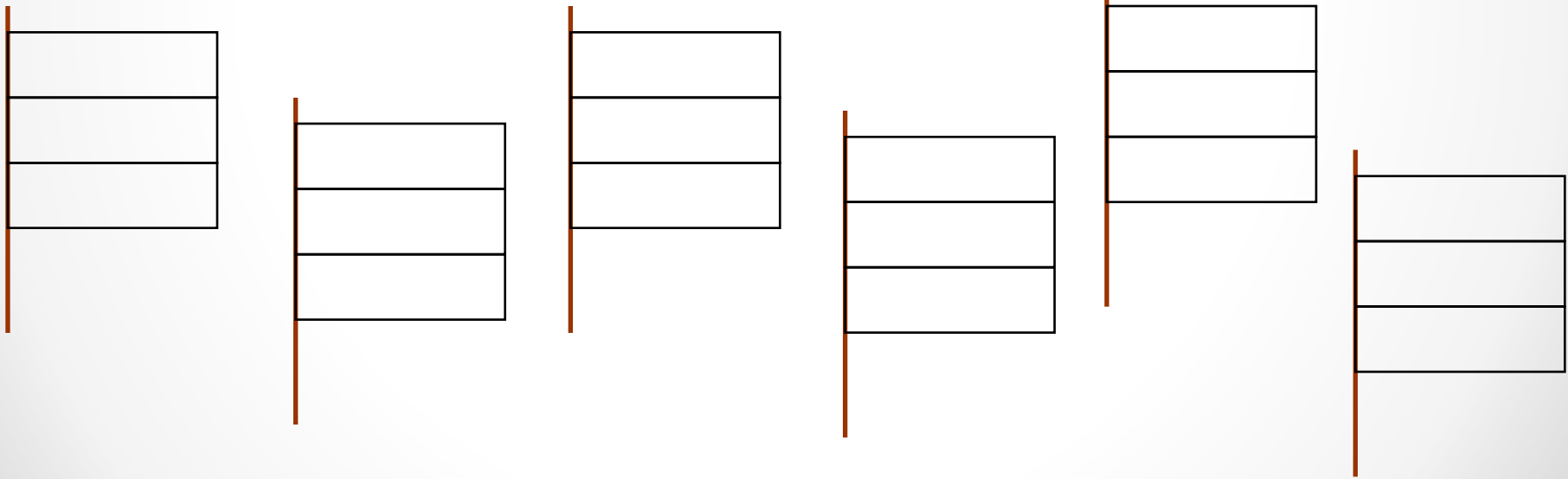
Задание: покажи, как по-разному раскрасить паруса, если есть всего две краски.

