АЛГОРИТМ

Райвеста-Шамира-Адлемана (Rivest, Shamir и Adleman) RSA

Область применения

- Шифрование;
- Цифровое подписывание.

RSA и DH

Алгоритм RSA во многом схож с алгоритмом Диффи-Хеллмана.

Принципиальное различие:

- Алгоритм DH основан на использовании односторонней функции;
- Алгоритм RSA основан на использовании односторонней функции с лазейкой.

Лазейка для RSA

- Вычисления производятся по модулю составного числа n=p*q, где p и q- простые числа;
- Зная публично известные n и e, мы можем найти $m^e(\mathrm{mod}\ n)$ по заданному m, но не наоборот. При этом, зная, как n раскладывается на множители; выполнить обратную операцию очень легко. Разложение числа n на множители и есть "лазейка". (Если мы знаем эту информацию, то можем легко выполнить обратное действие, а если не знаем, то не можем).

Китайская теорема об остатках (Сунь Цзе 1 век д.н.э.)

Числа по модулю n — это 0,1,..., n — 1. Они не образуют конечное поле, как в том случае, если бы n было простым числом. Математики обозначают это множество чисел как Zn и называют его кольцом.

Для каждого x из Zn можно легко вычислить пару (xmodp, xmodq). Китайская теорема об остатках утверждает, что можно выполнить и обратную операцию: зная пару (xmodp, xmodq), можно восстановить исходное значение x.

Доказательство. Единственность решения

Для упрощения записи введем обозначение (a, b):= (x mod p, x mod q). Вначале покажем, что восстановление исходного значения x вообще возможно, а затем приведем алгоритм его вычисления.

Чтобы вычислить x по заданным (a, b), следует убедиться, что в Zn не существует второго такого числа x', для которого x' mod p = a и x' mod q = b. В противном случае и x и x' привели бы к появлению одной и той же пары (a, b), и ни один алгоритм не смог бы распознать, какое из этих значений является исходным.

Пусть d:= x — x' — это разность чисел, которым соответствует одна и же пара (a, b).

Имеем (d mod p) = (x — x') mod p = (x mod p) — (x'mod p)= =a—a = O, а следовательно, d кратно p.

Аналогичным образом получаем, что d кратно q.

Отсюда следует, что d является кратным НОК(p, q), так как НОК это, наименьшее общее кратное. Поскольку p и q — это неодинаковые простые числа, НОК(p, q) = pq =n, а значит, x — x' кратно n.

Но и x и x' лежат в диапазоне 0,1,... ,n — 1, поэтому разность x - x', кратная n, находится в диапазоне: —n + 1,..., n — 1. Единственным возможным значением такой разности, кратным n, является x—x' = 0, или x = x'. Это доказывает, что для любой заданной пары (a, b) существует не более одного x, удовлетворяющего условиям теоремы. Остается лишь найти значение x.

Доказательство. Существование решения

Самым удобным способом вычисления x является формула Гарнера:

$x = (((a - b)(q^{-1} \bmod p)) \bmod p) * q + b$ (*).

Здесь множитель $(q^{-1} \bmod p)$ — это константа, которая зависит только от p и q. Мы можем выполнять деление по модулю p, а значит, и вычислять (1/qmodp), что является всего лишь другой формой записи выражения (q-1 modp).

Вначале покажем, что x находится в диапазоне 0,... ,n — 1.

Очевидно, $x \geq 0$.

Обозначим за t выражение $(((a-b)(q^{-1} \bmod p)) \bmod p)$. Значение t должно попадать в диапазон 0,…,p — 1, так как является результатом вычисления по модулю p.

Если $t \leq p — 1$, тогда $tq \leq (p — l)q$ и $x = tq + b$(из (*)) $\leq (p — l)q + (q — 1) = pq — 1 = n— 1$.

Очевидно, значение x действительно находится в диапазоне 0,..., n — 1.

Доказательство. Существование решения

Теперь покажем, что найденное значение x дает правильный результат и
go модулю p, и по модулю q.

x mod q= ((((a-b)(q^{-1} mod p)) mod p)* q + b)mod q=(K*q + b)mod q =
= b mod q=b.

