ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Высшая школа «Механика и процессы управления»

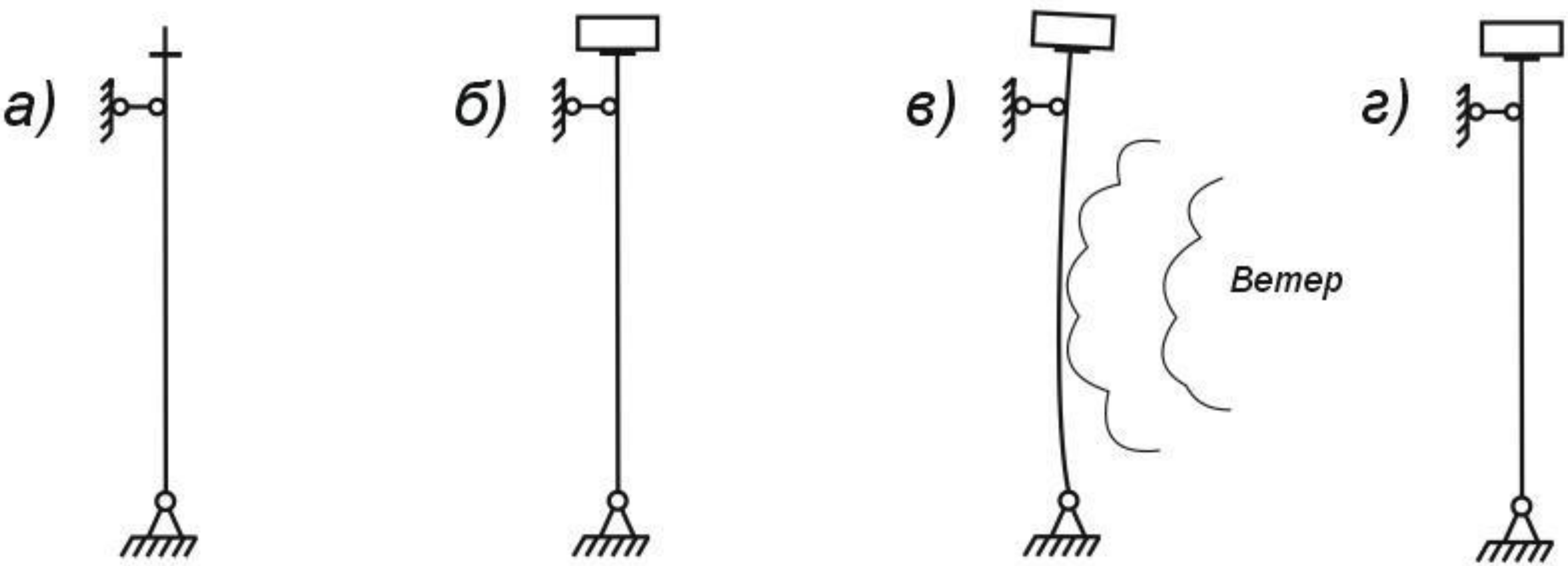
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Доктор технических наук, профессор ***Артюх Виктор Геннадиевич***