Задача 3

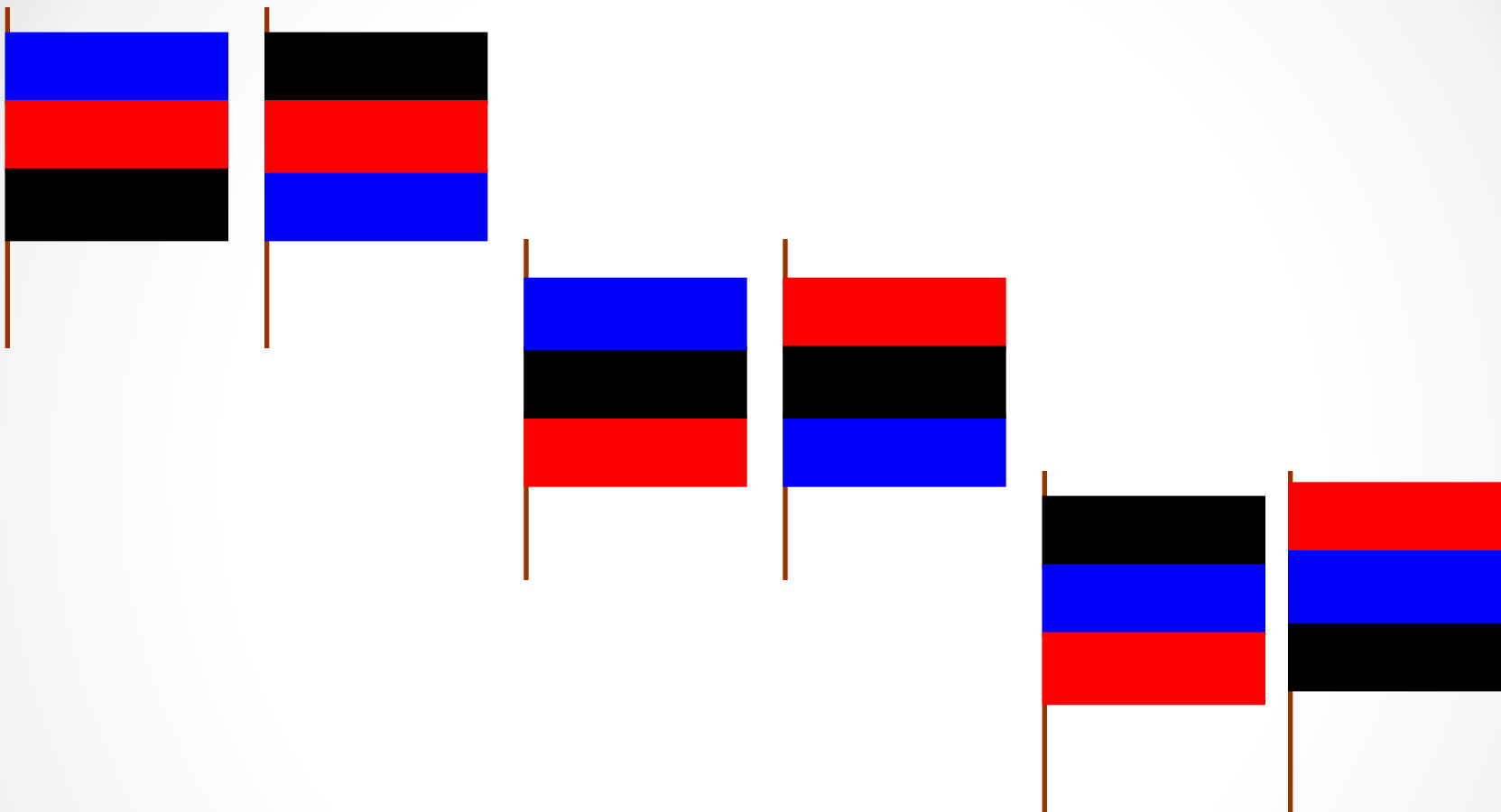


Задача 4

На каждом флажке должны быть полосы разного цвета: синяя, красная, черная. Раскрась флажки так, чтобы они отличались друг от друга. Сколько разных флажков ты раскрасил? Можете ли вы указать способ позволяющий назвать число флажков, не производя непосредственного их подсчёта?



Задача 4



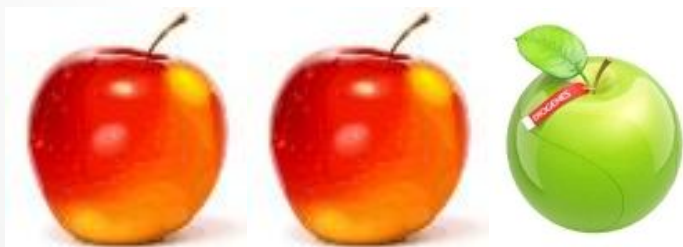
6 флажков, т.е. 3 полосы умножаем на 2. в каждой паре
меняем местами два цвета.

Задача 5

У Миши 6 яблок. Из них 4 красных и 2 зеленых. Миша съел 3 яблока. Какого цвета могли быть яблоки? Сколько вариантов у тебя получилось?



Задача 5



Задача 6

Перечислите все двузначные числа, в записи которых встречаются цифры 0, 1, 2.

0

1

2

Задача 6

10

11

12

20

21

22

Задача 7

В танцевальном кружке занимаются пять девочек: Женя, Маша, Катя, Юля и Даша и пять мальчиков: Олег, Вова, Стас, Андрей и Иван. Сколько различных танцевальных пар можно составить? Заполни таблицу и проверь свой ответ.



