Что такое квантор

Будем рассуждать логически

История появления

Хотя кванторно-логические конструкции широко используются как в научной, так и в обыденной речи, их формализация произошла только в 1879 г., в книге Фреге «Исчисление понятий». Обозначения Фреге имели вид громоздких графических конструкций и не были приняты. Впоследствии было предложено множество более удачных символов, но общепринятыми стали обозначения для квантора существования, предложенное Чарльзом Пирсом в 1885 г., и для квантора общности, образованное Герхардом Генценом в 1935 г. по аналогии с символом квантора существования (перевёрнутые первые буквы англ. exists, all — существует, все). Термины «квантор», «квантификация» также предложил Пирс.

Кванторы

1. квантор общности $\forall$
2. квантор существования $\exists$

- $\forall\ x(a)$ - формула a истинна для всех значений переменной x
- $\exists\ x(a)$ - существует значение переменной x, для которого истинна формула a

MyShared

Кванторы

- В математике слова «все», «некоторые» и их синонимы называются кванторами. Слово «квантор» латинского происхождения и означает «сколько», т. е. квантор показывает, о скольких (всех или некоторых) объектах говорится в том или ином высказывании.
- Высказывания с кванторами —это такие высказывания, в которых присутствуют слова: «любой», «всякий», «все», «существует», «найдутся», «для некоторых».

Кванторы:

$\forall$ - Any / All - Любой / Все

$\exists$ - Exists - Существует

: - такой, что

$\Rightarrow$ - следовательно

MyShared

Кванторы

Пусть P(x) – предикат, определенный на M.

- Высказывание

«для всех $x \in M$, $P(x)$ истинно» обозначается

$$(\forall x)P(x).$$

Знак $\forall$ называется ***квантором всеобщности.***

- Высказывание

«существует такой $x \in M$, что $P(x)$ истинно» обозначается

$$(\exists x)P(x),$$

где знак $\exists$ называется ***квантором существования***.

MyShared

Предикаты

$$“x > 3”$$

Предложение “x больше трех” состоит из двух частей:

- первая часть: **переменная x**, – подлежащее предложения;
- вторая часть: “больше трех”, – **предикат** – объясняет, каким свойством обладает подлежащее предложения.

Обозначим предложение “x больше трех” через $P(x)$, где P обозначает предикат, а x – переменную.

КВАНТОРЫ

Одним из способов получения высказываний из предикатов является навешивание кванторов. Для этого перед предикатом пишут кванторы – слова, описывающие его множество истинности.

$\forall$

Квантор всеобщности

$\exists$

Квантор существования

I. КВАНТОР ВСЕОБЩНОСТИ

Обозначается: $\forall x\, P(x)$

Читается: для всех, для любого, для каждого ***x*** выполняется условие P(x)

все ***x*** из U обладают свойством P(x)

Например: 1) P(x) – «Река ***x*** имеет исток»

$\forall x\, P(x)$ – «Любая река имеет исток»

2) P(x) – «x – простое число»

$\forall x\, P(x)$ – «Все натуральные числа простые»

КВАНТОР ВСЕОБЩНОСТИ «∀»

Квантор всеобщности — это символ, обозначающий всеобщность и читается как «для любого» или «для всех».

Из предиката {Ученик Х Лицея №1 сдал ЕГЭ по математике на 100 баллов } получаются высказывание:

{Все ученики Лицея №1 сдали ЕГЭ по математике на 100 баллов}

Кванторы

$$\forall x P(x)$$

Символ $\forall$ называется **универсальным квантором**.

Мы читаем $\forall x P(x)$ так:

- ”для всех x $P(x)$“;
- ”для каждого x $P(x)$“.

Элемент x, для которого высказывание $P(x)$ ложно, называется **контрпримером** для высказывания $\forall x P(x)$.

Квантор существования

- Слова «существует», «найдется», «для некоторых», «некоторые», «найдется», «существует», «хотя бы один» и др. называются кванторами существования.

Обозначается символом $\exists$.

- В математике слово «некоторые» означает «по меньшей мере один, но, может быть, и все».

$(\exists x \in X)\ A(x)$ можно читать:

а) существует такое x из множества X, что истинно $A(x)$;

б) хотя бы один элемент x из множества X обладает свойством A.

КВАНТОР СУЩЕСТВОВАНИЯ « ∃»

Квантор существования — это символ, обозначающий единственное существование и читается как «существует» или «для некоторого».

Из предиката {Ученик Х Лицея №1 сдал ЕГЭ по математике на 100 баллов } получаются высказывание:

{Найдется такой ученик Лицея №1, который сдаст ЕГЭ по математике на 100 баллов}

II. КВАНТОР СУЩЕСТВОВАНИЯ

Обозначается: $\exists x\ P(x)$

Читается: существует, найдется некоторое, какое-то ***x***, для которого выполняется P(x)

Например: 1) P(x) – «Дверь ***x*** закрыта»

$\exists x\ P(x)$ – «Существует дверь, которая закрыта»

2) P(x) – «x – простое число»

$\exists x\ P(x)$ – «Существует простое натуральное число»

Кванторы: примеры

Пусть на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел задан предикат $P(x)$: «Число x кратно 5». Используя кванторы, из данного предиката можно получить высказывания: $\forall x \in \mathbf{N}\ P(x)$ – «Все натуральные числа кратны 5»; $\exists x \in \mathbf{N}\ P(x)$ – «Существует натуральное число, кратное 5». Очевидно, первое из этих высказываний ложно, а второе истинно.

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

КВАНТОРЫ

➢Выражение «для всякого x» в логике называется *квантором всеобщности* по переменной x

КВАНТОР ВСЕОБЩНОСТИ ∀ (все, всякий, каждый).

Пример: Все следователи – юристы. Все кошки являются рыбами.

ИСТИННОСТЬ ВЫСКАЗЫВАНИЯ С КВАНТОРОМ ОБЩНОСТИ УСТАНАВЛИВАЕТСЯ ПУТЕМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА, А ПОКАЗАТЬ ЛОЖНОСТЬ МОЖНО, ПРИВЕДЯ КОНТРПРИМЕР.

➢Выражение «существует x такое, что …» в логике называется *квантором существования* по переменной x

КВАНТОР СУЩЕСТВОВАНИЯ ∃(некоторые, существуют).

Пример: Некоторые следователи имеют высшее образование. Некоторые студенты – отличники.

ИСТИННОСТЬ ВЫСКАЗЫВАНИЯ С КВАНТОРОМ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСТАНАВЛИВАЕТСЯ ПРИ ПОМОЩИ КОНТРЕКТНОГО ПРИМЕРА, А ЧТОБЫ УБЕДИТЬСЯ В ЛОЖНОСТИ НЕОБХОДИМО ПРОВЕСТИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

MyShared