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ. УСТОЙЧИВОСТЬ

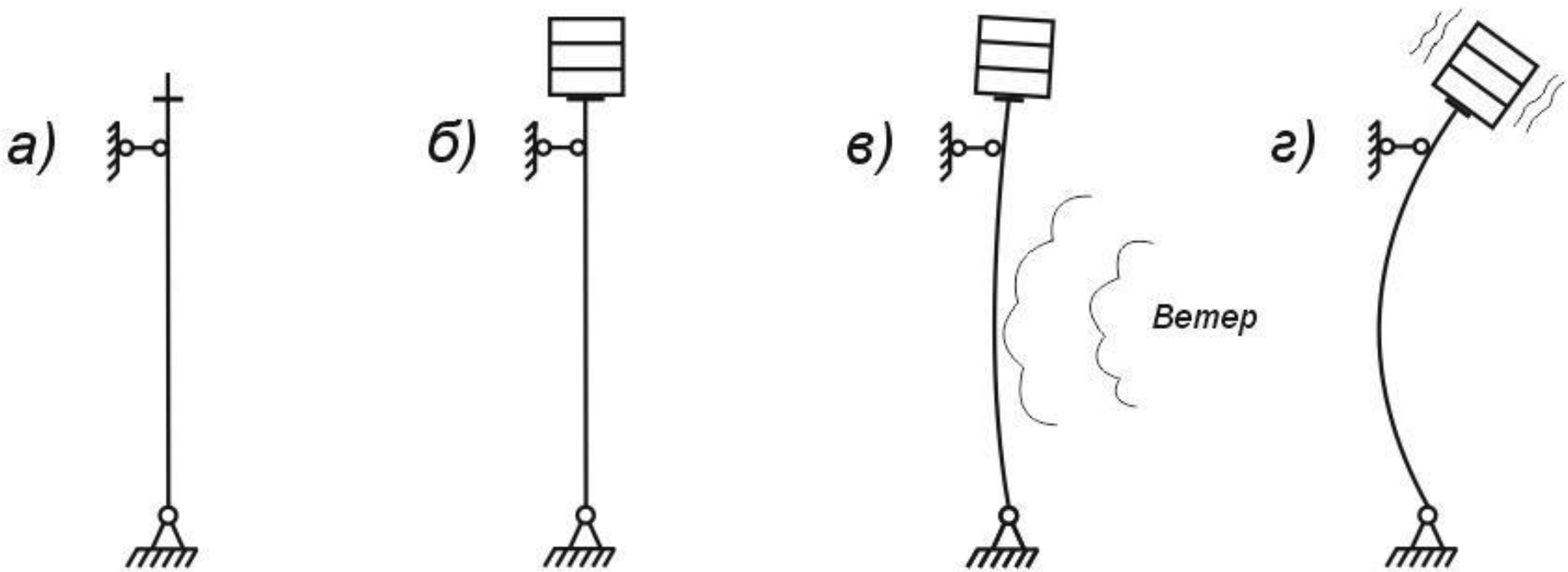
Устойчивость

Стержень, оставаясь прямолинейным, удерживает на себе небольшой груз. Если бесконечно малое внешнее воздействие отклонит его и исчезнет, стержень снова вернёт себе прямолинейную форму. В этом случае прямолинейная форма стержня **устойчива**.