Задача 7

	Же ня	Ма ша	Кат я	Юл я	Да ша
Олег	Оле Же ня	Оле Ма ша	Оле Кат я	Оле Юл я	Оле Да ша
Вова	Вов Же ня	Вов Ма ша	Вов Кат я	Вов Юл я	Вов Да ша
Стас	Стас Же ня	Стас Ма ша	Стас Кат я	Стас Юл я	Стас Да ша
Андрей	Андрей Же ня	Андрей Ма ша	Андрей Кат я	Андрей Юл я	Андрей Да ша
Иван	Иван Же ня	Иван Ма ша	Иван Кат я	Иван Юл я	Иван Да ша

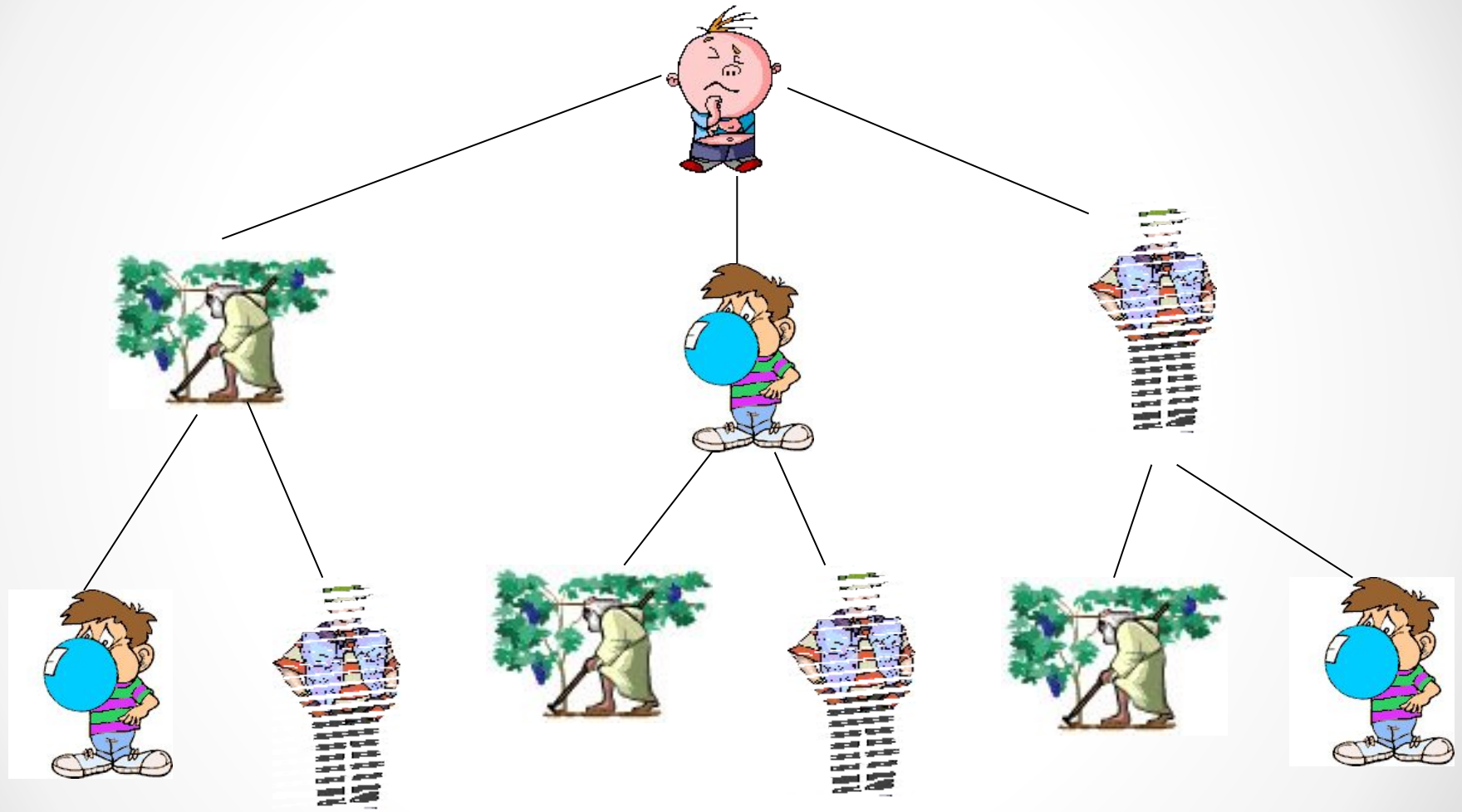
25 пар. Как получили? 5 умножить на 5

Задача 8

Миша решил в воскресенье навестить дедушку, своего друга Петю и старшего брата Володю. В каком порядке он может организовать визиты? Сколько вариантов получилось?



Задача 8



6 вариантов












Задача 9

Составь таблицу, соответствующую условию задачи.
Сколько завтраков у тебя получилось?



Задача 9

Задание 1

Напитки Выпечка		
		
		
		

6 завтраков

Это были простые задачи, переходим к
различным комбинациям

Перестановки

- Перестановками из n элементов называют соединения, которые состоят из одних и тех же n элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения

$$P_n = n!$$