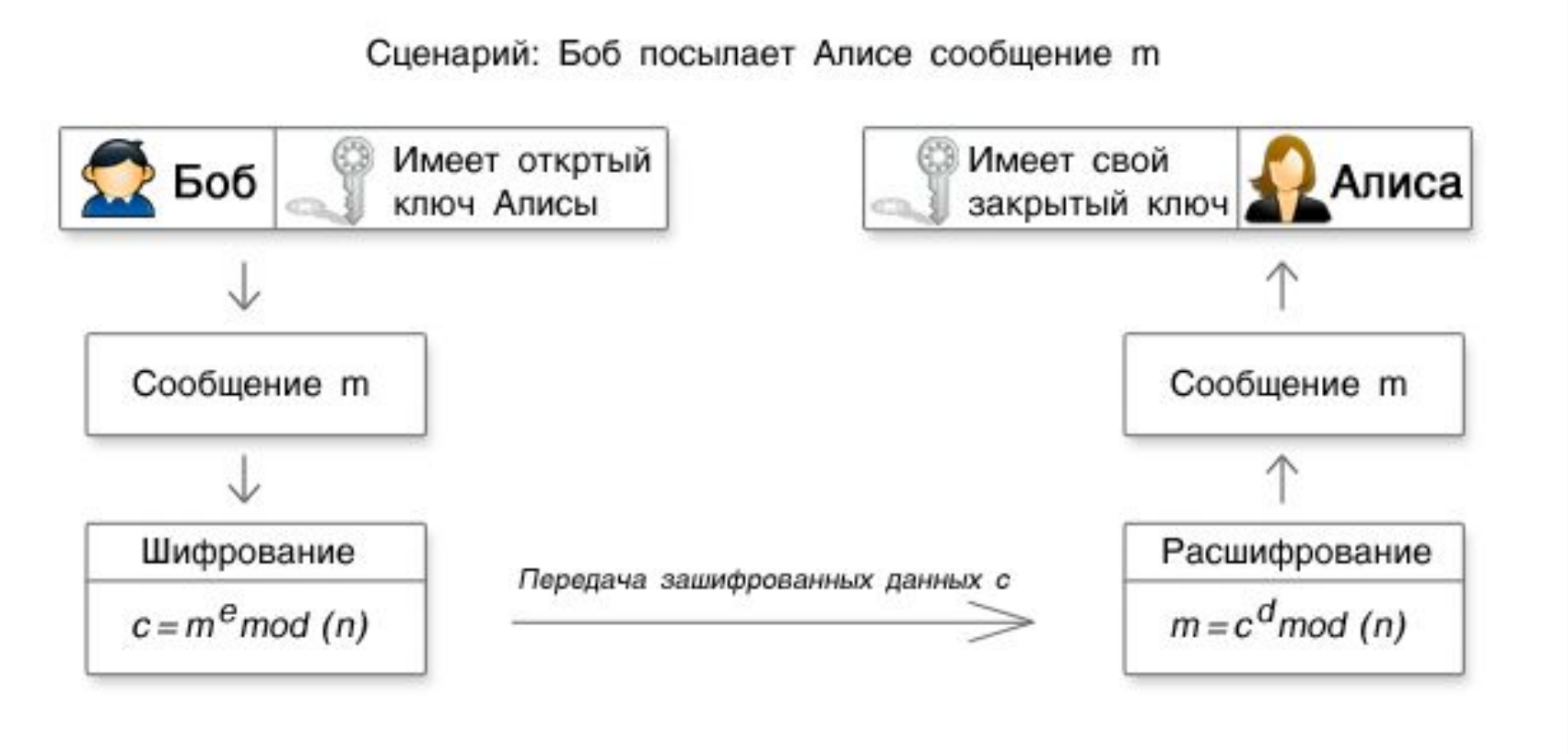
Выражение (((a — b)(q^{-1} mod p)) mod p), которое умножается на q — это некоторое целое число K, но при выполнении операций по модулю q любое кратное q можно отбросить.

x mod p = ((((a - b)(q^{-1} mod p)) mod p)* q + b) mod p = (((a – b) q^{-1})* q + b) mod p = ((a - b)(q^{-1} *q) + b) mod p =((a — b) + b) mod p = amod p=a.

Избавляемся от нескольких лишних операторов по mod p, изменяем порядок умножения и замечаем, что (q^{-1} *q) = l(mod p).

Таким образом формула Гарнера дает результат x, который лежит в нужном диапазоне и для которого (a, b)=(xmodp ,xmodq). Поскольку мы уже знаем, что такое решение может быть только одно, результат формулы Гарнера полностью решает китайскую теорему остатках.

RSA. Шифрование.



Генерация ключей

- Выбираются два разных случайных простых числа p и q (порядка 1024 бит каждое) и вычисляется n=pq;
- Вычисляется число t = НОК(p-l,q-1);
- Выбирается целое число e взаимно простое с t и вычисляется число d такое, что ed=1(mod t);
- Пара **(n, e)** образует открытый ключ.
- Значения **(p, q, t, d)** образуют закрытый ключ и сохраняются в секрете человеком, который сгенерировал ключ RSA.

Шифрование. Расшифрование.

Чтобы зашифровать сообщение m, отправитель генерирует шифрованный текст $c:=m^e(\mathrm{mod}\ n)$.

Чтобы расшифровать шифрованный текст c, получатель вычисляет $c^d(\mathrm{mod}\ n)$.

Это эквивалентно значению

$(m^e)^d(\mathrm{mod} n)=m^{ed}(\mathrm{mod} n)=m^{kt+1}(\mathrm{mod} n)=(m^t)^k*m(\mathrm{mod})=$

$=m(\mathrm{mod}\ n)$,

где k - некое целое число, которое всегда существует.

Таким образом, получатель может расшифровать шифрованный текст m^e, чтобы получить открытый текст m.

Пример. Генерация ключей.

Выберем p=3 и q=11.

Определим n=3*11=33.