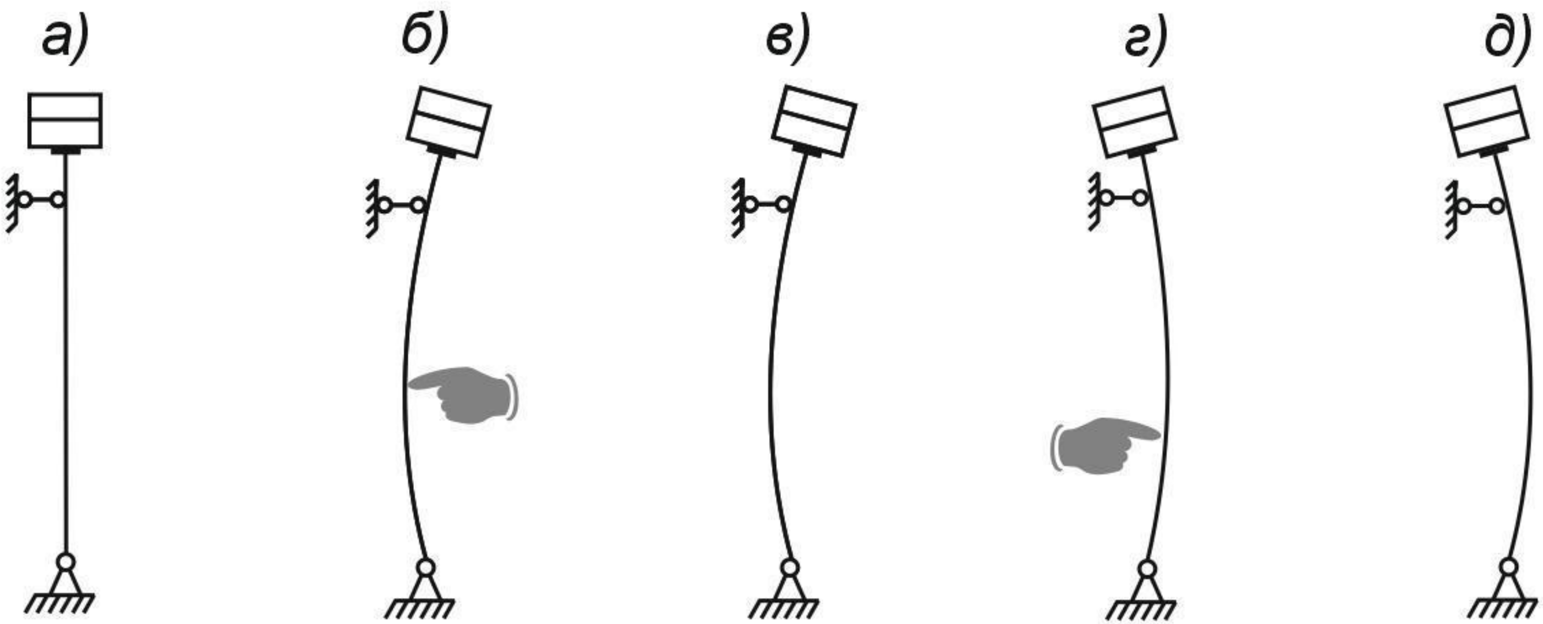
Неустойчивость

Большой груз стержень удержит, только будучи прямолинейным. Любое малое отклонение приводит к нарастанию прогибов. В этом случае прямолинейная форма стержня **неустойчива**.