- Посмотрите видео «Комбинаторика. Перестановки» по ссылке:

<https://www.youtube.com/watch?v=ABMJtIZRsxk>



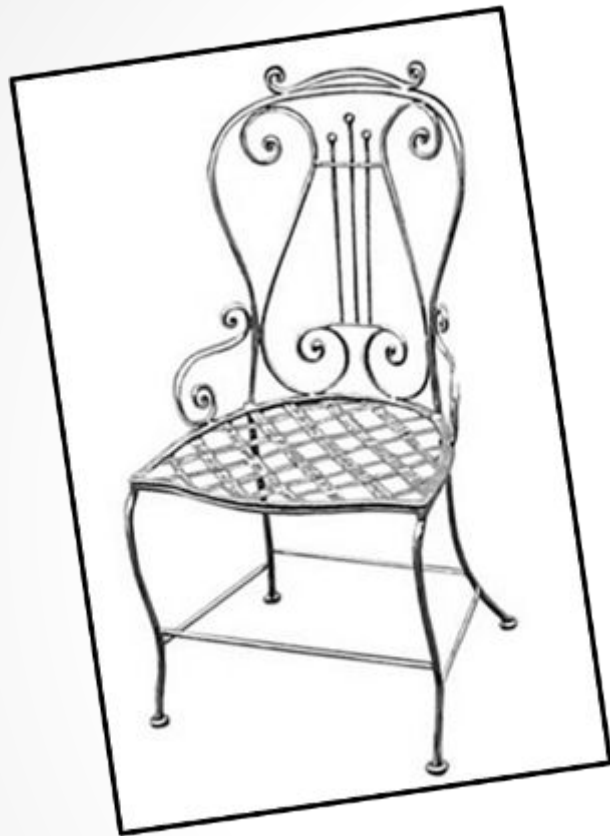
Задача 10

В соревнованиях
участвовало 4 команды.
Сколько вариантов
распределения мест между
ними возможно?

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Ответ: 24.





Задача 11
Сколькими способами
можно разместить 12
человек
за столом,
возле которого поставлены
12 стульев?

$$P_{12} = 12! = 479001600$$

Ответ: 479001600.

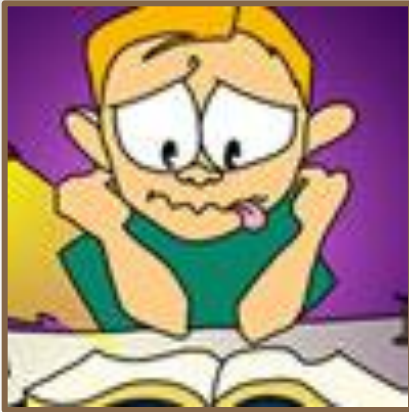


Размещения

- Размещениями из n элементов называется такие соединения, каждое из которых содержит k элементов, взятых из данных n разных элементов, и которые отличаются одно от другого либо самими элементами, либо порядком их расположения
- $A_n^k = n!/(n - k)!$

- Посмотрите видео урока № 62 «Комбинаторика. Размещение» по ссылке:

<https://www.youtube.com/watch?v=xCBW1pbRCc8>



Задача 12

Сколько двузначных чисел
можно составить из пяти цифр
1,2,3,4,5 при условии, что ни
одна
из них не повторяется?