Найдем (p-1)*(q-1)=20. Следовательно в качестве e выберем любое число, которое является взаимно простым с числом 20, например e=3.

Выберем число d. В качестве такого числа может быть взято любое число, для которого выполняется равенство

(d*3)mod 20=1, например d=7.

- Пара **(33, 3)** образует открытый ключ.
- Значения **(3, 11, 20, 7)** образуют закрытый ключ

Пример. Шифрование.

Т.к. в качестве n было взято число 33, можем шифровать буквы русского алфавита производя вычисления по модулю 33.

Зашифруем слово «бал», переведем буквы в соответствующие числовые значения (2,1,13)

C1=(2^3)mod33=8mod33=8;

C2=(1^3)mod33=1mod33=1;

C3=(13^3)mod33=2197mod33=19.

Зашифрованное слово (8,1,12) или «жас»

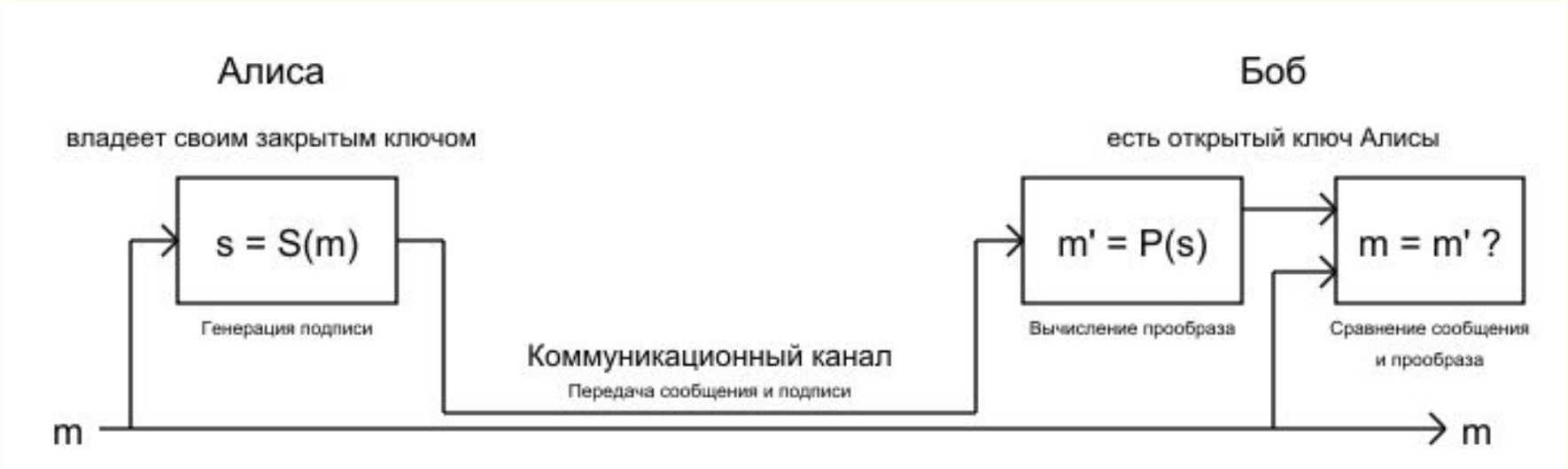
Пример. Расшифрование.

Зашифрованное слово (8,1,19) или «жас»

M1=(8^7)mod33=2097152mod33=2,
M2=(1^7)mod33=1mod33=1,
M3=(19^7)mod33=893871739mod33=13.

Расшифрованное слово (2,1,13) или «бал»

RSA. Электронная подпись.



RSA. Создание электронной подписи.

Для сообщения m создается цифровая подпись s на основании секретного ключа пользователя A

$s=S_A(m)=m^d(\mathrm{mod} n)$;

Пара (m,s) передается пользователю B.

RSA. Проверка электронной подписи.

- Применить открытый ключ пользователя А к паре (m,s)
- $m' = P_A(s) = s^e (\mathrm{mod} n)$;
- Проверить подлинность подписи сравнив m и m‘.
- Если m=m‘ – верификация проходит успешно.

Проблемы использования RSA

- **Четкая математическая структура**

(если пользователь А подпишет цифровой подписью два сообщения – m1 и m2, пользователь Б сможет вычислить, какой должна быть подпись пользователя А для сообщения m3:= m1m2(modn);

- **Шифрование сообщения малого (<n) размера**

(если при возведении в степень е символ сообщения принимает значение <n, то для его обратного преобразования достаточно выполнить извлечение корня степени е, вычисления по модулю не производится, что облегчает задачу злоумышленника);

- **Необходимость применять в качестве ключей шифрования и ЭП не пересекающиеся множества;**
- **Атаки основанные на методах решения полиномиальных уравнений по модулю n.**

Задание по лекции

1. Записать открытый и закрытый ключи алгоритма RSA, если

- p=2;
- q=13;
- e=5.

2. Зашифровать (и расшифровать) с помощью алгоритма RSA слово «cake» используя английский алфавит и ключи из п.1.