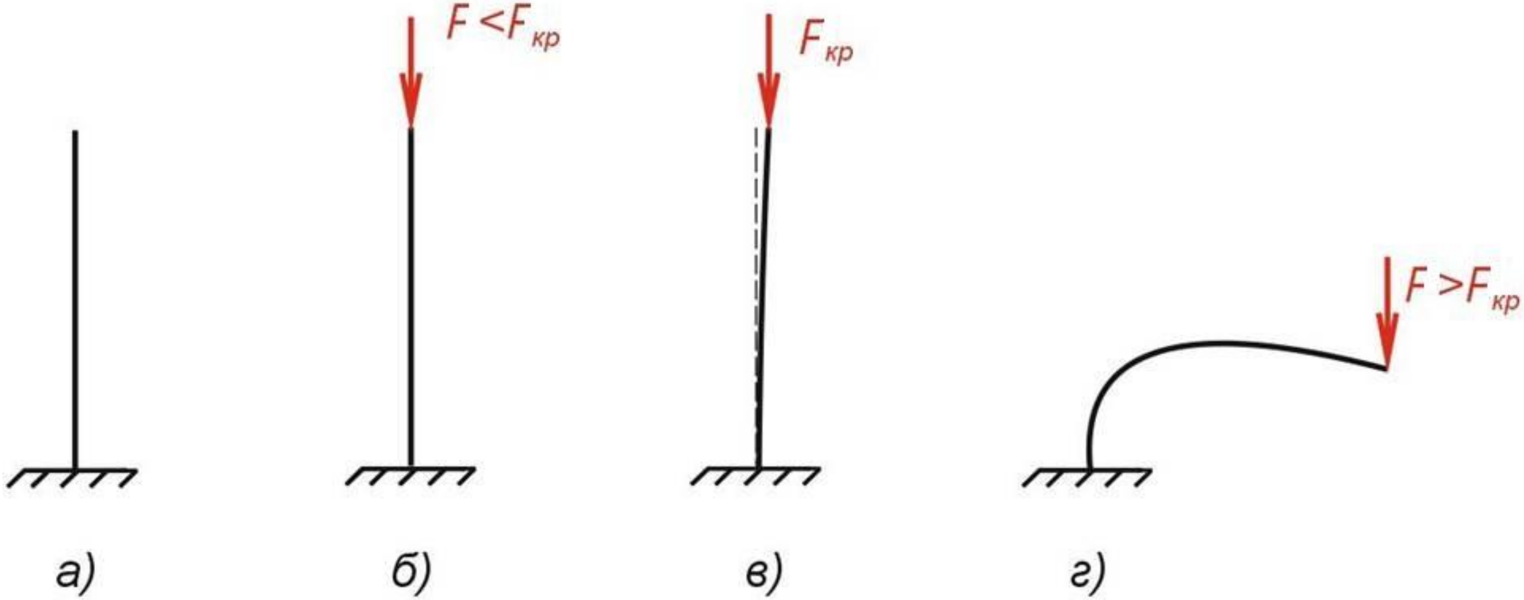


Состояние безразличного равновесия

Между устойчивым и неустойчивым состояниями существует состояние безразличного равновесия: груз можно подобрать таким образом, что при малом отклонении стержень **уже** не вернётся в прямолинейное состояние, но **ещё** не будет наращивать эти прогибы самопроизвольно. Попросту замрёт в этом положении. При таком значении веса груза и слегка отклонённая форма так же является для стержня равновесной. Можно отклонить стержень в другую сторону, он также останется в равновесном состоянии. Продольная нагрузка, приводящая стержень в состояние безразличного равновесия, называется **критической**.

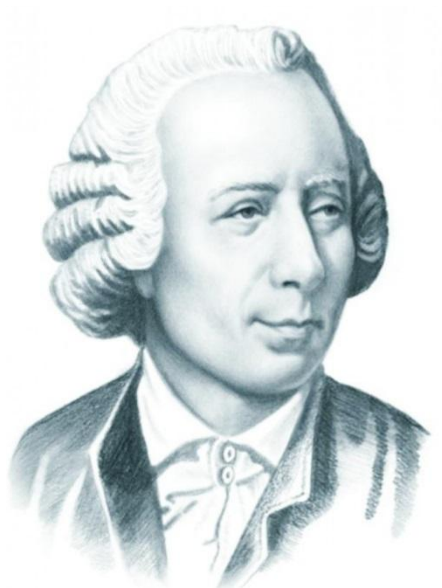


В состоянии безразличного равновесия внешние возмущения уже могут выводить прямой стержень в слабоизогнутые формы *(в)*, именуемые **формами потери устойчивости**, которые при превышении нагрузкой критического значения развиваются с большой скоростью в форму сильно изогнутого стержня *(г)*. Тем не менее, состояние безразличного равновесия – это всё еще равновесное состояние. А значит, здесь ещё можно применить уравнения статического равновесия всего стержня и его частей.



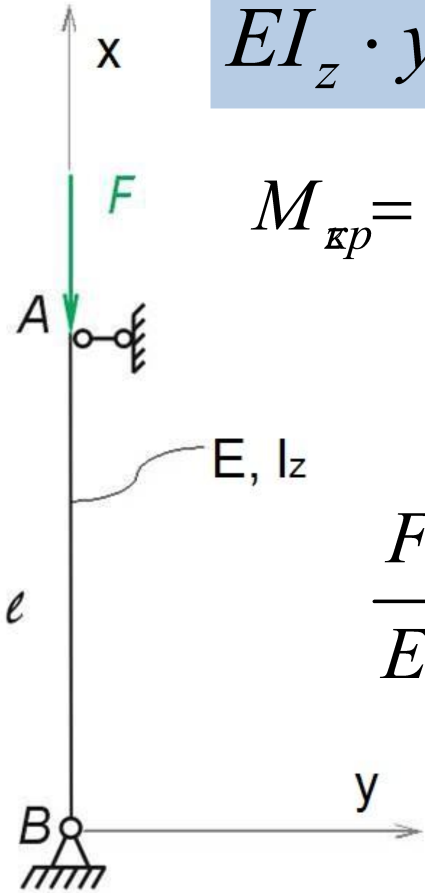
Следует помнить, что «**потеря устойчивости**» – это не процесс быстрого развития больших прогибов, а потеря стержнем способности возвращать себе исходную форму после бесконечно малого отклонения внешним воздействием. Просто на практике одно немедленно следует за другим.