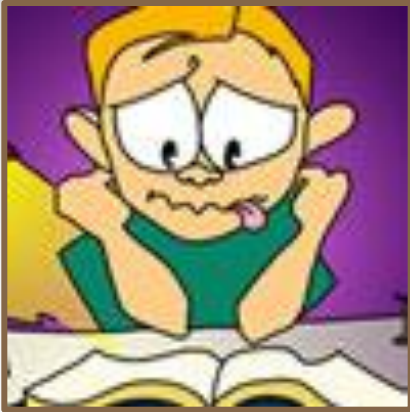
Решение:

Т.к. двузначные числа отличаются друг от друга или самими цифрами, или их порядком, то искомое количество равно числу размещений из пяти элементов по два:

$$A^2_5 = 5 \cdot 4 = 20$$

Ответ: 20.





Задача 13

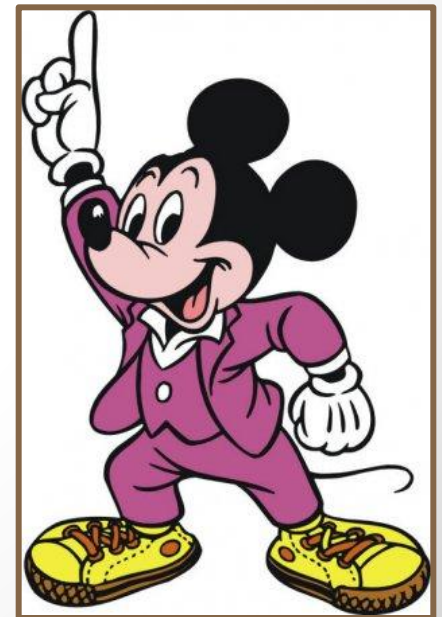
У нас есть 9 книг
из серии
«Занимательная математика».
Сколькими способами можно
подарить 3 из них?

Решение:

3

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = 504$$

Ответ: 504.





Задача 14

Сколько вариантов расписания можно составить на один день, если всего имеется 8 учебных предметов, а в расписании на день могут быть включены только три из них?

$$A^3_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Ответ: 336.



Сочетания

- Сочетаниями из n элементов по k в каждом называются соединения, каждое из которых содержит k элементов, взятых из данных n разных элементов, и которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом.
- $C_n^k = A_n^k / k! = n! / (k!(n-k)!)$.

Посмотрите видео урок № 63

« Комбинаторика. Сочетания» по ссылке:

<https://www.youtube.com/watch?v=ZSe1YQXCsj4>



Задача 15

В тренировках участвовали
12 баскетболистов.
Сколько различных стартовых
пятерок
может образовать тренер?

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{(12-5)! \cdot 5!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{7! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792$$

Ответ: 792.





Задача 16

Сколькими способами
читатель
может выбрать
2 книжки из 6 имеющихся?

$$C_6^2 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

Ответ: 15.



Теперь все обобщаем. В комбинаторике
есть два правила и три формулы.

Выбор правила

Правило суммы

Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а другой объект B можно выбрать n способами, то выбор объекта либо A , либо B можно осуществить $m + n$ способами.

Выбор правила

Правило произведения

Если объект A можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то выбор пары A и B можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Выбор формулы

Учитывается ли порядок размещения элементов в соединении?

ДА

НЕТ

Все элементы входят в соединение?

ДА

НЕТ

Перестановки
(без повторений)

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

(n – число элементов)

Размещения
(без повторений)

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-(k-1)) = n! / (n-k)!$$

(выбор из n элементов по k)

Сочетания
(без повторений)

$$C_n^k = n! / (k! \cdot (n-k)!)$$

(выбор из n элементов по k)

Свойства: $C_n^n = C_n^0 = 1$
 $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

Что увидели? При перестановки участвует
только одно число

И его переставляют

А вот определения размещений и сочетаний
практически одинаковые, но отличаются
тем, что для размещения важен порядок
элементов, а для сочетания не важен.

