Численные решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$y'x - cosx = 14x^2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Дифференциальное уравнение – уравнение, связывающее независимые переменные их функции, и производную этих функций.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$y''x^2 - 4xy' + 3y = 0$$

- Обыкновенными дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функций $y = y(x)$.

- Их можно записать в виде

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

где x — независимая переменная.

- **Решением** дифференциального уравнения (1) называется всякая n раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая после ее подстановки в уравнение превращает его в тождество.

- **Общее решение** обыкновенного дифференциального уравнения *n*-го порядка (1) содержит *n* произвольных постоянных C_1, C_2, ... , C_n:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

- **Частное решение** дифференциального уравнения получается из общего, если произвольным постоянным придать определенные значения.

- задача Коши (дополнительные условия задаются в одной точке)

- краевая задача (дополнительные условия задаются в более чем одной точке)

- Пример:

- Задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \cos t, \quad t > 0, \quad x(0) = 1;$$

$$y'' = \frac{y'}{x} + x^2, \quad x > 1, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0.$$

Краевые задачи

$$y'' + 2y' - y = \sin x, \ 0 \le x \le 1, \ y(0) = 1, \ y(1) = 0;$$

$$y''' = x + yy', \ 1 \le x \le 3, \ y(1) = 0, \ y'(1) = 1, \ y'(3) = 2.$$

- Решение задачи Коши.

- сущность **метода конечных разностей**. состоит в следующем:

- 1. область непрерывного изменения аргумента (например, отрезок) заменяется дискретным множеством точек - **узлами**. Эти узлы составляют **разностную сетку**.

- 2. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке (**сеточной функцией**).

- 3. Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением относительно сеточной функции.

- Такая замена дифференциального уравнения разностным называется его **аппроксимацией на сетке** (или разностной аппроксимацией).

- Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки.

Методы Рунге-Кутта

Методы Рунге-Кутта обладают следующими отличительными свойствами:

- являются одноступенчатыми: чтобы найти значение функции в точке y_{i+1} нужна информация только о предыдущей точке (y_i, x_i);
- согласуются с рядом Тейлора вплоть до членов порядка h^k, где степень k определяет порядок метода;
- не требуют вычисления производных от $f(x,y)$, а требуют вычисления самой функции.

- Наивысший порядок *n* входящей в уравнение (1) производной называется **порядком** дифференциального уравнения.

Метод Эйлера (метод Рунге-Кутта первого порядка)

Простейшим из численных методов решения дифференциальных уравнений является ***метод Эйлера***. Это один из самых старых и широко известных и применяемых на в практике методов.

Метод Эйлера

Пусть требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0,$$

т.е. необходимо решить задачу Коши.

Метод Эйлера

В окрестности точки x_0 функцию $y(x)$ разложим в ряд Тейлора

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} y''(x_0) + \dots \qquad (1)$$

который можно применить для приближенного определения искомой функции $y(x)$. В точке x_0+h при малых значениях h можно ограничиться двумя членами ряда, тогда,

$$y(x) = y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)\Delta x + 0(h^2), \qquad (2)$$

где $O(h^2)$ – бесконечно малая величина порядка h^2.

Метод Эйлера

Заменим производную $y'(x_0)$, входящую в формулу (1) , на правую часть уравнения (2)

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + hf(x_0, y_0),$$

Приближенное решение в точке $x_1 = x_0 + h$ можно вновь рассматривать как начальное условие и по формуле найти значение искомой функции в следующей точке $x_2 = x_1 + h$. В результате получен простейший алгоритм решения задачи Коши, который называется ***методом Эйлера***.

Метод Эйлера

Метод Эйлера можно представить в виде последовательного применения формул:

для точки

$x_1 = x_0 + h,$ $\quad y_1 = y_0 + hy_0' = y_0 + hf(x_0, y_0),$

$x_2 = x_1 + h,$ $\quad y_2 = y_1 + hy_1' = y_1 + hf(x_1, y_1),$

. . . .

