Сложные высказывания

Тема 3

Сложное высказывание

Объединение нескольких простых высказываний в одно.

ПРИМЕР

E = Идет налево – песнь заводит, направо – сказку говорит. → $E = (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow D)$

Формализовать условие задачи – определить форму сложного высказывания.

Условие задачи в виде текста. → Выделить простые высказывания. → Выделить связи между высказываниями → Записать на языке формул

ПРИМЕР

Вчера было пасмурно, **а** сегодня светит солнце. →

A = Вчера было пасмурно

B = Сегодня светит солнце

→ $E = A \,\&\, B$

Приоритет логических операций:

1. Инверсия;
2. Конъюнкция;
3. Дизъюнкция;
4. Импликация и эквивалентность.

Операции одного приоритета выполняются слева направо.

ПРИМЕР

$$A \overset{3}{\vee} B \overset{4}{\rightarrow} C \overset{2}{\&} D \overset{5}{\leftrightarrow} \overset{1}{\neg} A$$

$$A \overset{4}{\vee} (B \overset{2}{\rightarrow} C) \overset{3}{\&} D \overset{5}{\leftrightarrow} \overset{1}{\neg} A$$

Скобки используют для изменения порядка выполнения действий.

Построение таблицы истинности сложного высказывания

1. **Вычислить количество строк**.
   $i = 2^n + 2$ строки заголовка
   (n – количество составляющих простых высказываний);
2. **Вычислить количество столбцов.**
   $j = n + k$
   (k - количество логических операций, входящих в высказывание);
3. **Начертить таблицу и заполнить заголовок.**
   Первая строка заголовка – номера столбцов;
   Вторая строка заголовка – промежуточные формулы;
4. **Заполнить столбцы**:
   Для первых n столбцов заполнение соответствует двоичной записи чисел от 0 до $2^n - 1$.
   Остальные столбцы заполняются в соответствии с таблицами истинности соответствующих логических операций.

Задание:

Постройте таблицы истинности сложных высказываний и определите, являются ли эти высказывания тождественно истинными:

1. $A \& B \to A$
2. $A \& B \to B$
3. $A \to (B \vee A)$
4. $A \to (B \to A)$
5. $A \to (B \to A \& B)$
6. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \& C))$
7. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
8. $(A \to B) \to (B \to C \to A \to (A \to C))$
9. $(A \to (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
10. $\neg(A \to B) \to (A \to \neg B \to \neg A)$

Тождественно истинным (или тавтологией) называется высказывание, принимающие значения 1 (истинно) при всех значениях входящих в него переменных.

Задание

Постройте таблицу истинности сложного высказываний и определите, является ли это высказывание тождественно истинным:

3 $A \rightarrow (B \vee A)$

A	B	B v A	A → (B v A)

Задание :

Постройте таблицу истинности сложного высказываний и определите, является ли это высказывание тождественно истинным:

6 $(A \overset{1}{\rightarrow} B) \overset{6}{\rightarrow} ((A \overset{2}{\rightarrow} C) \overset{5}{\rightarrow} (A \overset{4}{\rightarrow} B \overset{3}{\&} C))$

			1	2	3	4	5	6
A	B	C	A → B	A → C	B & C	A → 3	2 → 4	1 → 5

Задание:

Постройте таблицы истинности сложных высказываний и определите, являются ли эти пары высказываний эквивалентными:

1. $A \vee B$; ? $B \vee A$
2. $A \vee (B \vee C)$; ? $(A \vee B) \vee C$
3. $A \vee (B \& C)$; ? $(A \vee B) \& (A \vee C)$
4. $A \vee A \& B$; ? A
5. $A \rightarrow B$; ? $\neg B \rightarrow \neg A$
6. $A \rightarrow B \& A$; ? $A \vee B$
7. $A \& (B \& C)$; ? $(A \& B) \& C$
8. $A \& (B \vee C)$; ? $(A \& B) \vee (A \& C)$
9. $A \leftrightarrow B$; ? $(A \rightarrow B) \& (\neg B \rightarrow \neg A)$
10. $A \rightarrow B$; ? $A \vee \neg B$

Эквивалентными (равносильными, тождественными) называются высказывания, значения которых совпадают на всех возможных наборах переменных.

Задача 1

Для какого целого числа X из интервала [1; 4] истинно высказывание

$$X > 1 \wedge ((X < 5) \rightarrow (X < 3))$$

Задача 2

Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \wedge L \wedge M) \vee (\neg L \wedge \neg M \wedge N) = 1$$

где K, L, M, N - логические переменные?

В ответе **<u>не нужно</u>** перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

Задача 3

Укажите значения логических переменных K, L, M, N, при которых логическое выражение

$$(K \vee M) \rightarrow (M \vee \neg L \vee N)$$ **ложно.**

Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 0101 соответствует тому, что K=0, L=1, M=0, N=1.

Задание 3:

Укажите значения логических переменных K, L, M, N, при которых логическое выражение

$$(K \vee M) \rightarrow (M \vee \neg L \vee N)$$

ложно.

Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке).

Так, например, строка 0101 соответствует тому, что K=0, L=1, M=0, N=1.