Определение критической силы по Эйлеру



Леонард Эйлер
(1707-1783)

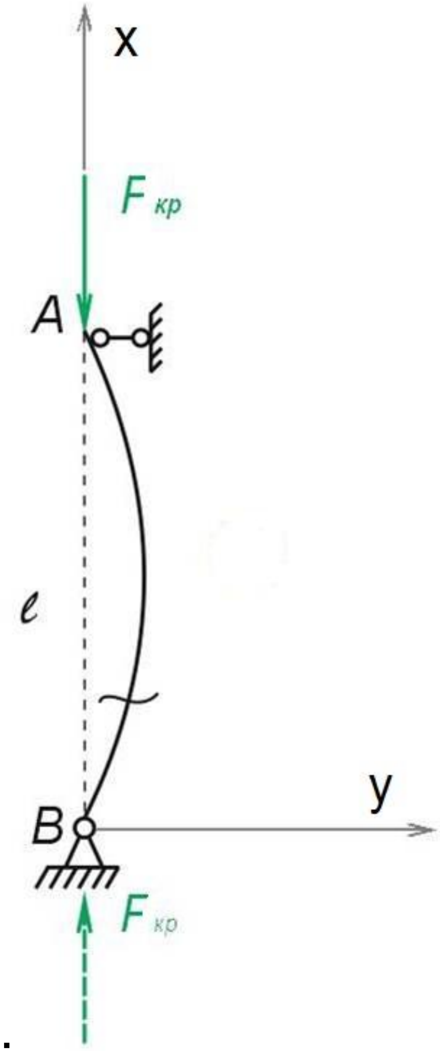
$$y'' + \frac{F_{кр} \cdot y}{EI_z} = 0$$



$$\boxed{EI_z \cdot y'' = M_z}$$

$$M_{кр} = -F \cdot y$$

$$\frac{F_{кр}}{EI_z} = k^2$$



Продольный изгиб – это такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении бруса возникают 2 ВСФ: продольная сила N и изгибающий момент M.

