

# Что такое квантор

*Будем рассуждать логически*

# История появления

Хотя кванторно-логические конструкции широко используются как в научной, так и в обыденной речи, их формализация произошла только в 1879 г., в книге Фреге «Исчисление понятий». Обозначения Фреге имели вид громоздких графических конструкций и не были приняты. Впоследствии было предложено множество более удачных символов, но общепринятыми стали обозначения для квантора существования, предложенное Чарльзом Пирсом в 1885 г., и для квантора общности, образованное Герхардом Генценом в 1935 г. по аналогии с символом квантора существования (перевернутые первые буквы англ. exists, all — существует, все). Термины «квантор», «квантификация» также предложил Пирс.

# Кванторы

1. квантор общности  $\forall$
  2. квантор существования  $\exists$
- $\forall x(a)$  - формула  $a$  истинна для всех значений переменной  $x$
  - $\exists x(a)$  - существует значение переменной  $x$ , для которого истинна формула  $a$

# Кванторы

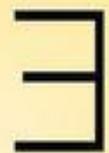
- В математике слова «все», «некоторые» и их синонимы называются кванторами. Слово «квантор» латинского происхождения и означает «сколько», т. е. квантор показывает, о скольких (всех или некоторых) объектах говорится в том или ином высказывании.
- Высказывания с кванторами — это такие высказывания, в которых присутствуют слова: «любой», «всякий», «все», «существует», «найдутся», «для некоторых».

## Кванторы:



- Any / All

- Любой / Все

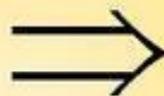


- Exists

- Существует



- такой, что



- следовательно





# Кванторы

Пусть  $P(x)$  – предикат, определенный на  $M$ .

- ◆ **Высказывание**

«для всех  $x \in M$ ,  $P(x)$  истинно» обозначается  
 $(\forall x)P(x)$ .

Знак  $\forall$  называется **квантором всеобщности**.

- ◆ **Высказывание**

«существует такой  $x \in M$ , что  $P(x)$  истинно»  
обозначается

$(\exists x)P(x)$ ,

где знак  $\exists$  называется **квантором существования**.

# Предикаты

$$"x > 3"$$

Предложение “ $x$  больше трех” состоит из двух частей:

- первая часть: **переменная  $x$** , – подлежащее предложения;
- вторая часть: “больше трех”, – **предикат** – объясняет, каким свойством обладает подлежащее предложения.

Обозначим предложение “ $x$  больше трех” через  $P(x)$ , где  $P$  обозначает предикат, а  $x$  – переменную.

# КВАНТОРЫ

Одним из способов получения высказываний из предикатов является навешивание кванторов. Для этого перед предикатом пишут кванторы — слова, описывающие его множество истинности.



Квантор  
всеобщности



Квантор  
существования



# I. КВАНТОР ВСЕОБЩНОСТИ

Обозначается:  $\forall x P(x)$

Читается: для всех, для любого, для каждого  $x$   
выполняется условие  $P(x)$

все  $x$  из  $U$  обладают свойством  $P(x)$

Например: 1)  $P(x)$  – «Река  $x$  имеет исток»

$\forall x P(x)$  – «Любая река имеет исток»

2)  $P(x)$  – « $x$  – простое число»

$\forall x P(x)$  – «Все натуральные числа  
простые»



# КВАНТОР ВСЕОБЩНОСТИ «∀»

Квантор всеобщности — это символ, обозначающий всеобщность и читается как «для любого» или «для всех».

Из предиката {Ученик  $X$  Лицея №1 сдал ЕГЭ по математике на 100 баллов} получаются высказывание:

{Все ученики Лицея №1 сдали ЕГЭ по математике на 100 баллов}



# Кванторы

$$\forall xP(x)$$

Символ  $\forall$  называется **универсальным квантором**.

Мы читаем  $\forall xP(x)$  так:

- "для всех  $x$   $P(x)$ ";
- "для каждого  $x$   $P(x)$ ".