$x_{i+1} = x_i + h,$ $\quad y_{i+1} = y_i + hy_i' = y_i + hf(x_i, y_i).$

Метод Эйлера

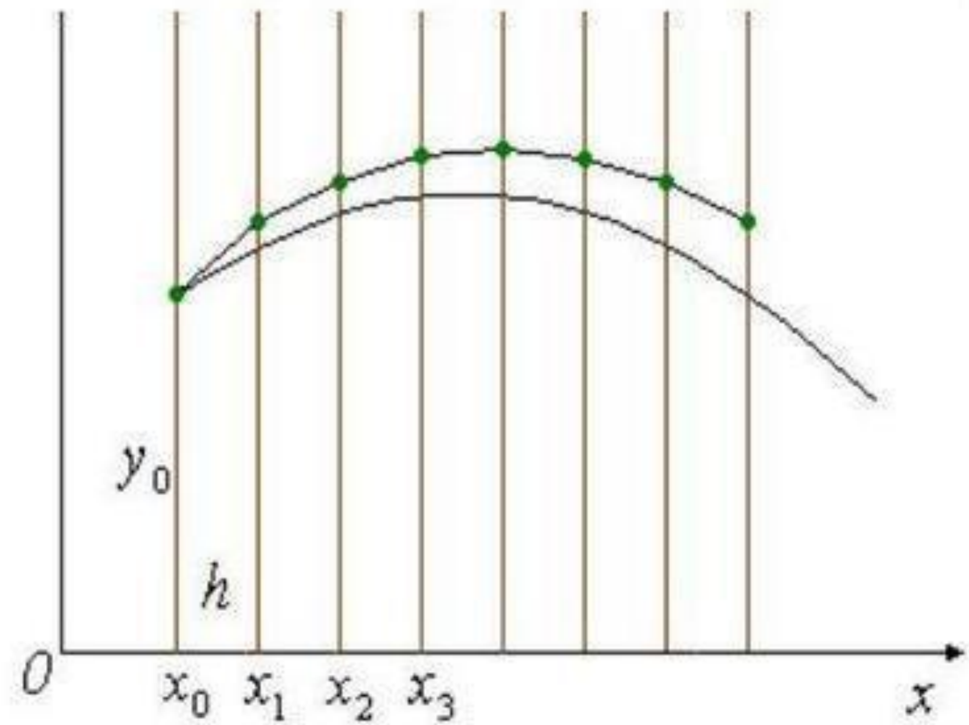
Таким образом, формула Эйлера в общем случае имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad x_{i+1} = x_i + h$$

Метод Эйлера

Геометрически искомая функция $y(x)$ заменяется ломаной линией, представляющей собой отрезки касательных к этой функции в узлах

$x_0, x_1, \ldots x_n$.



Многошаговые методы

- **Многошаговые методы** -основаны на том, что для вычисления значения y_{i+1} используются результаты не одного, а k предыдущих шагов, т. е. значения y_{i-k+1}, $y_{i-\mathrm{k}+2}$, …, y_i .

- Многошаговые методы могут быть построены следующим образом.

- Запишем исходное уравнение

$$Y' = f(x, Y) \quad (1)$$

в виде

$$dY(x) = f(x, Y)dx \quad (2)$$

- Проинтегрируем обе части этого уравнения по x на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$

- Интеграл от левой части легко вычисляется:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dY(x) = Y(x_{i+1}) - Y(x_i) \approx y_{i+1} - y_i \qquad (3)$$

- Для вычисления интеграла от правой части уравнения (2) строится сначала интерполяционный многочлен P_{k-1} степени k -1 для аппроксимации функции $f(x, Y)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ по значениям

$$f(x_{i-k+1}, y_{i-k+1}), f(x_{i-k+2}, y_{i-k+2}), \ldots, f(x_i, y_i).$$

- Таким образом,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, Y)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x)dx. \qquad (4)$$

- Приравнивая выражения, полученные в (3) и (4), можно получить формулу для определения неизвестного значения сеточной функции y_{i+1} в узле x_{i+1}:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x)dx.$$

- На основе предыдущей формулы можно строить различные многошаговые методы любого порядка точности.
- Порядок точности зависит от степени интерполяционного многочлена $P_{k-i}(x)$, для построения которого используются значения сеточной функции y_i, y_{i-1} , …, y_{i-k+1}, вычисленные на k предыдущих шагах.