$$y'' + k^2 \cdot y = 0$$

$$y = A \cdot \sin kx + B \cdot \cos kx$$

$$y\big|_{x=0} = 0;\ y\big|_{x=l} = 0$$

$$B = 0;\ y = A \cdot \sin kx$$

$$0 = A \cdot \sin kl$$

$$A \neq 0;\ \sin kl = 0$$

$$kl = n\pi;\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

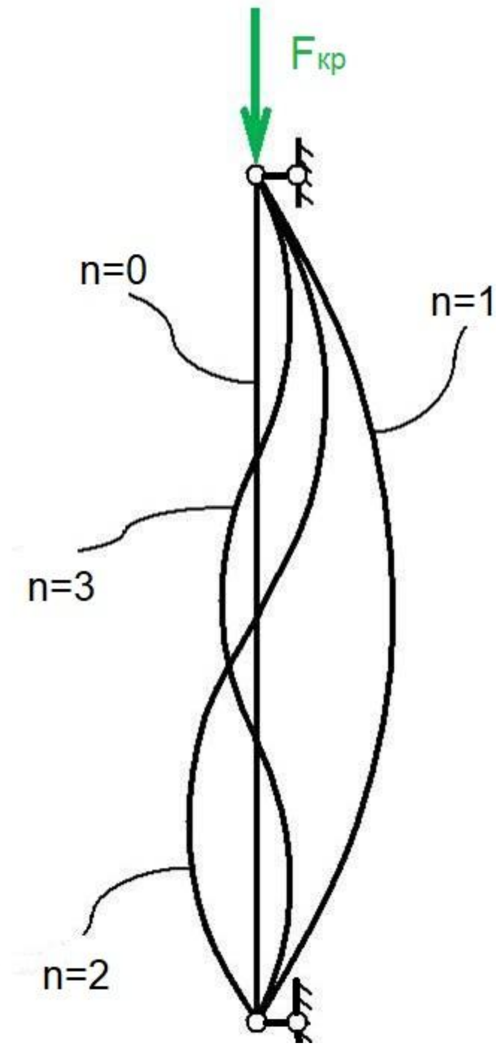
$$k^2 l^2 = n^2 \pi^2$$

$$\frac{F_{кр}}{EI_z} l^2 = n^2 \pi^2$$

$$F_{кр} = \frac{n^2 \pi^2 \cdot EI_z}{l^2}$$

$$n = 1;\ I_z = I_{\min}$$

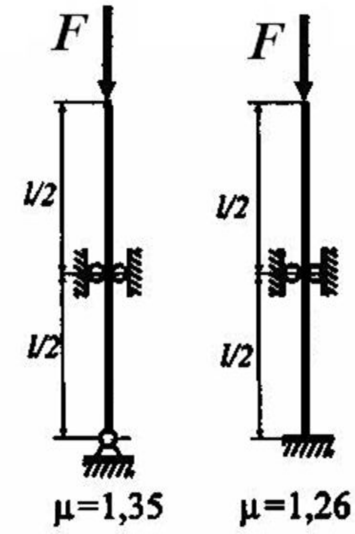
$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\min}}{l^2}$$