Элемент  $x$ , для которого высказывание  $P(x)$  ложно, называется **контрпримером** для высказывания  $\forall xP(x)$ .

# Квантор существования

- Слова «существует», «найдется», «для некоторых», «некоторые», «найдется», «существует», «хотя бы один» и др. называются кванторами существования.

Обозначается символом  $\exists$ .

- В математике слово «некоторые» означает «по меньшей мере один, но, может быть, и все».

$(\exists x \in X) A(x)$  можно читать:

- а) существует такое  $x$  из множества  $X$ , что истинно  $A(x)$ ;
- б) хотя бы один элемент  $x$  из множества  $X$  обладает свойством  $A$ .

## КВАНТОР СУЩЕСТВОВАНИЯ «Э»

Квантор существования — это символ, обозначающий единственное существование и читается как «существует» или «для некоторого».



*Из предиката {Ученик X Лицея №1 сдал  
ЕГЭ по математике на 100 баллов}  
получаются высказывание:*

*{Найдется такой ученик Лицея №1,  
который сдаст ЕГЭ по математике на  
100 баллов}*



# II. КВАНТОР СУЩЕСТВОВАНИЯ

Обозначается:  $\exists x P(x)$

Читается: существует, найдется некоторое, какое-то  $x$ ,  
для которого выполняется  $P(x)$

Например: 1)  $P(x)$  – «Дверь  $x$  закрыта»

$\exists x P(x)$  – «Существует дверь, которая закрыта»

2)  $P(x)$  – « $x$  – простое число»

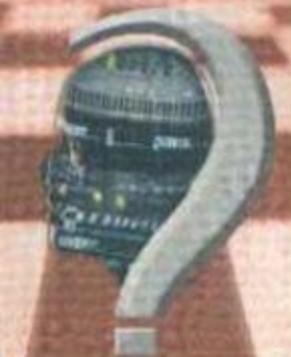
$\exists x P(x)$  – «Существует простое натуральное  
число»



## *КВАНТОРЫ: ПРИМЕРЫ*

Пусть на множестве  $\mathbf{N}$  натуральных чисел задан предикат  $P(x)$ : «Число  $x$  кратно 5». Используя кванторы, из данного предиката можно получить высказывания:  $\forall x \in \mathbf{N} P(x)$  – «Все натуральные числа кратны 5»;  $\exists x \in \mathbf{N} P(x)$  – «Существует натуральное число, кратное 5». Очевидно, первое из этих высказываний ложно, а второе истинно.





## ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ КВАНТОРЫ

➤ Выражение «для всякого  $x$ » в логике называется *квантором всеобщности* по переменной  $x$

КВАНТОР ВСЕОБЩНОСТИ  $\forall$  (все, всякий, каждый).

*Пример: Все следователи – юристы. Все кошки являются рыбами.*

ИСТИННОСТЬ ВЫСКАЗЫВАНИЯ С КВАНТОРОМ ОБЩНОСТИ УСТАНОВЛИВАЕТСЯ ПУТЕМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА, А ПОКАЗАТЬ ЛОЖНОСТЬ МОЖНО, ПРИВЕДЯ КОНТРИМЕР.

➤ Выражение «существует  $x$  такое, что ...» в логике называется *квантором существования* по переменной  $x$

КВАНТОР СУЩЕСТВОВАНИЯ  $\exists$  (некоторые, существуют).

*Пример: Некоторые следователи имеют высшее образование. Некоторые студенты – отличники.*

ИСТИННОСТЬ ВЫСКАЗЫВАНИЯ С КВАНТОРОМ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСТАНОВЛИВАЕТСЯ ПРИ ПОМОЩИ КОНТРЕКТНОГО ПРИМЕРА, А ЧТОБЫ УБЕДИТЬСЯ В ЛОЖНОСТИ НЕОБХОДИМО ПРОВЕСТИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