Задание: (K v M) ->(M v ¬L v N) = 0

Решение Вариант 1:

K 1	L 2	M 3	N 4	¬L 5	k v M 6	M v ¬L 7	7 v N 8	6 -> 8
0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1

K, L, M, N

Задание: (K v M) -> (M v ¬L v N) = 0

Полная таблица истинности

Python:

```
for k in range(2):
    for l in range(2):
        for m in range(2):
            for n in range(2):
                F = int((k or m) <= (m or (not(l) or n)))
                print( k, l,  m, n, F )
```

Pascal:

```
var  k, l, m, n, F: boolean;
Begin
  For k := false to true do
    for l := false to true do
        for m := false to true do
            for n := false to true do
                F:= (k or m) <= (m or (not(l) or n))
                    then writeln(k, l, m, n, F)
end.
```

Задание: $(K \vee M) \rightarrow (M \vee \neg L \vee N) = 0$

Таблица истинности для F=0

Python:

```
for k in range(2):
    for l in range(2):
        for m in range(2):
            for n in range(2):
                if ((k or m) <= (m or (not(l) or n))) == False:
                    print( k, l,  m, n )
```

Pascal:

```
var  k, l, m, n: boolean;
Begin
  For k := false to true do
    for l := false to true do
        for m := false to true do
            for n := false to true do
                if  ((k or m) <= (m or (not(l) or n))) = false
                    then writeln(k, l, m, n)
end.
```

Запомнить

Логическая операция		Питон	Паскаль
Инверсия	¬	not	not
Конъюнкция	& and ^	& and	and
дизъюнкция	or xor	or ^	or xor
Импликация	→	<=	<=
Эквивалентность	⇔	==	=
Инверсия эквивалентности	¬(… ⇔ …)	^ !=	xor <>
		False True	false true

Задание: (K v M) ->(M v ¬L v N) = 0

Решение Вариант 3-1:

G5 =ИЛИ(НЕ(E5);F5)

(K v M) -> (M v ¬L v N) = 0

K	L	M	N	K V M	M v ¬L v N	F=0
0	0	0	0	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА
0	0	0	1	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА
0	0	1	0	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА
0	0	1	1	ИСТИНА		
0	1					
0	1					
0	1	1	0	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА
0	1	1	1	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА
1	0	0	0			ИСТИНА
1	0	0	1			ИСТИНА
1	0	1	0			ИСТИНА
1	0	1	1	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА
1	1	0	0	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
1	1	0	1	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА
1	1	1	0	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА
1	1	1	1	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА

=ИЛИ(A5;C5)

=ИЛИ(НЕ(E5);F5)

=ИЛИ(C5;НЕ(B5);D5)

Задание: (K v M) ->(M v ¬L v N) = 0

Решение Вариант 3-2:

E2 =ЕСЛИ(ИЛИ(A2;C2)<=ИЛИ(C2; НЕ(B2);D2);1;0)

	A	B	C	D	E
1	K	L	M	N	F
2	0	0	0	0	1
3	0	0	0	1	1
4	0	0	1	0	1
5	0	0	1	1	1
6	0	1	0	0	1
7	0	1	0	1	1
8	0	1	1	0	1
9	0	1	1	1	1
10	1	0	0	0	1
11	1	0	0	1	1
12	1	0	1	0	1
13	1	0	1	1	1
14	1	1	0	0	0
15	1	1	0	1	1
16	1	1	1	0	1
17	1	1	1	1	1
18					

=ЕСЛИ(ИЛИ(A2;C2)<=ИЛИ(C2; НЕ(B2);D2);1;0)

Задача

Логическая функция *F* задаётся выражением

$$(x \to y) \wedge (y \to z).$$

Постройте таблицу истинности

Решение 1 $(x \to y) \wedge (y \to z)$

x	y	z	x→y	y→z	F
0	**0**	**0**	1	1	**1**
0	**0**	**1**	1	1	**1**
0	**1**	**0**	1	0	**0**
0	**1**	**1**	1	1	**1**
1	**0**	**0**	0	1	**0**
1	**0**	**1**	0	1	**0**
1	**1**	**0**	1	0	**0**
1	**1**	**1**	1	1	**1**

Задача

Логическая функция *F* задаётся выражением

$$(x \to y) \wedge (y \to z).$$

Постройте таблицу истинности

Решение 2 $(x \to y) \wedge (y \to z)$

Питон

```
for x in range(2):
    for y in range(2):
        for z in range(2):
            F = int(x <= y) and (y <= z)
            print( x, y,  z, F )
```

0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Задача

Логическая функция *F* задаётся выражением

$$(x \to y) \wedge (y \to z).$$

Постройте таблицу истинности

Решение 3

$$(x \to y) \wedge (y \to z)$$

D2 = ЕСЛИ(И(A2 <= B2; B2 <= C2)=ИСТИНА; 1; 0)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	y	z	F				
2	0	0	0	1				
3	0	0	1	1				
4	0	1	0	0				
5	0	1	1	1				
6	1	0	0	0				
7	1	0	1	0				
8	1	1	0	0				
9	1	1	1	1				