- **Методы Адамса.**
- 1. метод Адамса, имеющий четвертый порядок точности и использующий на каждом шаге результаты предыдущих четырех.

- Пусть найдены значения $y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$ в четырех последовательных узлах ($k = 4$).

- При этом имеются также вычисленные ранее значения правой части $f_{i-3}, f_{i-2}, f_{i-1}, f_i$, где

$$f_l = f(x_l, y_l)$$

- В качестве интерполяционного многочлена $P_3(x)$ можно взять многочлен Ньютона.

- В случае постоянного шага h конечные разности для правой части в узле x_i имеют вид

$$\Delta f_i = f_i - f_{i-1},$$

$$\Delta^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2},$$

$$\Delta^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}.$$

- Тогда разностную схему четвертого порядка метода Адамса можно записать после необходимых преобразований в виде

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}\Delta f_i + \frac{5h^3}{12}\Delta^2 f_i + \frac{3h^4}{8}\Delta^3 f_i.$$

- Сравнивая метод Адамса с методом Рунге-Кутта той же точности, можно отметить его экономичность, поскольку он требует вычисления лишь одного значения правой части на каждом шаге (в методе Рунге-Кутта — четырех).

- **Но** метод Адамса неудобен тем, что невозможно начать счет по одному лишь известному значению y_0.

- Расчет может быть начат только с узла x_3, а не x_0.

- Значения y_1 , y_2 ,y_3 нужно получить каким-либо другим способом, что существенно усложняет алгоритм.

- Кроме того, метод Адамса не позволяет (без усложнения формул) изменить шаг h в процессе счета.

- 2. **Метод прогноза и коррекции.**
- Суть метода:
- На каждом шаге вводятся два этапа, использующих многошаговые методы:
- с помощью явного метода по известным значениям функции в предыдущих узлах находится начальное приближение $y_{i+1} = y_{i+1}^{(0)}$ в новом узле;
- используя неявный метод, в результате итераций находятся приближения $y_{i+1}^{(1)}, y_{i+1}^{(2)}, \ldots$

- разностные соотношения для k-ого шага метода Адамса имеют вид:

$$y_k^{пред} = y_{k-1} + \frac{h}{24}(55y'_{k-1} - 59y'_{k-2} + 37y'_{k-3} - 9y'_{k-4}),$$

$$y_k^{кор} = y_{k-1} + \frac{h}{24}(9(y'_{k-1})^{пред} + 19y'_{k-1} - 5y'_{k-2} + y'_{k-3}),$$

$$(y'_k)^{пред} = f(x_k, y_k^{пред}).$$

- Точность вычислений оценивается по формуле:

$$\left|y_k^{кор} - y(x_k)\right| \approx \frac{1}{4}\left|y_k^{кор} - y_k^{пред}\right|.$$

- **Метод Милна.**

- Для предсказания используем первую формулу Милна

$$y_k^{пред} = y_{k-4} + \frac{4h}{3}(2y'_{k-3} - y'_{k-2} + 2y'_{k-1}),$$

- Уточнение(коррекция) производится по второй формуле Милна

$$y_k^{кор} = y_{k-2} + \frac{h}{3}\left(y'_{k-2} + 4y'_{k-1} + (y'_k)^{пред}\right).$$

$$(y'_k)^{пред} = f(x_k, y_k^{пред}).$$

- Для оценки точности вычислений используется формула:

$$\left| y_k^{кор} - y(x_k) \right| \approx \frac{1}{29} \left| y_k^{кор} - y_k^{пред} \right|.$$