

Что такое квантор

Будем рассуждать логически

История появления

Хотя кванторно-логические конструкции широко используются как в научной, так и в обыденной речи, их формализация произошла только в 1879 г., в книге Фреге «Исчисление понятий». Обозначения Фреге имели вид громоздких графических конструкций и не были приняты. Впоследствии было предложено множество более удачных символов, но общепринятыми стали обозначения для квантора существования, предложенное Чарльзом Пирсом в 1885 г., и для квантора общности, образованное Герхардом Генценом в 1935 г. по аналогии с символом квантора существования (перевернутые первые буквы англ. exists, all — существует, все). Термины «квантор», «квантификация» также предложил Пирс.

Кванторы

1. квантор общности \forall
 2. квантор существования \exists
- $\forall x(a)$ - формула a истинна для всех значений переменной x
 - $\exists x(a)$ - существует значение переменной x , для которого истинна формула a

Кванторы

- В математике слова «все», «некоторые» и их синонимы называются кванторами. Слово «квантор» латинского происхождения и означает «сколько», т. е. квантор показывает, о скольких (всех или некоторых) объектах говорится в том или ином высказывании.
- Высказывания с кванторами — это такие высказывания, в которых присутствуют слова: «любой», «всякий», «все», «существует», «найдутся», «для некоторых».

Кванторы:



- Any / All

- Любой / Все

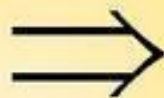


- Exists

- Существует



- такой, что



- следовательно





Кванторы

Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на M .

- ◆ **Высказывание**

«для всех $x \in M$, $P(x)$ истинно» обозначается
 $(\forall x)P(x)$.

Знак \forall называется **квантором всеобщности**.

- ◆ **Высказывание**

«существует такой $x \in M$, что $P(x)$ истинно»
обозначается

$(\exists x)P(x)$,

где знак \exists называется **квантором существования**.

Предикаты

$$“x > 3”$$

Предложение “ x больше трех” состоит из двух частей:

- первая часть: **переменная x** , – подлежащее предложения;
- вторая часть: “больше трех”, – **предикат** – объясняет, каким свойством обладает подлежащее предложения.

Обозначим предложение “ x больше трех” через $P(x)$, где P обозначает предикат, а x – переменную.

КВАНТОРЫ

Одним из способов получения высказываний из предикатов является навешивание кванторов. Для этого перед предикатом пишут кванторы — слова, описывающие его множество истинности.



Квантор
всеобщности



Квантор
существования



I. КВАНТОР ВСЕОБЩНОСТИ

Обозначается: $\forall x P(x)$

Читается: для всех, для любого, для каждого x
выполняется условие $P(x)$

все x из U обладают свойством $P(x)$

Например: 1) $P(x)$ – «Река x имеет исток»

$\forall x P(x)$ – «Любая река имеет исток»

2) $P(x)$ – « x – простое число»

$\forall x P(x)$ – «Все натуральные числа
простые»



КВАНТОР ВСЕОБЩНОСТИ « \forall »

Квантор всеобщности — это символ, обозначающий всеобщность и читается как «для любого» или «для всех».

Из предиката {Ученик X Лицея №1 сдал ЕГЭ по математике на 100 баллов} получаются высказывание:

{Все ученики Лицея №1 сдали ЕГЭ по математике на 100 баллов}



Кванторы

$$\forall xP(x)$$

Символ \forall называется **универсальным квантором**.

Мы читаем $\forall xP(x)$ так:

- "для всех x $P(x)$ ";
- "для каждого x $P(x)$ ".

Элемент x , для которого высказывание $P(x)$ ложно, называется **контрпримером** для высказывания $\forall xP(x)$.

Квантор существования

- Слова «существует», «найдется», «для некоторых», «некоторые», «найдется», «существует», «хотя бы один» и др. называются кванторами существования.

Обозначается символом \exists .

- В математике слово «некоторые» означает «по меньшей мере один, но, может быть, и все».

$(\exists x \in X) A(x)$ можно читать:

- а) существует такое x из множества X , что истинно $A(x)$;
- б) хотя бы один элемент x из множества X обладает свойством A .

КВАНТОР СУЩЕСТВОВАНИЯ «Э»

Квантор существования — это символ, обозначающий единственное существование и читается как «существует» или «для некоторого».



*Из предиката {Ученик X Лицея №1 сдал
ЕГЭ по математике на 100 баллов}
получаются высказывание:*

*{Найдется такой ученик Лицея №1,
который сдаст ЕГЭ по математике на
100 баллов}*



II. КВАНТОР СУЩЕСТВОВАНИЯ

Обозначается: $\exists x P(x)$

Читается: существует, найдется некоторое, какое-то x ,
для которого выполняется $P(x)$

Например: 1) $P(x)$ – «Дверь x закрыта»

$\exists x P(x)$ – «Существует дверь, которая закрыта»

2) $P(x)$ – « x – простое число»

$\exists x P(x)$ – «Существует простое натуральное
число»



КВАНТОРЫ: ПРИМЕРЫ

Пусть на множестве \mathbf{N} натуральных чисел задан предикат $P(x)$: «Число x кратно 5». Используя кванторы, из данного предиката можно получить высказывания: $\forall x \in \mathbf{N} P(x)$ – «Все натуральные числа кратны 5»; $\exists x \in \mathbf{N} P(x)$ – «Существует натуральное число, кратное 5». Очевидно, первое из этих высказываний ложно, а второе истинно.





ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ КВАНТОРЫ

➤ Выражение «для всякого x » в логике называется *квантором всеобщности* по переменной x

КВАНТОР ВСЕОБЩНОСТИ \forall (все, всякий, каждый).

Пример: Все следователи – юристы. Все кошки являются рыбами.

ИСТИННОСТЬ ВЫСКАЗЫВАНИЯ С КВАНТОРОМ ОБЩНОСТИ УСТАНОВЛИВАЕТСЯ ПУТЕМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА, А ПОКАЗАТЬ ЛОЖНОСТЬ МОЖНО, ПРИВЕДЯ КОНТРИМЕР.

➤ Выражение «существует x такое, что ...» в логике называется *квантором существования* по переменной x

КВАНТОР СУЩЕСТВОВАНИЯ \exists (некоторые, существуют).

Пример: Некоторые следователи имеют высшее образование. Некоторые студенты – отличники.

ИСТИННОСТЬ ВЫСКАЗЫВАНИЯ С КВАНТОРОМ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСТАНОВЛИВАЕТСЯ ПРИ ПОМОЩИ КОНТРЕКТНОГО ПРИМЕРА, А ЧТОБЫ УБЕДИТЬСЯ В ЛОЖНОСТИ НЕОБХОДИМО ПРОВЕСТИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