Посмотрите схему, перенесите ее в тетрадь

Вероятность

- Вероятностью события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называется отношение числа исходов m , благоприятствующих событию A , к числу n всех исходов испытания.

$$P = \frac{m}{n}$$

Методы решения

1. Большинство задач можно решить с помощью классической формулы вероятности:
2. Задачи с монетами (и игральной костью) при небольшом количестве подбрасываний удобно решать методом перебора комбинаций.

Метод перебора комбинаций:

- выписываем все возможные комбинации орлов и решек. Например, ОО,ОР,РО, РР. Число таких комбинаций – n ;
- среди полученных комбинаций выделяем те, которые требуются по условию задачи (благоприятные исходы), – m ;
- вероятность находим по формуле:

Задача 1

Папа, мама, сын и дочка бросили жребий – кому мыть посуду.
Найдите вероятность того, что посуду будет мыть мама.

Решение

$n = 4$ – число всех элементарных исходов;

$m = 1$ – число благоприятных исходов
(жребий выпал на маму).

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4} = 0,25$$



Задача 2

Бросают игральную кость.
Найти вероятность того, что:

- а) выпадет четное число очков (A);
- б) выпадет число очков, кратное 3 (B);
- в) выпадет любое число очков, кроме 5 (C).



Решение.

а) На гранях игральной кости имеется три четные цифры (2,4,6), т. е. число искомым исходов $m = 3$. Число всех возможных исходов $n = 6$

(выпадает любое число очков от 1 до 6).

$$\text{Значит, } P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

б) Имеются две цифры, кратные трем (3,6), $m = 2$, $n = 6$.

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

в) Искомыми исходами являются цифры 1,2,3,4,6 - всего их пять $m = 5$, $n = 6$.

$$P(C) = \frac{5}{6}$$

$$\text{Ответ: } P(A) = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{1}{3}; P(C) = \frac{5}{6}.$$



Задача 3

Изготовили 100 деталей,
из которых 97
стандартных
и 3 бракованных.

Какова вероятность
выбора стандартной
детали и выбора
бракованной детали?

Решение.

Если взять 1 деталь, то событие А – деталь стандартная и событие В – деталь бракованная, не равновозможные. Событие А более возможно, более вероятно, чем событие В.

$$P(A) = \frac{97}{100}, \quad P(B) = \frac{3}{100}$$

Ответ: 0,97 ; 0,03.

И так прочитайте еще раз определения
перестановки, размещения и сочетания

Правило сложения элементарное, задач на него не будет.

Произведение применяется тогда, когда есть два разных объекта (мальчики – девочки, булочки – чай т.д)

И так приступаем к конкретным задачам

Задача 1

Сколькими способами можно посадить четверых детей на четырех стульях в столовой детского сада?

4 стула и 4 ребенка, Число одно, значит перестановка

$$P_4 = 4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24$$

Задача 2

Наряд студентки состоит из блузки, юбки и туфель. Девушка имеет в своем гардеробе четыре блузки, пять юбок и трое туфель. Сколько нарядов может иметь студентка?

Разные вещи, 4,5,3, значит умножение

$$4*5*3 = 60 \text{ нарядов}$$

Задача 3

В группе, в которой 25 студентов, нужно выбрать старосту, его заместителя и помощника заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Из 25 выбираем 3. но у них у каждого свои обязанности, т.е. порядок важен. Значит это размещение

$$A_{25}^3 =$$

и считаем

Задача 4

В группе из 25 студентов нужно выбрать не старосту, его заместителя и помощника его заместителя, а тройку начальников, которые, обладая равными правами, будут судить, не выясняя, кто из троих главный, кто менее главный, а кто так себе.

Опять из 25 выбираем 5, но порядок не важен, у них

одинаковы права, значит это сочетание

$$C_{25}^5 =$$

и считаем

По вероятности вы разобрали два метода
решения задач

1 метод – применение классической формулы

$$p = \frac{m}{n}$$

2 метод перебор возможных вариантов
(игральная кость, монеты)

Приступайте к выполнению
практической работы