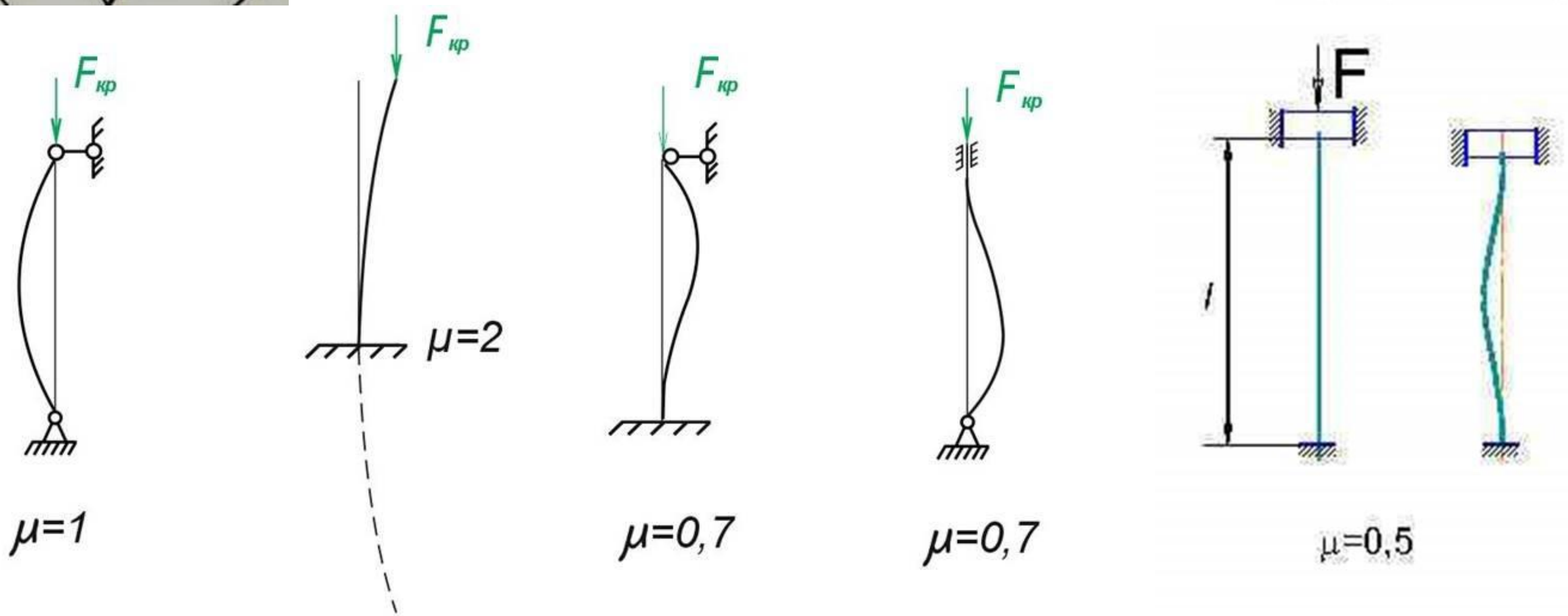


Коэффициент приведения длины μ

Физический смысл μ – это число длин стержня, которые укладываются на одну полуволну синусоиды.

Ф.С.Ясинский
(1856-1899)





Формула Эйлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\min}}{(\mu l)^2}$$

Пределы применимости формулы Эйлера

1. Поскольку формула Эйлера выводилась из **приближенного** дифференциального уравнения упругой линии балки, она является **приближенной**.
2. Поскольку формула Эйлера выводилась из приближенного дифференциального уравнения **упругой** линии балки, она справедлива только для **упругих** деформаций.

$$\sigma_{кр} \le \sigma_{пц}$$

$$\frac{I_{\min}}{A} = i_{\min}^2$$ - квадрат минимального радиуса инерции

$$\frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 \cdot A} \le \sigma_{пц} \qquad \frac{i_{\min}^2}{(\mu l)^2} \le \frac{\sigma_{пц}}{E\pi^2} \qquad \frac{(\mu l)^2}{i_{\min}^2} \ge \frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}$$

$$\frac{\mu l}{i_{\min}} \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$$

$$\frac{\mu l}{i_{\min}} = \lambda$$

- гибкость стержня

$$\lambda \geq \lambda_{пр}$$

$$\pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}} = \lambda_{пр}$$

- предельная гибкость стержня

Формула Ясинского:

$$\lambda_{пр} > \lambda \geq \lambda_0$$

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda$$

- для пластичных материалов

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2$$

- для хрупких материалов

$$\pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_T}} = \lambda_0$$

Ст. 3: a = 310 МПа; b = 1,14 МПа.
Сосна: a = 29 МПа; b = 0,19 МПа.

Ст. 3: $\lambda_{пр} \approx 100$; $\lambda_0 \approx 60$

Устойчивость за пределами упругости

Стержень, напряжения в котором достигли предела текучести, устойчивым не может быть по определению: устойчивость – способность возвращаться в исходное состояние после отклонения бесконечно малым внешним воздействием – подразумевает наличие в стержне только упругих (обратимых) деформаций. Любое догружение изгибом материала, уже нагруженного до предела текучести, порождает пластические (необратимые) деформации. После исчезновения внешнего воздействия вернуться обратно стержень уже не может. На практике это выглядит так: образуется пластический шарнир, и стержень теряет несущую способность.

Классификация стержней по гибкости

1. Стержни большой гибкости – рассчитываются по формуле Эйлера.
2. Стержни средней гибкости – рассчитываются по формуле Ясинского.
3. Стержни малой гибкости – устойчивости не теряют.

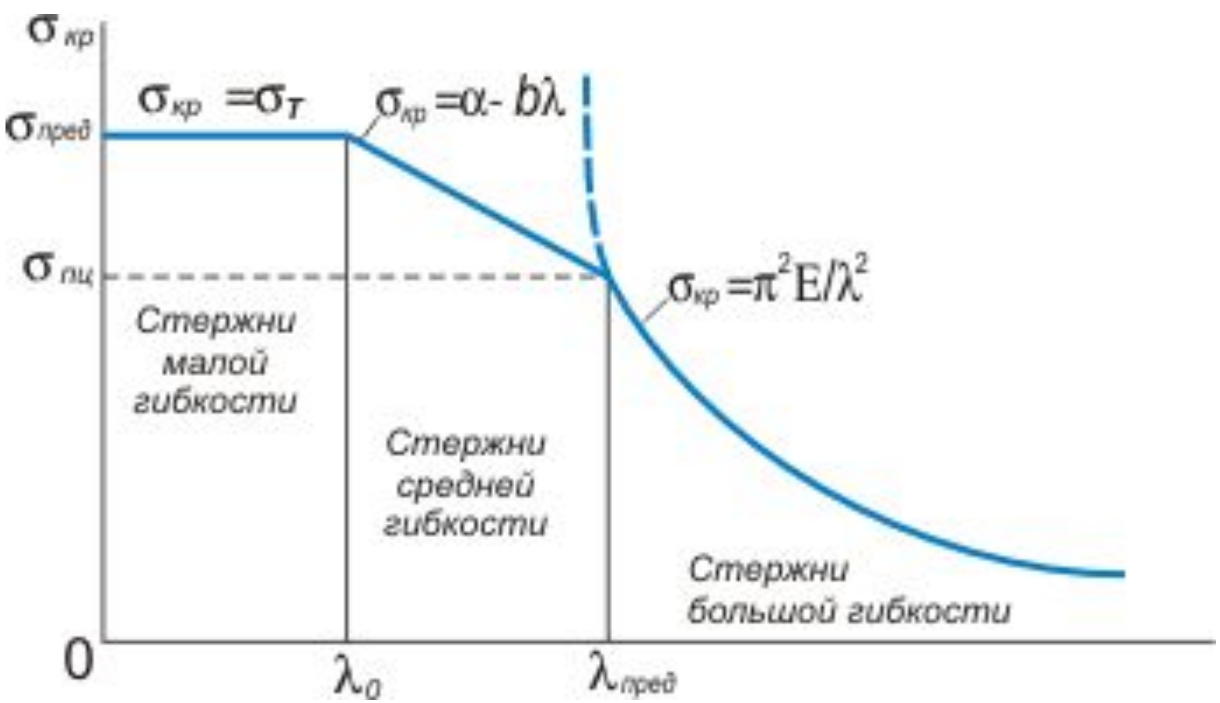


Диаграмма критических напряжений

$$1)\lambda \geq \lambda_{np};$$

$$2)\lambda_{np} > \lambda \geq \lambda_0;$$

$$3)\lambda < \lambda_0$$

Условие устойчивости

Гибкость	Коэффициент φ для			
	Ст.2, Ст.3, Ст.4	Ст.5	чугуна	дерева
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,16	0,31
110	0,52	0,43	—	0,25
120	0,45	0,36	—	0,22
130	0,40	0,33	—	0,18
140	0,36	0,29	—	0,16
150	0,32	0,26	—	0,14
160	0,29	0,24	—	0,12
170	0,26	0,21	—	0,11
180	0,23	0,19	—	0,10
190	0,21	0,17	—	0,09
200	0,19	0,16	—	0,08

Коэффициент запаса устойчивости:

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F}; n > 1,0$$

Условие устойчивости:

$$\boxed{\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \le \varphi[\sigma]}$$

Коэффициент понижения допускаемых напряжений:

$$0 \le \varphi \le 1,0$$

φ не может быть больше единицы. Стержень может, сохраняя прочность, терять устойчивость, но не наоборот.

Спасибо за внимание!

тел.: +7 931 5797053

E-mail: artiukh@mail.ru